Osservazioni su una formula del campo gravitazionale del Somigliana

GIOVANNI BOAGA (*)

C. Somigliana dapprima in due Note separate (1) e poi nella memoria fondamentale sulla « Teoria generale del campo gravitazionale ellissoidico » (2) ha reso nota la formula:

$$\begin{aligned} & g_1 (\cos^2 \varphi_2 - \cos^2 \varphi_3) \sqrt{1 + i^2 \cos^2 \varphi_1} + \\ & + g_2 (\cos^2 \varphi_3 - \cos^2 \varphi_1) \sqrt{1 + i^2 \cos^2 \varphi_2} + \\ & + g_3 (\cos^2 \varphi_1 - \cos^2 \varphi_2) \sqrt{1 + i^2 \cos^2 \varphi_3} = 0 \end{aligned} \qquad [1]$$

con g_1, g_2, g_3 gravità alle latitudini φ_1, φ_2, φ_3 ed i^2 quadrato della eccentricità aggiunta (**).

Su questa formula il chiaro Autore osserva che, « se si considera incognita la eccentricità aggiunta i e note le tre gravità g_1, g_2, g_3 e le corrispondenti tre latitudini φ_1, φ_2, φ_3 si otterrà una equazione in i che risoluta rispetto i ci permetterà di calcolare lo schiacciamento a del geoide ellissoidico (***) e quindi la sua forma, per mezzo di tre gravità e senza la preventiva conoscenza della grandezza degli assi dell'ellissoire terrestre ».

L'equazione cui fa cenno il Somigliana, senza però scrivere in forma esplicita i rispettivi coefficienti, è la seguente:

$$L \cdot i^4 + M \cdot i^2 + N = 0 \qquad [2]$$

ottenuta razionalizzando la [1].

(*) Direttore dell'Istituto di Geodesia e Topografia della Facoltà di Ingegneria dell'Università di Roma.

(**) Ossia $i^2 = (a^2 - b^2) : b^2$ con a, b semidiametri equatoriale e polare dell'ellisoide rotazionale terrestre.

(***) I due parametri a ed i^2 risultano tra loro legati dalla relazione: $(1 + i^2)(1 - a)^2 = 1$.

Fatte le posizioni

$$\left\{\begin{array}{l} A = g_1 (\cos^2 \varphi_2 - \cos^2 \varphi_3) \\ B = g_2 (\cos^2 \varphi_3 - \cos^2 \varphi_1) \\ C = g_3 (\cos^2 \varphi_1 - \cos^2 \varphi_2) \end{array}\right. \quad [3] \qquad \left\{\begin{array}{l} A' = A \cdot \cos \varphi_1 \\ B' = B \cdot \cos \varphi_2 \\ C' = C \cdot \cos \varphi_3 \end{array}\right. \quad [4]$$

i coefficienti L, M e N della [2] risultano cosi definiti:

$$\left\{\begin{array}{l} L = (A'+B'+C')(-A'+B'+C')(A'-B'+C')(A'+B'-C') \\ M = A'^2(-A^2+B^2+C^2) + B'^2(A^2-B^2+C^2) + C'^2(A^2+B^2-C^2) \\ N = (A+B+C)(-A+B+C)(A-B+C)(A+B-C)\,. \end{array}\right. \quad [5]$$

Facciamo presente che la [2] fornisce il valore della eccentricità aggiunta i^2 proveniente dalle misurazioni geodetiche (triangolazioni) nel solo caso in cui al posto delle tre gravità che figurano nelle posizioni [3], e quindi nei coefficienti L, M, N, siano sostituite *gravità ellissoidiche normali* ossia *gravità teoriche* e non *gravità osservate*, in quanto queste ultime risultano generalmente affette dal disturbo del campo gravitazionale normale, provocato dalla diversa distribuzione delle masse interne terrestri, disturbo che altera talvolta in maniera sensibile le gravità osservate, ridotte come d'uso al livello medio del mare per l'effetto dell'altezza del punto di osservazione sul livello marino e per la topografia circostante il punto di osservazione. Queste alterazioni delle gravità prendono il nome di *anomalie gravimetriche*; e sono appunto queste anomalie che influiscono sensibilmente sul calcolo di i^2; esse d'altronde non si possono separare dalle gravità osservate, se non confrontandole con le gravità normali, provenienti dalla [1] e quindi ammettendo a priori il valore normale del quadrato della eccentricità aggiunta che si vuole determinare.

Scopo del presente studio è appunto quello di mettere in rilievo l'influenza delle anomalie della gravità sulla determinazione dello schiacciamento terrestre.

Ciò premesso, se nella [1] — per maggior semplicità di successivi conteggi — si assumono per g_2 e g_3 i valori (noti) delle gravità equatoriale (g_e = 978,049 gal) e polare (g_p = 983,221 gal) per cui $\cos \varphi_2 = 1$ e $\cos \varphi_3 = 0$, rimane una sola gravità arbitraria, la g_1, che ora indicheremo semplicemente con g, e intenderemo con la φ la corrispondente latitudine.

Con questa limitazione la formula [1] diviene:

$$g\sqrt{1+i^2\cos^2\varphi}-g_e\cos^2\varphi\sqrt{1+i^2}-g_p\,\mathrm{sen}^2\varphi=0 \qquad [6]$$

e le posizioni [3] e [4] assumono le nuove forme:

$$\begin{cases} A = g \\ B = -\,g_e\cos^2\varphi \\ C = -\,g_p\,\mathrm{sen}^2\varphi \end{cases} [7] \qquad \begin{cases} A' = g\cos\varphi \\ B' = -\,g_e\cos^2\varphi \\ C' = 0 \end{cases} [8]$$

e successivamente

$$\begin{cases} L = -\cos^4\varphi\,(g^2-g_e^2\cos^2\varphi)^2 \\ M = -\cos^2\varphi\,\{(g^2-g_e^2\cos^2\varphi)(g^2-g_e^2\cos^4\varphi)-g_p^2\,\mathrm{sen}^4\varphi\,(g^2+g_e^2\cos^2\varphi)\} \\ N = 4\,g_e^2 g_p^2\cos^4\varphi\,\mathrm{sen}^4\varphi-(g^2-g_e^2\cos^4\varphi-g_p\,\mathrm{sen}^4\varphi)^2 \end{cases} [9]$$

Assumendo per gravità g quella alla latitudine $\varphi = 45^\circ$ con che: $\mathrm{sen}^2\varphi = \cos^2\varphi = \frac{1}{2}$. $\mathrm{sen}^4\varphi = \cos^4\varphi = \frac{1}{4}$. $\mathrm{sen}^8\varphi = \cos^8\varphi = \frac{1}{16}$, le [9] assumono le forme:

$$\begin{cases} L = -\,\frac{1}{4}\,(g^2-\frac{1}{2}\,g_e^2)^2 \\ M = -\,\frac{1}{2}\,\{(g^2-\frac{1}{2}\,g_e^2)\,(g^2-\frac{1}{4}\,g_e^2)-\frac{1}{4}\,g_p^2\,(g^2+\frac{1}{2}\,g_e^2)\} \\ N = \frac{1}{4}\,g_e^2\,g_p^2-(g^2-\frac{1}{4}\,g_e^2-\frac{1}{4}\,g_p^2)^2 \end{cases} [10]$$

dove $g = q_{45^\circ} = 980{,}629$ gal.

Allorchè varia il valore della gravità g per effetto di una anomalia Δg, variano i coefficienti [10], generando in base alla [2] una variazione Δi^2 di i^2 legata alle variazioni ΔL, ΔM, ΔN dei coefficienti, dalla:

$$\Delta i^2 = -\,\frac{i^4\cdot\Delta L+i^2\cdot\Delta M+\Delta N}{2\,i^2\,L+M} \qquad [11]$$

con

$$\begin{cases} \Delta L = \dfrac{\partial L}{\partial g}\cdot\Delta g = -\,g\,(g^2-\frac{1}{2}\,g_e^2)\cdot\Delta g \\ \Delta M = \dfrac{\partial M}{\partial g}\cdot\Delta g = -\,g\,(2\,g^2-\frac{3}{4}\,g_e^2-\frac{1}{4}\,g_p^2)\cdot\Delta g \\ \Delta N = \dfrac{\partial N}{\partial g}\cdot\Delta g = -\,g\,(4\,g^2-g_e^2-g_p^2)\cdot\Delta g \end{cases} [12]$$

Introducendo per $g_{45°}$, g_e, g_p i valori dianzi richiamati si giunge con la [11] alla:

$$\Delta i^2 = 0{,}000949 \cdot \Delta g^{(\mathrm{mgal})} \qquad [13]$$

dove $\Delta g^{(\mathrm{mgal})}$ indica che la anomalia va espressa in milligal.

Indicando con m l'inverso dello schiacciamento a ($m = 297$), la variazione Δi^1 è legata alla variazione Δm di m dalla relazione

$$\Delta i^2 = -\frac{2m}{(m-1)^3} \cdot \Delta m = -\frac{\Delta m}{43660} \qquad [14]$$

eppertanto eliminando dalle [13] e [14] il Δi^2 si perviene alla:

$$\Delta m = 41{,}3 \cdot \Delta g^{(\mathrm{mgal})} \qquad [15]$$

atta ad esprimere la variazione dello schiacciamento della Terra in funzione della anomalia gravimetrica Δg. Eppertanto se $\Delta g = +1$ milligal la [1] e conseguentemente la [2] fornisce per i^2 un valore tale che rispetto a quello attualmente accettato dalla Unione Geodetica e Geofisica Internazionale, produce una variazione di 41 unità sull'inverso dello schiacciamento. E poichè non si possono utilizzare gravità osservate prive di anomalie, se non si vogliono effettuare dei semplici controlli numerisi (*), cosi

(*) A proposito di controlli numerici osserviamo che introducendo nella [6] al posto di g_e il valore consaputo 978,049 gal ed al posto di g_p e $g_{45°}$ rispettivamente i valori 983,221 3143 gal, 980,629 3867 gal e per i^2 il valore proveniente dalle misurazioni geodetiche, che fornisce lo schiacciamento $a = \frac{1}{297}$, ossia $i^2 = 0{,}006768170197186374$ la [6] stessa non risulta identicamente soddisfatta, ma presenta il residuo: $+\ 0{,}00001545$ gal che viene annullato lasciando inalterati i valori gravimetrici sopra scritti, se si altera il valore di i^2 della quantità

$$0{,}00007466205$$

il che produce una variazione nel denominatore dello schiacciamento dell'importo 0,6 cioè minore di una unità. Si vede pertanto che i valori gravimetrici da introdurre nella [1] debbono essere considerati con sette cifre decimali del gal, ed i^2 con ben diciotto cifre decimali data la sensibilità della formula considerata, se si vuole condurre il calcolo con cifre esatte fino al centesimo di milligal ossia fino al milionesimo di *gal*, ordine di grandezza talvolta raggiungibile oggi con i gravimetri per le determinazioni delle gravità relative.

Il Somigliana che ha eseguito tali calcoli con gravità limitate a sole tre cifre decimali del gal ha ottenuto, data la grande sensibilità della formula per la i^2 una variazione che ha portato lo schiacciamento da 1/297 a 1/256!

dobbiamo concludere, dal punto di vista geodetico, e senza diminuire la grande importanza teorica della formula [1] di C. Somigliana, che essa non si presta alla determinazione dello schiacciamento, oppure del rapporto dei semi assi equatoriale (a) e polare (b) dell'ellissoide terrestre (*), in funzione delle gravità osservate, causa appunto la presenza in queste delle anomalie gravimetriche, che influiscono, in maniera assai rilevante, sulla determinazione del quadrato della eccentricità aggiunta.

RIASSUNTO

L'Autore mette in evidenza l'alto grado di sensibilità numerica della formula del Somigliana, che lega i valori di tre gravità, a tre latitudini diverse, al valore della eccentricità terrestre.

ABSTRACT

The Author puts in evidence the high degree of numerical sensibility of Somigliana's formula that unites the values of three gravities, at three different latitudes, to the value of Earth eccentricity.

BIBLIOGRAFIA

(1) SOMIGLIANA, C., *Sulla determinazione delle costanti del geoide mediante misure di gravità.* « Atti dell'Acc. delle Scienze » di Torino, Vol XVII, Rendiconti del « Seminario Matem. e Fisico » di Milano, Anno I, Vol. 1. Si veda pure in detto Seminario, ecc. la Nota di E. BIANCHI dal titolo: Osservazioni sulla Comunicazione del Prof. SOMIGLIANA, ecc. stesso volume.

(2) « *Memorie della Società astronomica Italiana* », IV.

(*) Si osservi che tale rapporto è legato al quadrato della eccentricità aggiunta dalla relazione $a : b = \sqrt{1 + i^2}$.