CUBO 8 , 75-81 (1992)
Sexta Jornada de Matemática de la Zona Sur.

La Propiedad de Dunford-Pettis en espacios de Banach.*

Jaime Ortega P.

Diremos que una aplicación lineal $T : X \longrightarrow Y$, es completamente continua, si lleva conjuntos $\sigma(X, X')$- compactos en conjuntos compactos en norma sobre Y.

Teorema 1 *Sean X e Y de Banach y sea $T \in BL(X, Y)$, entonces son equivalentes:*
i) T es completamente continuo
ii) T lleva sucesiones $\sigma(X, X')$-convergentes en sucesiones convergentes en norma sobre Y.
iii) T lleva sucesiones $\sigma(X, X')$-Cauchy en sucesiones convergentes en norma sobre Y.

Sea $T : X \longrightarrow Y$, una aplicación lineal entre espacios de Banach, entonces T es débilmente-compacta si y sólo si $T(B_x)$ es $\sigma(Y, Y')$-relativamente-compacta.

Teorema 2 *Sean X e Y espacios de Banach y T una aplicación lineal continua de X en Y. Entonces son equivalentes:*
i) T es débilmente-compacto.
ii) $T''(X'') \subseteq Y$.
iii) T' es $\sigma(Y', Y) - \sigma(X', X'')$-continuo.
iv) Para cada sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ acotada, $\{Tx_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ posee una subsucesión $\sigma(Y, Y')$- convergente.

Teorema 3 *(Gantmacher)*
Sea X e Y espacios de Banach y sea $T : X \longrightarrow Y$ una aplicación lineal. Entonces T es débilmente compacto si y sólo si T' es débilmente compacto.

Observaciones:
Si X o Y es un espacio de Banach reflexivo, entonces cada aplicación lineal continua de X en Y es débilmente compacta.
Un espacio de Banach X es reflexivo se y sólo si la identidad de X es débilmente compacta.

Sean X e Y espacios de Banach y sea $T : X \longrightarrow Y$ una aplicación lineal. Diremos que T es casi - débilmente - compacto si y sólo si para sucesión acotada $\{x_n\}_{n\in\mathbb{C}} \subseteq X$ la sucesión $\{Tx_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq Y$ posee una subsucesión $\sigma(Y, Y')$-Cauchy

*Este trabajo es parte de la tesis con la que el autor obtuvo el grado de Magister en Ciencias con mención en Matemática, en la Universidad de Concepción.

Corolario 4 : *Si Y es $\sigma(Y,Y')$-secuencialmente-completo, entonces cada aplicación T en $M(X,Y)$ es débilmente compacta. Si Y es un espacio de Schur, entonces cada aplicación T en $M(X,Y)$ es compacta.*

Definición 5 *Un espacio de Banach X posee la Propiedad de Dunford-Pettis si para cada espacio Banach de Y, cada operador débilmente compacto de X en Y, es completamente continuo.*

Teorema 6 : *Sea X un espacio de Banach. Entonces las proposiciones siguientes son equivalentes:*

a) X posee la Propiedad de Dunford-Pettis.

b) Para cada espacio de Banach Y, cada operador débilmente compacto de X en Y, envía sucesiones $\sigma(X,X')$-convergentes en sucesiones convergentes en norma sobre Y.

c) Para cada espacio de Banach Y, cada operador débilmente compacto de X en Y, envía sucesiones $\sigma(X,X')$-Cauchy en sucesiones convergentes en norma en Y.

d) Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{x'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ son sucesiones débilmente nulas en X y X' respectivamente, entonces $\lim_{n\to\infty} x'_n(x_n) = 0$.

e) Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión $\sigma(X,X')$ -Cauchy y $\{x'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión $\sigma(X',X'')$-nula entonces $\lim_{n\to\infty} x'_n(x_n) = 0$.

f) Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión $\sigma(X,X')$-nula y $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión $\sigma(X',X'')$ -Cauchy, entonces $\lim_{n\to\infty} x_n(x_n) = 0$.

g) Para cada espacio de Banach Y, cada operador T de X en Y con adjunto casi débilmente compacto, es completamente continuo.

h) Cada operador T de X en c_0, con adjunto casi débilmente compacto, es completamente continuo.

i) Para cada espacio de Banach Y, cada operador de Y en X casi débilmente compacto, posee adjunto completamente continuo.

Corolario 7 *Sea X un espacio de Banach reflexivo, entonces:X posee la Propiedad de Dunford-Pettis si y sólo si X es de dimensión finita.*

Diremos que un espacio de Banach X posee la **Propiedad de Schur**, si cada sucesión, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \sigma(X,X')$-convergentes es convergente en norma.

Corolario 8 *Sea X un espacio de Banach, tal que X posee la Propiedad de Schur, entonces X posee la Propiedad de Dunford-Pettis.*

Corolario 9 *Si X' posee la Propiedad de Dunford-Pettis, entonces X también posee la Propiedad de Dunford-Pettis.*

Del corolario anterior se desprende que c_0 posee la propiedad de Dunford-Pettis, ya que ℓ_1 es su dual topológico y ℓ_1 posee la propiedad de Dunford-Pettis.

Corolario 10 *Sea X un espacio de Banach que posee la propiedad de Dunford-Pettis.*

Si X es de dimensión infinita, entonces X' contine un subespacio isomorfo a ℓ_1.

Diremos que un espacio de Banach X es un espacio de **Grothendieck** si cada sucesión $\sigma(X', X)$-nula es $\sigma(X', X'')$-nula.

Corolario 11 *Sea X un espacio de Grothendieck que posee la propiedad de Dunford-Pettis. Entonces X contiene un subespacio isomorfo a ℓ_1*

Corolario 12 *Sea X un espacio de Banach que posee la propiedad de Dunford-Pettis. Si Y es un subespacio complementado de X, entonces Y posee la propiedad de Dunford-Pettis.*

El recíproco del colorario 3 fue un problema abierto por, muchos años, ya que sólo se conocían casos en que los espacios y sus duales poseían la propiedad de Dunford-Pettis. Stegall mostró un ejemplo de un espacio de Banach que posee la Propiedad de Schur y por tanto la propiedad de Dunford-Pettis, pero su dual no posee dicha propiedad.

Si damos algunas hipótesis adicionales al espacio de Banach X, podremos asegurar cuando su espacio dual X' , posee la propiedad de Dunford-Pettis.

Teorema 13 *Sea X un espacio de Banach y sea X' su espacio dual. Entonces se tiene:*
X' posee la propiedad de Schur si y sólo si X posee la Propiedad de Dunford-Pettis y X no contiene copias isomorfas de ℓ_1

El Espacio de Talagrand.

Dunford y Pettis mostraron que el espacio $L_1(\mu)$ posee la Propiedad que lleva sus nombres en el año 1940, más tarde, en 1950, Grothendieck probó que para cada conjunto Ω Hausdorff compacto, el espacio $\mathcal{C}(\Omega)$ también posee la Propiedad de Dunford-Pettis.

Durante muchos años estuvo abierto el problema de que si E es un espacio de Banach cualquiera, los espacios $L_1(E)$ y $\mathcal{C}(\Omega, \mathcal{E})$ poseía la Propiedad de Dunford-Pettis, hasta que en el año 1982 Michel Talagrand, basado en el espacio de Hagler, mostró un espacio de Banach E, tal que su dual (E') es separable, posee la propiedad de Schur, pero los espacios $L_1(E')$ y $\mathcal{C}([\prime, \infty], \mathcal{E})$ no poseen la Propiedad de Dunford-Pettis.

Para comenzar daremos algunas definiciones.

Definiciones

Sea $T = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \{0,1\}^n$

i) Si $\varphi \in T$, entonces $|\varphi| = n$ para cada $\varphi \in \{0,1\}^n$.

ii) Sean $\varphi = (\varphi_1, ..., \varphi_n) \in T, \psi = (\psi_1, ..., \psi_m) \in T \varphi \leq \psi \Leftrightarrow n \leq m$ y $\varphi_i \leq \psi_i, \forall i = 1, ...n$.

Sea $x \in \mathbb{R}^T$, luego $x = \{x(\varphi)\}_{\varphi \in T}$ y definimos la siguiente norma sobre $\mathbb{R}^T$.

$$\| x \| = sup(\sum(sup \mid x(\varphi) \mid)^2)^{1/2} ...(*) n \in \mathbb{N} \mid \varphi \mid = n \varphi \leq \psi$$

Llamemos $X = \{x \in \mathbb{R}^T / \| x \| < \infty\}$, se tiene que el espacio X dotado de la norma definida en $(*)$ es un espacio de Banach.

Sea $\mathbb{R}^{(T)} = \{x = \{x(\varphi)\}_{\varphi \in T} / x(\varphi) \neq 0$ sólo en un número finito de $\varphi \in T\}$

Sea E la clausura de $\mathbb{R}^{(T)}$ con la norma definida en $(*)$. E se llamará el **Espacio de Talagrand.**

Teorema 14 *El espacio dual de E,E' posee la propiedad de Schur, así E posee la* **propiedad de Dunford-Pettis.**

Observación

Los espacios $\mathcal{C}([l,\infty],\mathcal{E})$ y $L_1(E')$ no poseen la propiedad de Dunford-Pettis.

a) El Espacio $L_1(\mu)$.

El primer ejemplo que veremos corresponde a los espacios $L_1(\mu)$, N. Dunford y B. Pettis mostraron en 1940 que todo operador lineal sobre $L_1(\mu)$ en un espacio de Banach y arbitrario, que es débilmente compacto, es completamente continuo.

La demostración dada por Dunford y Pettis se basó en la medida de Lebesgue, sobre cubos euclidianos de $\mathbb{R}^n$, pero ella es válida para una medida μ arbitraria.

b) El Espacio $\mathcal{C}(\Omega)$

Más tarde, en el año 1950, Grothendieck probó que si Ω es un espacio topológico Hausdorff compacto, entonces $\mathcal{C}(\Omega)$, el espacio de las funciones continuas definidas sobre Ω en el cuerpo, posee la propiedad de Dunford-Pettis.

c) Los Espacios de Sucesiones

De los resultados analizados a través de este resumen se obtuvo que:

i) c_0 y ℓ_1 poseen la propiedad de Dunford-Pettis.

ii) Los espacios ℓ_p, con $1 < p < \infty$, no poseen la propiedad de Dunford-Pettis. Nos resta por analizar el espacio ℓ_∞

Se probará un resultado más general

Teorema 15 *Sea Ω un conjunto y $\sum$ una σ-álgebra sobre Ω. Entonces el espacio $\beta(\sum)$ posee la propiedad de Dunforf-Pettis.*

Se puede mostrar que si $\Omega = \mathbb{N}$ y $\sum = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ entonces $\beta(\sum) \cong \ell_\infty$, de donde tenemos que ℓ_∞ posee la propiedad de Dunford-Pettis.

Otra pregunta lógica es si X es un espacio de Banach que posee la propiedad de Dunford-Pettis e Y es un subespacio cerrado de X, entonces bajo que condiciones el espacio cuociente X/Y posee la propiedad de Dunford-Pettis.

Lema 16 *Si Y es un subespacio cerrado de X que no contiene a ℓ_1. Entonces cada sucesión $\sigma(X/Y,(X/Y)')$-Cauchy tiene una subsucesión que es la imagen de una sucesión $\sigma(X,X')$-Cauchy, bajo la sobreyección canónica de X en X/Y, $i : X \longrightarrow X/Y$ donde $i(x) = x + Y$, para cada $x \in \mathbb{N}$*

Teorema 17 *(Propiedad de los tres espacios)*
Sea X un espacio de Banach. Entonces son equivalentes. a) X no contiene a ℓ_1
b) Para cada subespacio cerrado Y de X se tiene que Y no contiene a ℓ_1 y X/Y no contiene a ℓ_1
c) Existe un subespacio cerrado Y de X tal que Y no contiene a ℓ_1 y X/Y no contiene a ℓ_1.

Teorema 18 *Sea X un espacio de Banach que posee la propiedad de Dunford-Pettis. Si Y es un subespacio cerrado de X, que no contiene a ℓ_1, entonces el espacio cuociente X/Y posee la propiedad de Dunford-Pettis.*

Corolario 19 *Sea X un espacio de Banach*
Si X' es un espacio de Schur, entonces para cada subespacio cerrado Y de X se tiene que $(X/Y)'$ posee la propiedad de Schur y por tanto X/Y posee la propiedad de Dunford-Pettis.

Corolario 20 *Sea X un espacio de Banach tal que X' posea la propiedad de Dunford-Pettis.*
Sea Y un subespacio cerrado de X tal que $Y^{\perp}$, el ortogonal de Y, no contiene a ℓ_1 entonces Y' posee la propiedad de Dunford-Pettis.

Corolario 21 *Sea X un subespacio reflexivo de $L_1(\mu)$, entonces $L_1(\mu)/X$ posee la propiedad de Dunford-Pettis.*

Su demostración se obtiene del hecho que si X es un subespacio cerrado de $L_1(\mu)$, entonces X es reflexivo si y sólo si X no contiene a ℓ_1. La prueba de este resultado se debe a M. Kadec y A. Pelczynski y data del año 1962.

Teorema 22 *Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ espacios de Banach, entonces se tiene que: $\prod_{i=1}^{n} X_i$ posee la propiedad de Dunford-Pettis si y sólo si X_i posee la propiedad de Dunford-Pettis para cada $i = \overline{1,n}$.*

El lema anterior nos asegura que la propiedad de Dunford-Pettis se preserva bajo productos finitos de espacios de Banach. En el caso de productos infinitos de espacios de Banach la respuesta es negativa, para esto estudiaremos los espacios producto $(\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \oplus E_n)_p$

En lo que sigue $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ será una sucesión de espacios de Banach y $(E_n')_{n\in\mathbb{N}}$ será la sucesión de los espacios duales.

Se llama **espacio suma directa de $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en el sentido de ℓ_p** con $1 \leq p < \infty$, denotado por $(\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \oplus E_n)_p$, al espacio de sucesiones $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tales que $x_n \in E_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \| x_n \|^p < \infty$, dotado de la norma:

$$\| \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \|_p = (\sum_{n\in\mathbb{N}} \| x_n \|^p)^{1/p}$$

Además se definen los espacios suma directa de $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de c_0 (respectivamente ℓ_∞), denotado por $(\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \oplus E_n)_0$ (respectivamente $(\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \oplus E_n)_\infty$), al espacio de sucesiones $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tales que $x_n \in E_n$ para $n \in \mathbb{N}$ y $\| x_n \| \xrightarrow{n\to\infty} 0$ (respectivamente $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \| x_n \| < \infty$), dotados de la norma.

$$\| \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} \| x_n \| .$$

No es difícil notar que los espacios definidos anteriormente son espacios de Banach.

Lema 23 *a) Sean $1 < p, q < \infty$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, entonces:*

$$((\sum_{n\in\mathbb{N}} \oplus E_n)_p)' = (\sum_{n\in\mathbb{N}} \oplus E_n')_q$$

b) $((\sum_{n\in\mathbb{N}} \oplus E_n)_o)' = (\sum_{n\in\mathbb{N}} \oplus E_n')_1$

c) $((\sum_{n\in\mathbb{N}} \oplus E_n)_1)' = (\sum_{n\in\mathbb{N}} \oplus E_n') - \infty$

Corolario 24 *$(\sum_{n\in\mathbb{N}} \oplus E_n)_1$ es un espacio de Schur si y sólo si E_n es un espacio de Schur para cada $n \in \mathbb{N}$*

A continuación estudiaremos la propiedad de Dunford-Pettis en los espacios productos.

Se define $(\sum_{n\in\mathbb{N}} \oplus E_n)_{oo}$ como el espacio formado por todas las sucesiones $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \in (\sum_{n\in\mathbb{N}} \oplus E_n)_{\infty}$ tales que $x_n \neq 0 \in E_n$ sólo en un número finito de índices.

Notemos que $\overline{(\sum_{n\in\mathbb{N}} \oplus E_n)\ oo} = (\sum_{n\in\mathbb{N}} \oplus E_n)_o$, es decir $(\sum_{n\in\mathbb{N}} \oplus E_n)_{oo}$ es denso en $(\sum_{n\in\mathbb{N}} \oplus E_n)_o$

Teorema 25 *$(\sum_{n\in\mathbb{N}} \oplus E_n)_o$ posee la propiedad de Dunford-Pettis si y sólo si E_n posee la propiedad de Dunford-Pettis para cada $n \in \mathbb{N}$*

Teorema 26 *$(\sum_{n\in\mathbb{N}} \oplus E_n)_1$ posee la propiedad de Dunford-Pettis si y sólo si E_n posee la propiedad de Dunford-Pettis para cada $n \in \mathbb{N}$*

Teorema 27 *Si $1 < p < \infty$, entonces $(\sum_{n\in\mathbb{N}} \oplus E_n)_p$ no posee la propiedad de Dunford-Pettis*

En un resultado anterior se mostró que si un espacio dual X' posee la propiedad de Dunford-Pettis, entonces el espacio X posee la propiedad de Dunford-Pettis.

El recíproco de esta propiedad fue un problema abierto durante muchos años, la respuesta la dió Charles Stegall (1975), mostrando un espacio de Banach que posee la propiedad de Schur y para el cual su espacio dual no posee la Propiedad de Dunford-Pettis. A continuación mostraremos un contraejemplo de Stegall dado por Charles Stegall.

Sea $X = (\sum_{n\in\mathbb{N}} \oplus \ell_2^n)_1$, donde ℓ_2^n corresponde al espacio $\mathbb{R}^n$ dotado de la norma $\|\|_2$

Dado que ℓ_2^n es un espacio de Schur para cada $n \in \mathbb{N}$, de un colorario anterior obtenemos que X es un espacio de Schur, por tanto X posee la propiedad de Dunford-Pettis, además como $(\ell_2^n)' = \ell_2^n$ del lema 2 tenemos que $X' = (\sum_{n\in\mathbb{N}} \oplus \ell_2^n)_\infty$

Definamos la aplicación $T : (\sum_{n\in\mathbb{N}} \oplus \ell_2^n)_1 \longrightarrow \ell_2$ donde para cada $x \in (\sum_{n\in\mathbb{N}} \oplus \ell_2^n)_1$ $x =((y_1^1), (y_1^2, y_2^2), (y_1^3, y_2^3, y_3^3), \ldots, (y_1^n, \ldots, y_n^n), \ldots)$ se tiene $T(x)=(y_1^1 + y_1^2 + \cdots, y_2^2 +$

$y_2^3+...,..., y_n^n+y_n^{n+1}+...)$ tiene que T es una aplicación lineal y continua de $(\sum_{n\in\mathbb{N}} \oplus\ell_2^n)_1$ en ℓ_2.

Notemos además el rango de T' es completado en $X' = (\sum_{n\in\mathbb{N}} \oplus\ell_2^n)_\infty$.

Veamos ahora que ℓ_2 es isométricamente isomorfo a $T'(Y')$. En efecto: $T'(\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}) = ((x_1), (x_1, x_2), (x_1, x_2, x_3), ..., (x_1,...,x_n),...)$ y notemos que para cada $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \in \ell_2$

$$\| T'(\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}) \|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} \| (x_1, ..., x_n) \| = \| \{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \| \ell_2$$

lo cual prueba que T' es una isometría entre ℓ_2 y $T'(\ell_2)$.

Notemos que $(\sum_{n\in\mathbb{N}} \oplus\ell_2^n)\infty$ no posee la propiedad de Dunford-Pettis.

En efecto, si $(\sum_{n\in\mathbb{N}} \oplus\ell_2^n)\infty$ posee la propiedad de Dunford-Pettis, entonces $T'(\ell_2)$ también la posee, pues es un subespacio complementado de $(\sum_{n\in\mathbb{N}} \oplus\ell_2^n)_\infty$, pero como ℓ_2 es isométricamente isomorfo a $T'(\ell_2)$ y ℓ_2 es un Hilbert, se concluye que $T'(\ell_2)$ no posee la propiedad de Dunford-Pettis. Lo que prueba que $(\sum_{n\in\mathbb{C}} \oplus\ell_2^n)_\infty = ((\sum_{n\in\mathbb{N}} \oplus\ell_2^n)_1)'$ no posee la propiedad de Dunford-Pettis.

Referencias

[1] Diestel J., *A survey of results related to the Dunford- Pettis Property*, Contempory Mathematics **2** **15-61** **(1980)**.

[2] Grothendieck A., *Sur les applications lineaires faiblement compactes d'espaces du type C(K)*,Canad. J. Math. **5** **129-173** **(1953)**.

[3] Ortega J., *La propiedad de Dunford-Pettis en espacios de Banach. Tesis Magister en Ciencias con mención en Matemática, Universidad de Concepción* **(1991)**.

Dirección del autor:
Departamento de Matemática
Universidad del Bío Bío
Concepción.