CUBO 8 , 83-85 (1992)
Sexta Jornada de Matemática de la Zona Sur.

Análisis armónico sobre $Sl(2,\Omega)$, Ω cuerpo p-ádico $(p \neq 2)$.

Roberto Riquelme Sepúlveda

1 Resumen.

Sea Ω una extensión finito dimensional de $\mathbb{Q}_p$. Trabajando en la construcción de las representaciones de $Sl(2,\mathcal{O})$, donde $\mathcal{O}$ es el anillo de enteros de Ω, tema que constituye mi trabajo de tesis de Magister, fue necesario analizar la construción de representacionesunitarias de $Sl(2,\Omega)$. En esta comunicación expondré los resultadosbásicos en que se apoya esta construcción:
- Transformada aditiva de Fourier y propiedades.
- Representación multivaluadas de $Sl(2,\Omega)$.
- La representación unitaria $D(\phi, V)$, ϕ carácter no trivial de Ω^+, V extensión cuadrática de Ω, su construcción y análisis de continuidad.

2 Introducción.

Sean G un grupo, H un espacio de Hilbert, U el grupo de operadores unitarios sobre $H, \mathbb{C}^1 = \{x \in \mathbb{C} : |x| = 1\}, \mathbb{C} = \{\lambda I : I$ es la identidad sobre $H, \lambda \in \mathbb{C}^1\}$.

Definición 2.1 *a) Por una representación proyectiva de G entenderemos a un homomorfismo P de G en $U/\mathbb{C}$.*

b) $Sl(2,\Omega) = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\Omega) : ad - bc = 1\}$ *donde Ω es un grupo p-ádico con $p \neq 2$*

Observación. Denotaremos por Ω^* el grupo multiplicativo formado por los elementos no nulos de Ω.

Teorema 2.2 *$G = Sl(2,\Omega)$ es generado por elementos de la forma $u(b) = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ para b en Ω y el elemento $w = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Además para b en Ω^* si nosotros ponemos $s(b) = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b^{-1} \end{pmatrix} = wu(b^{-1})wu(b)wu(b^{-1})$ entonces las relaciones entre $u(b)$ y w están dadas por:*

i) $w^2 = s(-1)$.
ii) $u(b)\ u(b^{-1}) = u(b + b^{-1})$ *para* b *y* b^{-1} *en* Ω
iii) $s(a)s(a') = s(aa')$ *para* a *y* a' *en* Ω^*
iv) $s(a)u(b)s(a^{-1}) = u(ba^2)$ *para* $n \in \Omega$ *y* $a \in \Omega^*$.

La transformada aditiva de Fourier.

El grupo Ω^+ es su propio dual, es decir , para x en Ω y algún carácter no trivial ϕ de Ω^+ denotemos por ϕ_x el carácter definido por $\phi_x(y) = \phi(xy)$, entonces la aplicación $x \longrightarrow \phi_x$ define un isomorfismo de Ω^+ con su grupo dual.

Definamos la transformada de Fourier de un elemento h en $L^2(\Omega^+)$ por la integral

$$\hat{h}(x) = \int h(y)\phi(2xy)dy$$

que está definida para funciones continuas h de soporte compacto sobre Ω^+ y extendido por continuidad a $L^2(\Omega^+)$.

Si normalizamos la medida μ tal que $\mu(O_{\mathbb{P}}) = q^{\frac{w(\phi)}{2}}$ donde $w(\phi)$ es el conductor de ϕ y q es el orden de la clase residual, entonces se verifica que $\hat{\hat{f}}(x) = f(-x)$. Denotemos esta medida normalizada por $d_\phi x$.

Si a está en Ω^* y x en Ω^+, entonces $d_\phi(ax) =\mid a \mid d_\phi x$.

Lema 2.3 *Si* ϕ *es un carácter no trivial de* Ω^+, *entonces el límite* $H(\phi) = \lim_{m \to -\infty} \int_{\mathbb{P}^m} \phi(x^2)d_\phi x$ *existe y es igual a 1 si* $w = w(\phi)$ *es par y es igual a* $G(\phi) = (\sqrt{q})^{-1} \sum_{t \bmod \mathbb{P}} \phi(\pi^{w-1}t^2)$ *si* $w = w(\phi)$ *es impar.*

Corolario 2.4 *Para* b *en* Ω^* *de la forma* $\eta\pi^{w(\phi)}$ *con* η *en* $O_{\mathbb{P}^*}$ *el límite* $H(\phi, b) = \lim_{m \to -\infty} \int_{\mathbb{P}^m} \phi(bx^2)d_\phi x$ *existe y es igual a* $q^{\frac{w(b)}{2}}$ *si* $w(\phi) - w(b)$ *es par y es igual a* $q^{\frac{w(b)}{2}}G(\phi_\eta)$ *si* $w(\phi) - w(b)$ *es impar. (Considerar el carácter* $\eta(x) = \phi b(x)$*).*

Construcción de representaciones unitarias de $Sl(2, \Omega)$.

Sea V un espacio vectorial topológico de dimensión finita sobre Ω provisto de una forma cuadrática no degenerada Q.

Resultados análogos a los de $H(\phi)$ se pueden obtener para $H(\phi, Q)$ y $H(\phi, a, Q)$.

Teorema 2.5 *Sea* V *un espacio vectorial sobre* Ω. *Para* h *en* $h_V(= L^2(V^+))$ *y para cada carácter no trivial* ϕ *de* Ω^+ *sea* $T_w = H(\phi, Q)\hat{h}$ *y para* b *en* Ω $M_b h = f_b$, *(donde* $f_b(x) = (bQ(x))$*). Entonces las aplicaciones* $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow T_w$ *y* $\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow M_b$ *pueden ser extendidas a una representación proyectiva de* $Sl(2, \Omega)$.

Denotemos a esta representación por $D(\phi, V)$. Supongamos que $dim_{\Omega} V = 2m$. Para h en h_v y a en Ω^* escribamos $(U_a h)(x) = \mid a \mid^m h(ax)$. Entonces $a \longrightarrow U_a$ es una representación unitaria de Ω^*. De aquí se tiene que si

$$(U_a' h)(x) = H(\phi, a, Q)[(\phi, Q]^{-1} \mid a \mid^m h(ax)$$

entonces $a \rightarrow U_a'$ es una representación unitaria de Ω^*. Además se puede ver que $a \rightarrow H(\phi, a, Q)[H(\Omega, Q]^{-1} \mid a \mid^m$ define un carácter de Ω^*. Denotemos este carácter por sign. Si U_g denota el operador unitario sobre h_v corresponde al elemento $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ en $Sl(2, \Omega)$ bajo la representación $D(\phi, V)$, entonces se puede ver que: $(U_g h)(x) = \int K(g; x, y) h(y) d_\phi y$ donde para c en Ω^* :
$K(g; x, y) = sign(-1) H(\phi, Q) \frac{signc}{|c|^m} \phi[\frac{aQ(x) + dQ(y) - B(x,y)}{c}]$ y para $c = 0$:
$K(g, x, y) = \mid a \mid^m sign(a) \phi(baQ(x)) \triangle(ax - y)$. $\triangle$ denota la función Delta de Dirac.

Teorema 2.6 *La representación $D(\phi, V)$ es continua.*

Teorema 2.7 *Sea C el algebra (con la topología débil) de todos los operadores acotados sobre h_v que conmutan con $D(\phi, V)$. Entonces existe un homomorfismo continuo del grupo $L^1(A)$ de A en C (donde A es el grupo ortogonal de la forma cuadrática Q).*

Dirección del autor:
Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias
Universidad de Concepción.