

SULL'OMOGENEITÀ E SULLO STATO DI EQUILIBRIO DEL MANTELLO INTERNO DELLA TERRA

P. E. VALLE

Introduzione. — In una nota precedente ⁽¹⁾ è stato posto in evidenza che le velocità delle onde elastiche di agitazione termica di un solido isotropo, omogeneo, di tipo monoatomico, sono date dalle relazioni

$$v_m = v_{om} \left(\frac{\rho_o}{\rho} \right)^{1/3} e^{\gamma_{om} \left(1 - \frac{\theta_o}{\theta} \right)} \quad (m = l, t) \quad [1]$$

nelle quali ρ è la densità, γ_{om} un parametro e gli indici l e t si riferiscono alle onde longitudinali e trasversali rispettivamente.

Queste velocità sono determinate dai moduli valutati ad energie termiche costanti, ma se la temperatura del solido è superiore alle temperature caratteristiche, coincidono con le velocità isoterme.

In questa nota si studiano alcuni particolari dell'andamento di tali velocità in uno strato omogeneo, in equilibrio idrostatico, in relazione al gradiente di temperatura e nell'ipotesi che la temperatura stessa sia superiore alle temperature caratteristiche.

Come applicazione viene tentata una verifica, per il mantello interno della Terra, delle ipotesi su cui poggia il calcolo del modello A di K. E. Bullen.

Si premettono alcune considerazioni sulle trasformazioni adiabatiche reversibili.

Trasformazioni adiabatiche. — Se la temperatura è superiore alle temperature caratteristiche, l'entropia di un solido può essere espressa, con sufficiente approssimazione, dalla relazione ⁽¹⁾

$$S = - \frac{R}{A} \sum \log \frac{\theta_m}{T} \quad (m = l, t, t) \quad [2]$$

nella quale R è la costante dei gas, A il peso atomico, θ_m sono le temperature caratteristiche e T la temperatura assoluta.

Se si indica con l'indice zero un certo stato iniziale si ha dalla [2]

$$\frac{A}{R} (S - S_0) = \log \frac{T^3 \theta_0 \theta_0^2}{T_0^3 \theta_1 \theta_1^2} \quad [3]$$

o anche, tenendo presente che le temperature caratteristiche sono proporzionali alle frequenze massime di vibrazione,

$$\frac{A}{R} (S - S_0) = \log \frac{T^3 \nu_{01} \nu_{01}^2}{T_0^3 \nu_1 \nu_1^2}$$

Ora nella nota già citata ⁽¹⁾ è stato dimostrato che

$$\nu_m = \nu_m e^{\gamma_{0m} \left(1 - \frac{\theta_0}{\theta}\right)}$$

e quindi risulta

$$T = T_0 e^{\gamma_0 \left(1 - \frac{\theta_0}{\theta}\right) + \frac{(S - S_0)}{c_v}} \quad [4]$$

nella quale γ_0 è il parametro di Grüneisen, dato da

$$\gamma_0 = \frac{\gamma_{01} + 2 \gamma_{02}}{3} \quad [5]$$

e c_v è il valore classico del calore specifico a volume costante, ossia

$$c_v = \frac{3R}{A} \quad [6]$$

Se si considera una trasformazione adiabatica reversibile che porti il solido dalla densità ρ_0 alla densità ρ , la [4] diviene

$$T = T_0 e^{\gamma_0 \left(1 - \frac{\theta_0}{\theta}\right)} \quad [7]$$

Questa relazione si trova già accennata in precedenti lavori dell'Autore e può essere scritta anche nella forma

$$\frac{T^3}{\rho \nu_1 \nu_1^3} = \text{costante} \quad [8]$$

Si può vedere facilmente che se la temperatura iniziale T_0 soddisfa la condizione

$$T_0 > \theta_{\text{om}} e^{\gamma_{\text{om}} - \gamma_0} \quad [9]$$

una compressione adiabatica mantiene la temperatura sempre al disopra delle temperature caratteristiche.

Gradienti di temperatura. — Si consideri uno strato omogeneo, isotropo, nel quale la variazione della velocità v_m con la profondità h è determinata soltanto dalla variazione della densità ρ e non dai valori iniziali dei parametri che compaiono nella [1]. Si avrà

$$\frac{d v_m}{d h} = \frac{\partial v_m}{\partial \rho} \frac{d \rho}{d h} \quad [10]$$

La densità ρ può essere pensata funzione della temperatura T e della pressione p attraverso l'equazione di stato, e quindi

$$\frac{d v_m}{d h} = \frac{\partial v_m}{\partial \rho} \left(\frac{\rho}{K_T} \frac{d p}{d h} - \alpha \frac{d T}{d h} \right) \quad [11]$$

nella quale K_T è il modulo di compressibilità isoterma e α la dilatazione termica.

Se l'equilibrio è idrostatico la [11] si scrive

$$\frac{d v_m}{d h} = \frac{\partial v_m}{\partial \rho} \frac{\rho}{K_T} \left(g - \alpha K_T \frac{d T}{d h} \right) \quad [12]$$

dove g è il campo gravitazionale.

Convienne introdurre il gradiente di temperatura τ_c per cui la velocità rimane costante al variare di h e che verrà chiamato gradiente critico. Si avrà

$$\tau_c = \frac{g}{\alpha K_T} \quad [13]$$

o anche, ricordando che $\alpha K_T = \gamma \rho c_v = \gamma_0 \rho_0 c_v$,

$$\tau_c = \frac{g}{\gamma_0 c_v} \frac{\rho}{\rho_0} \quad [14]$$

Indicando con τ il gradiente attuale dT/dh , dato che dalla [I] risulta

$$\frac{\partial \log v_m}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho} \left(\gamma_m - \frac{1}{3} \right)$$

perché $\gamma_m \rho = \gamma_{0m} \rho_0$, l'equazione [12] diventa

$$\frac{d v_m}{d h} = \frac{\bar{v}_m}{K_T} \rho g \left(\gamma_m - \frac{1}{3} \right) \left(1 - \frac{\tau}{\tau_c} \right) \quad [15]$$

Questa relazione può essere ulteriormente trasformata introducendo il gradiente adiabatico

$$\tau_s = \frac{T \alpha g}{c_p} \quad [16]$$

Con qualche passaggio dalla [13] e dalla [16] risulta

$$\frac{\tau_s}{\tau_c} = \frac{\alpha \gamma T}{1 + \alpha \gamma T} \quad [17]$$

Dato che in generale $\alpha > 0$, τ_c è sempre maggiore di τ_s .

Ora indicando con K_s il modulo di compressibilità adiabatica si ha

$$\frac{K_s}{K_T} = \frac{1}{1 - \frac{\tau_s}{\tau_c}} \quad [18]$$

e quindi la [15] si può scrivere nella forma

$$\frac{d v_m}{d h} = v_m \frac{\rho g}{K_s} \left(\gamma_m - \frac{1}{3} \right) \frac{1 - \frac{\tau}{\tau_c}}{1 - \frac{\tau_s}{\tau_c}} \quad [19]$$

oppure

$$A_m v_m \frac{d v_m}{d h} = g \left(\gamma_m - \frac{1}{3} \right) \frac{1 - \frac{\tau}{\tau_c}}{1 - \frac{\tau_s}{\tau_c}} \quad [20]$$

dove si è posto

$$A_m = \frac{(v^2)_s - \frac{4}{3} v_t^2}{v_m^2} \quad [21]$$

Si osservi che la [20] mostra che le velocità isoterme sono stazionarie al centro della Terra perché ivi è $g = 0$.

Effettivamente la velocità delle onde sismiche longitudinali, la quale però è la velocità adiabatica, presenta un andamento del genere verso il centro della Terra.

Posto ora

$$R_m = \frac{A_m v_m}{g \left(\gamma_m - \frac{1}{3} \right)} \frac{d v_m}{d h} \quad [22]$$

nell'ipotesi che la densità ρ si mantenga sempre minore di $3 \gamma_{om} \rho_o$, ossia nell'ipotesi che risulti $\gamma_m > 1/3$, ricordando che $\tau_s < \tau_e$, si hanno i casi notevoli indicati nella Tabella I.

TABELLA I

Valore di R_m	Valore di τ
$R_m < 0$	$\tau > \tau_e$
$R_m = 0$	$\tau = \tau_e$
$R_m < 1$	$\tau > \tau_s$
$R_m = 1$	$\tau = \tau_s$
$R_m > 1$	$\tau < \tau_s$

Può essere interessante talvolta considerare anche il gradiente di temperatura τ_o , necessario perché si formi una zona d'ombra per la propagazione delle onde elastiche.

Com'è noto la formazione della zona d'ombra si ha quando

$$\frac{1}{v_m} \frac{d v_m}{d h} = - \frac{1}{r_o - h} \quad [23]$$

in cui r_o indica il raggio della Terra.

Introducendo questa condizione nella [20] si ha

$$- \frac{A_m v_m^2}{r_o - h} = g \left(\gamma_m - \frac{1}{3} \right) \frac{1 - \frac{\tau_o}{\tau_e}}{1 - \frac{\tau_s}{\tau_e}} \quad [24]$$

mediante la quale si può valutare τ_0 . Questo gradiente, nell'ipotesi $\gamma_m > \frac{1}{3}$ è superiore al gradiente critico.

Tentativo di verifica delle ipotesi sulle quali è stato costruito il Modello A di K. E. Bullen per il mantello interno della Terra. — Le più recenti discussioni sulle proprietà elastiche, temperatura e composizione del mantello interno della Terra, sono probabilmente quelle che si sono sviluppate sulla base dei lavori presentati da F. Birch ⁽²⁾ e J. Verhoogen ⁽³⁾ alla 34^a riunione annuale dell'American Geophysical Union.

Peraltro, allo stato delle attuali conoscenze, sembra opportuno controllare se le note ipotesi sulle quali è stato costruito il modello *A* di K. E. Bullen sono verificate.

Un tale controllo può essere tentato mediante la relazione [20] del paragrafo precedente, prendendo in considerazione le onde sismiche di tipo S, perché la velocità isoterma di queste onde coincide con la velocità adiabatica.

L'applicabilità della teoria dei solidi all'interno della Terra è stata discussa in precedenti lavori ⁽⁴⁻⁵⁾.

Se lo strato *D* è omogeneo, in equilibrio idrostatico e adiabatico dovrà risultare

$$R_t = 1 \quad [25]$$

ossia

$$A_t v_t \frac{d v_t}{d h} = g \left(\gamma_t - \frac{1}{3} \right) \quad [26]$$

Il primo membro della precedente relazione può essere direttamente calcolato dai valori delle velocità delle onde sismiche, mentre il secondo membro può essere valutato soltanto in base ad un modello perché contiene g e γ_t .

Nella Tabella II sono contenute le velocità delle onde sismiche calcolate da H. Jeffreys ⁽⁶⁾ e le grandezze relative al modello *A* di K. E. Bullen ⁽⁷⁻⁸⁾.

Dato che si presenta qualche difficoltà per il calcolo di $d v_t / d h$, la velocità v_t è stata approssimata, mediante il metodo dei minimi quadrati, con una curva di tipo parabolico.

TABELLA II

h km	$(v_1)_s$ km/sec	v_1 km/sec	ρ g/cm ³	g cm/sec ²
1000	11,42	6,36	4,68	995
1200	11,71	6,50	4,80	991
1400	11,99	6,62	4,91	988
1600	12,26	6,73	5,03	986
1800	12,53	6,83	5,13	985
2000	12,79	6,93	5,24	985
2200	13,03	7,02	5,34	990
2400	13,27	7,12	5,44	993
2600	13,50	7,21	5,54	1009
2800	13,61	7,30	5,63	1026

Con i valori della Tabella II si è ottenuto:

$$\frac{v_1}{v_{1s}} - 1 = (0,101747 \pm 0,001862) h' - (0,011346 \pm 0,001270) h'^2 \quad [27]$$

dove

$$h' = 10^{-3} (h - 1000)$$

e con l'indice 1 si è indicato il valore della velocità alla sommità dello strato D , ossia alla profondità di 1000 km.

La derivata risulta quindi

$$\frac{dv_1}{dh} = 6,3610^{-3} [(0,101747 \pm 0,001862) - 0,022692 \pm 0,002540] h' \quad [28]$$

Sono stati ritenuti esatti i valori delle velocità di Jeffreys. L'errore medio preso in considerazione è soltanto l'errore medio della derivata. In questo modo è stato calcolato il primo membro della relazione [26] e i risultati sono contenuti nella seconda colonna della Tabella III.

TABELLA III

h km	$A_t \bar{v}_t \frac{dv_t}{dh}$ cm/sec^2	$g(\gamma_t - 1/3)$ cm/sec^2	R_t
1000	778 ± 14	831 ± 4	0,936 ± 0,017
1200	768 ± 15	799 ± 4	0,961 ± 0,019
1400	760 ± 17	771 ± 4	0,986 ± 0,023
1600	749 ± 20	744 ± 4	1,007 ± 0,027
1800	738 ± 24	722 ± 3	1,022 ± 0,033
2000	722 ± 29	701 ± 3	1,030 ± 0,042
2200	703 ± 34	684 ± 3	1,028 ± 0,050
2400	678 ± 39	671 ± 3	1,010 ± 0,058
2600	652 ± 44	660 ± 3	0,988 ± 0,067
2800	610 ± 49	655 ± 3	0,931 ± 0,075
			Media 0,975 ± 0,011 (ponderata)

In un precedente lavoro ⁽⁵⁾ è stato dedotto dalle velocità di Jeffreys e dalle densità del modello *A* di Bullen, il valore del parametro γ_t alla sommità dello strato *D*, cioè alla profondità di 1000 km. Tale valore, considerato con quattro cifre decimali, è il seguente:

$$\gamma_{11} = 1,1689 \pm 0,0039 \quad [29]$$

Ricordando che

$$\gamma_t = \gamma_{11} \frac{\rho_t}{\rho} \quad [30]$$

si possono calcolare facilmente i valori di γ_t alle varie profondità, mediante i valori della densità della Tabella II.

La terza colonna della Tabella III contiene il prodotto $g(\gamma_t - 1/3)$. L'errore medio indicato è soltanto quello che deriva dall'errore medio di γ_t .

L'ultima colonna della Tabella III contiene infine il rapporto R_t , il cui errore medio indicato è stato calcolato approssimativamente con gli errori medi attribuiti al dividendo e al divisore. Questo rapporto è riportato in funzione della profondità nella fig. 1.

Prima di trarre qualche conclusione dai risultati numerici contenuti nella Tabella III, è necessario eseguire una stima del gradiente critico τ_c .

Se si suppone, a titolo di orientamento, che il peso atomico medio dei materiali che costituiscono lo strato D sia uguale a 20, la relazione

$$\tau_c = \frac{c_v \gamma_1}{\mu} \frac{\rho}{\rho_1} \quad [31]$$

nella quale l'indice 1 si riferisce alla sommità dello strato, consente di calcolare τ_c , in funzione della profondità, con i dati della Ta-

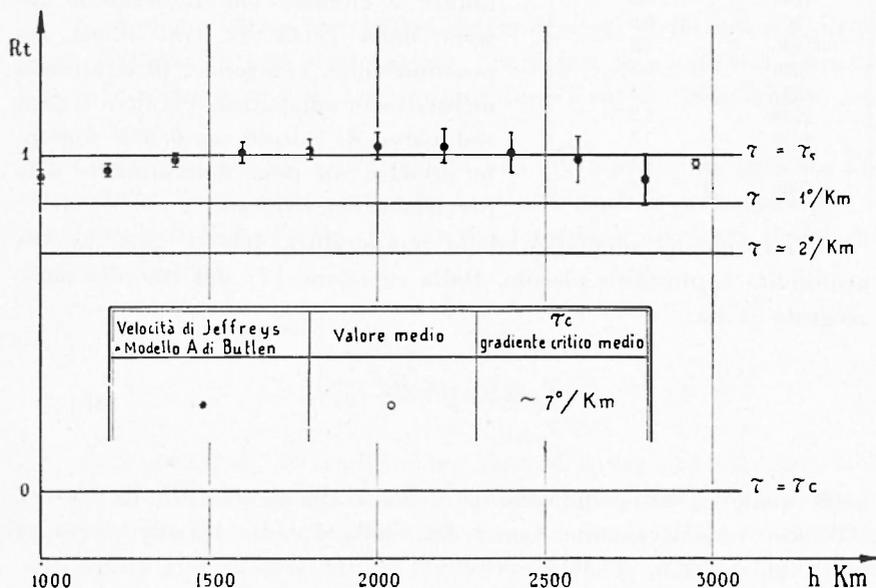


Fig. 1

bella II. A γ_1 si può attribuire il valore 1,253, ottenuto in un precedente lavoro (7).

La Tabella IV mostra che τ_c è compreso tra 6,4 gradi km e 7,9 gradi km. In media τ_c si può assumere pari a 7 gradi/km. Ora, trascurando τ_s rispetto a τ_c , si ha

$$R_t \simeq 1 - \frac{\tau}{\tau_c} \quad [32]$$

Se si attribuiscono a τ i valori 1; 1,5; 2 gradi/km, R_t risulta pari a circa 0,86; 0,79; 0,71 rispettivamente.

TABELLA IV

h km	τ_c gradi/km
1000	6,4
1200	6,5
1400	6,6
1600	6,8
1800	6,9
2000	7,1
2200	7,2
2400	7,4
2600	7,6
2800	7,9

Queste cifre, pur essendo puramente indicative, danno una idea della diminuzione del rapporto R_t con l'aumentare di τ .

Dall'esame della Tabella III risulta in primo luogo che il gradiente attuale τ è molto minore del gradiente critico τ_c . Anzi il valore medio di R_t induce a ritenere che il mantello interno della Terra sia, con buona approssimazione, omogeneo, in equilibrio idrostatico e adiabatico. Peraltro il procedimento di calcolo usato non consente di dare un peso determinante alla precisione dei risultati.

L'incremento adiabatico della temperatura 1000 e 2800 km di profondità è piuttosto piccolo. Dalla relazione [7] del secondo paragrafo si ha

$$\frac{T_{2800}}{T_{1000}} = e^{\gamma_1 \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2}\right)} \quad [33]$$

nella quale ρ_1 e ρ_2 indicano la densità alla profondità di 1000 e 2800 km. rispettivamente. Con i dati della Tabella II, attribuendo a γ_1 il valore 1,253, si ottiene

$$\frac{T_{2800}}{T_{1000}} = 1,235 \quad [34]$$

Questa cifra è assai prossima a quella che si può dedurre dalla Tabella III di un lavoro ⁽⁹⁾ eseguito qualche anno fa dall'Autore. Da detta Tabella risulta

$$\frac{T_{2800}}{T_{1000}} = \frac{1,62_8}{1,31_1} = 1,24 \quad [35]$$

Si può quindi concludere che se l'equilibrio del mantello interno della Terra è prossimo all'equilibrio adiabatico, come sembra mostrare

la presente ricerca, il gradiente di temperatura nel suo interno è piccolo, probabilmente pari ad alcuni decimi di grado per km, anche ammettendo che la temperatura a 1000 km di profondità sia pari a qualche migliaio di gradi.

Roma — Istituto Nazionale di Geofisica — Marzo 1954.

RIASSUNTO

Si studiano alcuni particolari dell'andamento della velocità delle onde elastiche in uno strato solido, omogeneo, in equilibrio idrostatico, che si trovi ad una temperatura superiore alle temperature caratteristiche.

Come applicazione viene tentata una verifica, per il mantello interno della Terra, delle ipotesi in base alle quali è stato costruito il modello A di K E. Bullen. La verifica fornisce, entro certi limiti, un risultato positivo.

SUMMARY

An equation is derived for the rate of change of the isothermal velocities of elastic waves, in a homogeneous gravitating layer with an arbitrary gradient of temperature. An attempt is made to test the uniformity and adiabaticity of the layer D of the Earth's mantle on the basis of this equation.

BIBLIOGRAFIA

- (1) VALLE P. E., *Una equazione di stato per i solidi*. Annali di Geofisica, 6, 183-197 (1953).
- (2) BIRCH F., *The Earth's Mantle - Elasticity and Constitution*. Trans. Am. Geophys. Union, 35, 79-85 (1954).
- (3) VERHOOGEN J., *Petrological evidence on temperature distribution in the mantle of the Earth*. Trans. Am. Geophys. Union, 35, 85-92 (1954).
- (4) BIRCH F., *Elasticity and constitution of Earth's interior*. J. Geophys. Res., 57, 227-286 (1952).

- (5) VALLE P. E., *Sulle proprietà elastiche del mantello della Terra*. Annali di Geofisica, 6, 373-380 (1953).
- (6) JEFFREYS H., *The time of P, S and SKS and the velocities of P and S*. Geophys. Suppl. 4, 498-533 (1939).
- (7) BULLEN K. E., *The problem of the Earth's density variations*. Bull. Seism. Soc. Am., 32, 19-29 (1942).
- (8) BULLEN K. E., *Introduction to the theory of Seismology*. Cambridge, University Press (1947).
- (9) VALLE P. E., *Sul gradiente adiabatico di temperatura nell'interno della Terra*. Annali di Geofisica, 5, 41-53 (1952).