

## Series de Fourier y fenómeno de Gibbs

Roberto Rodríguez del Río y Enrique Zuazua

Departamento de Matemática Aplicada

Universidad Complutense Madrid

28040 Madrid, España

e-mail: rr\_delrio@mat.ucm.es; zuazua@eucmax.sim.ucm.es

### ABSTRACT

En este trabajo describimos la génesis de las series de Fourier a través de los trabajos pioneros de finales del siglo XVIII y principios del XIX en la resolución de dos de las Ecuaciones en Derivadas Parciales (EDP) más importantes: la ecuación de ondas y la del calor. Las series de Fourier han generado un gran número de trabajos de investigación y han dado nombre a una de las áreas más importantes del Análisis Matemático, el *Análisis de Fourier* o *Análisis Armónico*. Son muchas las cuestiones matemáticas básicas y atractivas que las series de Fourier plantean. Entre ellas cabe destacar el *fenómeno de Gibbs*, a cuyo análisis dedicamos parte de este trabajo. Por último, como apoyo a la lectura del artículo, se describen varios programas para el asistente matemático MATLAB que permiten estudiar gráficamente estas cuestiones.

### 1 Introducción

En cualquier curso introductorio de Ecuaciones en Derivadas Parciales (EDP) siempre podemos encontrar dos importantes ejemplos: la *ecuación de ondas* que, en su versión más elemental, describe las vibraciones de una cuerda fija en dos extremos y; la *ecuación del calor* que describe cómo fluctúa el calor a lo largo del tiempo a través de un sólido. Sin embargo, no siempre se pone de manifiesto la importancia e influencia reales que estos dos problemas han tenido en el desarrollo posterior de técnicas y teorías, que han enriquecido, y

lo siguen haciendo hoy en día, a la Matemática y sus aplicaciones. Entre estas, cabe citar el desarrollo de las *series trigonométricas* y el *Análisis de Fourier*, que iremos estudiando, en parte, a lo largo del artículo.

El trabajo está estructurado de la forma siguiente:

En la sección 2, se ha hecho un pequeño recorrido histórico de la génesis del Análisis de Fourier, a partir de los primeros estudios relacionados con los intentos de resolver el *problema de la cuerda vibrante* hasta llegar al *fenómeno de Gibbs*.

En la sección 3, se analizan los dos problemas clásicos de Ecuaciones en Derivadas Parciales que dieron lugar al *Análisis de Fourier*: la ecuación de *ondas* y la del *calor*.

En la sección 4, se estudian algunos aspectos clásicos del *fenómeno de Gibbs*.

Por último, en la sección 5, se incluyen los códigos de algunos programas realizados en MATLAB para la elaboración de las gráficas que aparecen en el artículo, con una intención claramente didáctica.

Respecto de la bibliografía, aunque no se ha pretendido que sea exhaustiva, sí que se ha incluido una importante cantidad de las referencias históricas originales, de manera que el lector interesado, pueda recorrer por sí mismo los pasos seguidos por los protagonistas del desarrollo de las cuestiones matemáticas mencionadas aquí.

## 2 Notas históricas

### 2.1 Los precursores

Una *serie trigonométrica* es una expresión de la forma

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)] \quad (2.1)$$

donde  $a_k$  y  $b_k$  con  $k = 0, 1, 2, \dots$  son constantes. Si tal serie converge para todo  $x$  tal que  $-\infty < x < +\infty$ , en algún sentido que precisaremos más adelante, entonces representará una función periódica de período  $2\pi$  y bastará por tanto estudiar su restricción al intervalo  $[-\pi, \pi]$

La cuestión de si una función arbitraria  $f(x)$  (con  $x \in [-\pi, \pi]$ ), puede expresarse como una expansión del tipo (2.1) aparece a mediados del siglo XVIII asociada a los estudios de L. Euler (1701-1783) y de D. Bernouilli (1700-1782) sobre el problema de la *cuerda vibrante*, comentado en el apartado 3.1.

Bernouilli llega al punto de plantearse la solución del problema de la cuerda vibrante en forma de serie trigonométrica a partir de consideraciones de tipo físico, que le llevan a pensar que la cuerda oscila involucrando varias frecuencias al mismo tiempo, cuyas amplitudes respectivas dependen de la forma inicial de la vibración, es decir, del modo en que se haya empezado a mover la cuerda. Esta posibilidad, descubierta por Bernouilli, es lo que hoy llamamos *principio de superposición* y ha resultado ser un principio de gran importancia en muchas ramas de la Física matemática.

Sin embargo, Euler entiende que esta idea de Bernouilli lleva a un resultado aparentemente paradójico, de acuerdo con algunos conceptos matemáticos de su tiempo. A saber, el hecho de que una función "arbitraria" pueda ser expresada en forma de serie trigonométrica. Hay que tener en cuenta, que para los matemáticos contemporáneos de Euler, las curvas se dividían en dos clases: curvas "continuas" y curvas "geométricas". En contraste con la terminología adoptada hoy en día, una curva se decía "continua" si sus ordenadas y sus abscisas podían conectarse mediante alguna fórmula  $y = f(x)$ . Por otra parte una curva se denominaba "geométrica" si podía dibujarse de alguna forma con trazos continuos o discontinuos. Pensaban por tanto, que la segunda categoría de curvas era más amplia que la primera, ya que lo que nosotros denominamos como una función continua a trozos, puede dibujarse, pero no puede expresarse si no es con varias fórmulas (sobre el desarrollo del concepto de función, puede consultarse [Lu].) Así, si una función "arbitraria" podía expresarse, por ejemplo, como una *serie de senos* (es decir, como (2.1), pero con  $a_k = 0$  para  $k = 0, 1, 2, \dots$ ), esto significaría que cualquier curva "geométrica" sería también una curva "continua", lo cual, para Euler y sus contemporáneos, era simplemente increíble.

Por otra parte, para contribuir más aún a este debate, la solución al problema de la cuerda vibrante de Bernouilli compite con otra aportada por J.R. d'Alembert (1717-1783) en forma de una onda que avanza y otra que retrocede, que se determinan a partir de la posición y velocidad iniciales de la cuerda. En particular, d'Alembert consideraba que la manera más natural de hacer que una cuerda empezase a vibrar era desplazarla de su posición de equilibrio tirando de algún punto de ella. Esto hace que su posición inicial se pueda representar mediante dos rectas que forman un determinado ángulo (ver figura 1). Para d'Alembert la naturaleza de esta curva hacía imposible pensar en que pudiese expresarse como una serie trigonométrica, ya que se trata, como se ha comentado más arriba, de una curva "geométrica", mientras que la serie trigonométrica sería una curva "continua".

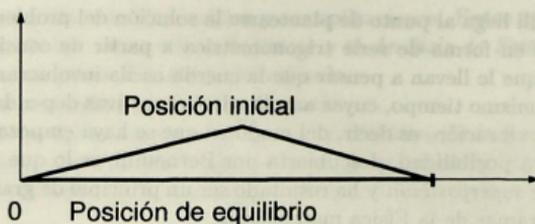


Figura 1: Posición inicial natural según d'Alembert

## 2.2 Jean Baptiste Joseph Fourier

La chaleur pénètre, comme la gravité, toutes les substances de l'univers, ses rayons occupent toutes les parties de l'espace. Le but de notre ouvrage est d'exposer les lois mathématiques que suit cet élément. Cette théorie formera désormais une des branches importantes de la physique générale.

*Théorie analytique de la chaleur*  
Discours préliminaire. Joseph Fourier



Figura 2: Barón Jean Baptiste Joseph Fourier

El problema de si una función cualquiera puede representarse mediante una serie trigonométrica reaparece más tarde con el matemático francés J. Fourier (1768-1830).

En una memorable sesión de la Academia Francesa de las Ciencias, el día 21 de diciembre de 1807, Fourier presentaba un trabajo que iba a abrir un nuevo

capítulo en la historia de la matemática: la creación del *Análisis Armónico* o, como también se le conoce a partir de sus trabajos, el *Análisis de Fourier*.

Fourier había deducido una ecuación que describía la conducción del calor a través de los cuerpos sólidos, la *ecuación del calor* (que analizaremos en el apartado 3.2). Pero no sólo la había deducido, sino que había desarrollado un método para resolverla, el *método de separación de variables*, procedimiento que, en cierto modo, había sido utilizado ya por Bernouilli para su solución, aunque es Fourier quien lo empieza a usar de una manera sistemática en la resolución de Ecuaciones en Derivadas Parciales. La aplicación de la técnica de separación de variables a la ecuación del calor, le condujo a escribir la solución en forma de serie trigonométrica, e incluso llegar a afirmar que cualquier función  $f(x)$ , periódica de periodo  $2\pi$  se puede poner como una serie de la forma (2.1). Y, para ello, incluso encontró las *fórmulas (de Fourier)* que permiten calcular los coeficientes de la serie asociada a la función

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.2)$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.3)$$

Aunque la representación de una función en serie trigonométrica se había considerado antes de Fourier, como hemos visto en el apartado 2.1, nadie antes que Fourier puso de manifiesto la correspondencia entre función y coeficientes.

Sin embargo, tampoco el trabajo de Fourier fue aceptado a la primera, máxime teniendo como parte del auditorio a matemáticos como J.L. Lagrange (1736-1813), P.S. Laplace (1749-1827) y A.M. Legendre (1752-1833), que criticaron abiertamente la falta de rigor del tratamiento de Fourier. De hecho, Fourier tuvo que rehacer su trabajo ya que su memoria no fue aceptada en un primer momento. No obstante, finalmente sus ideas fueron aceptadas y fueron expuestas, años después, en su obra de 1822, *Théorie analytique de la chaleur* ([Fo]).

Hay que añadir que el estudio de las series de Fourier contribuyó de manera decisiva a clarificar la idea de función hasta el moderno concepto de nuestros días. Todo este tratamiento posterior está asociado a nombres tales como P.G.L. Dirichlet (1805-1859), B. Riemann (1826-1866), G. Cantor (1845-1918) y H. Lebesgue (1875-1941). Para consultar el desarrollo histórico posterior de las series de Fourier, hasta las aplicaciones recientes, puede consultarse la referencia [Du].

### 2.3 Una protuberancia rompe la armonía

Una de las muchas derivaciones interesantes, aunque desde luego no la más importante, a que ha dado lugar el *análisis de Fourier*, es el llamado *fenómeno de Gibbs*, que surge a mediados del siglo XIX. A él dedicaremos la sección 4. Aquí sólo vamos a mencionar algunas anotaciones históricas de este “rincón del Análisis Armónico”, (según palabras de E. Hewitt y R.E. Hewitt, [HH]).

H. Wilbraham observó en 1848 ([W]) que, en puntos cercanos a una discontinuidad de una función  $f$ , las sumas parciales de la serie de Fourier de  $f$  presentaban un comportamiento oscilatorio anómalo que hacía que las gráficas de las sumas parciales excedieran en aproximadamente el 9% del valor del salto de la discontinuidad. Este trabajo de Wilbraham cayó en el olvido, hasta que hacia 1898 volvió a reaparecer en un contexto distinto. Fue de mano del Premio Nobel en Física (1907) A. Michelson, científico norteamericano, inventor y constructor de numerosos instrumentos físicos de gran precisión. Michelson construyó un aparato llamado *analizador armónico* que permitía, mecánicamente, determinar hasta los 80 primeros componentes de la serie de Fourier, a partir de la gráfica de una función  $y = f(x)$ . Michelson observó que para una función de tipo salto, en las cercanías del punto de discontinuidad, aparecía una extraña protuberancia que no aparecía en la función original. En un principio creyó que podía deberse a un defecto mecánico del aparato. Una vez verificado que podía no ser así, escribe al físico-matemático J.W. Gibbs, que investigó y explicó el fenómeno ([G]) basándose en la no convergencia uniforme de la serie de Fourier en las cercanías de un punto de discontinuidad.

Para tener una visión más completa de todos los avatares históricos concernientes a esta singular página de la Historia de las Matemáticas, incluidas disputas y controversias sobre la prioridad del descubrimiento, pueden consultarse las referencias [Go] y [HH].

Este fenómeno, que se conoce como *fenómeno de Gibbs* (o *fenómeno de Gibbs-Wilbraham*), tiene consecuencias físicas interesantes. Por ejemplo, en el caso de circuitos eléctricos en los que, por medio de un conmutador, se pueden crear saltos de voltage. Dado que este voltage puede sobrepasar lo inicialmente previsto, resulta importante conocer esta desviación en relación con la respuesta de los componentes del circuito.

### 3 Ondas y calor

#### 3.1 El problema de la cuerda vibrante

Consideremos la ecuación de ondas

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & 0 < x < L, \quad t > 0 \\ u(0, t) = u(L, t) = 0, & t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), u_t(x, 0) = 0, & 0 < x < L. \end{cases} \quad (3.4)$$

El sistema (3.4) es un modelo simple para el análisis de las *vibraciones de una cuerda* de longitud  $L$  (que ocupa el intervalo espacial  $x \in (0, L)$ ) y que está fija en sus extremos  $x = 0, L$ . La incógnita  $u = u(x, t)$ , que depende del espacio  $x$  y del tiempo  $t$ , denota la altura a la que se encuentra el punto  $x$  de la cuerda (del intervalo  $(0, L)$ ), en el instante de tiempo  $t$  (ver figura 3). Se trata de una ecuación en derivadas parciales de orden dos, complementada por dos condiciones de contorno que reflejan el que la cuerda esté fija en sus extremos. Para ver su derivación a partir de las correspondientes consideraciones físicas se puede consultar [St].

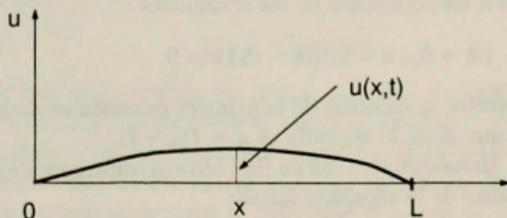


Figura 3: Cuerda

En la última ecuación de (3.4) se establecen las *condiciones iniciales* que la solución ha de satisfacer en el instante  $t = 0$ . Al tratarse de una ecuación de segundo orden en tiempo imponemos tanto la configuración inicial de  $u$ ,  $u_0$ , como la velocidad  $u_t(x, 0) = 0$ , condición ésta que expresa el hecho de que la cuerda se encuentra en reposo antes de soltarla. Sin embargo, en otras situaciones, puede tener sentido dar un valor  $u_1(x)$  para la velocidad inicial, con lo que la condición quedaría  $u_t(x, 0) = u_1(x)$ .

Mediante  $u_t$  (resp.  $u_x$ ) denotamos la derivada parcial de  $u$  con respecto a  $t$  (resp.  $x$ ). De este modo,  $u_{tt}$  representa la derivada parcial de orden dos de  $u$  con respecto de  $t$  dos veces. Más adelante también utilizaremos la notación

$\partial_t$  (resp.  $\partial_x$ ) para denotar el operador de derivación parcial con respecto a  $t$  (resp.  $x$ ). Asimismo  $\partial_t^2$  (resp.  $\partial_x^2$ ), denotará el operador de derivación parcial con respecto a  $t$  (resp.  $x$ ) dos veces.

Como hemos indicado en el apartado 2.1, en 1747 d'Alembert ([D1],[D2]) propuso la siguiente expresión para la solución general de la ecuación de ondas sin condiciones de contorno

$$u(x, t) = f(x + t) + g(x - t). \quad (3.5)$$

Conviene observar que la expresión de la solución  $u$  que (3.5) proporciona no es más que la superposición de dos *ondas de transporte*:  $f(x + t)$  que se desplaza sin deformarse a velocidad 1 en la dirección negativa del eje de las  $x$ , mientras que  $g(x - t)$  lo hace hacia la derecha. No es difícil comprobar que (3.5) proporciona la expresión de la solución general de la ecuación de ondas. En efecto, basta observar que el operador diferencial  $\partial_t^2 - \partial_x^2$  involucrado en la ecuación de ondas se puede factorizar como

$$\partial_t^2 - \partial_x^2 = (\partial_t + \partial_x)(\partial_t - \partial_x). \quad (3.6)$$

Vemos entonces que las dos ondas de transporte en las que se descompone la solución, corresponden a las soluciones de las ecuaciones

$$(\partial_t + \partial_x)u = 0; (\partial_t - \partial_x)u = 0 \quad (3.7)$$

respectivamente. En efecto, la solución de la primera ecuación es de la forma  $u = g(x - t)$  mientras que la de la segunda es  $u = f(x + t)$ .

Posteriormente, D. Bernouilli en 1753 en [Be] obtuvo soluciones de la ecuación de la cuerda vibrante de la siguiente forma:

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cos\left(\frac{k\pi}{L}t\right) \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right). \quad (3.8)$$

Si la longitud de la cuerda fuese  $L = \pi$ , las soluciones quedarían

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cos(kt) \sin(kx). \quad (3.9)$$

Bernouilli había llegado a esta solución *superponiendo* soluciones de la forma

$$u_k = b_k \cos(kt) \sin(kx). \quad (3.10)$$

Un simple cálculo permite comprobar que la función definida en (3.10) es solución de (3.4). Obviamente, en la época de D. Bernouilli el concepto de serie

de funciones, o incluso el propio concepto de función, no estaban aun bien definidos, por lo que en este punto la serie (3.9) ha de ser interpretada de manera forma. Sin embargo, hemos querido constatar que D. Bernouilli entendió que la superposición de soluciones de base como (3.10) permite construir clases más generales de soluciones de (3.4).

Una primera cuestión importante que se plantea de manera natural es la coincidencia de expresiones del tipo (3.5) y (3.9). Efectivamente, en la medida en que para datos iniciales fijados (posición y velocidad inicial de la cuerda) la solución de (3.4) es única, y si las dos representaciones (3.5) y (3.9) son válidas, ambas han de coincidir.

Esto es efectivamente así. Consideremos uno de los términos involucrados en (3.9). Es decir, una solución de la forma  $\cos(kt) \sin(kx)$ . Utilizando las fórmulas trigonométricas habituales vemos que

$$\begin{aligned} \cos(kt) \sin(kx) &= \frac{1}{2} [\sin(k(x+t)) + \sin(k(x-t))] \\ &= \frac{1}{2} [f_k(x+t) + f_k(x-t)] \end{aligned}$$

donde

$$f_k(z) = \sin(kz).$$

Tratando de un modo análogo los demás términos de (3.9) vemos que, efectivamente, la función desarrollada en series de Fourier (3.9) puede ser escrita en la forma (3.5) como superposición de dos ondas de transporte.

Esta simple observación ilustra el modo en que en un desarrollo en serie de Fourier puede detectarse la velocidad a la que se propaga la función representada por dicha serie. Efectivamente, tal y como mencionábamos anteriormente, como se desprende de la fórmula de d'Alembert (3.5), la velocidad de propagación en el modelo (3.4) es 1. Esto puede observarse también en el desarrollo en serie de Fourier (3.8) por el simple hecho de que a una oscilación espacial  $\sin(kx)$  le corresponda una respuesta temporal de la forma  $b_k \cos(kt)$ .

Se observa asimismo que en la ecuación de ondas considerada hay una ausencia de *dispersión*, entendiendo por dispersión el fenómeno según el cual los diferentes componentes de Fourier se propagan a velocidades distintas, tal y como ocurre en el clásico modelo de Korteweg-de Vries [K] para el avance de las olas o en la ecuación de Schrödinger.

Evidentemente, los efectos dispersivos hacen que la forma de la solución cambie completamente en el tiempo.

Para convencerse de ésto basta considerar la ecuación de KdV linealizada:

$$u_t + u_{xxx} = 0.$$

En este caso, si el dato inicial es de la forma

$$u(x, 0) = \sum_{k \geq 1} a_k e^{ik\pi x} \quad (3.11)$$

la solución correspondiente es

$$u = \sum_{k \geq 1} a_k e^{ik^3 \pi^3 t} e^{ik\pi x}. \quad (3.12)$$

Observamos entonces que las diferentes componentes de Fourier de la solución son de la forma  $e^{ik^3 \pi^3 t} e^{ik\pi x} = f_k(k^2 \pi^2 t + x)$  con  $f_k(z) = e^{ik\pi z}$ . Por lo tanto, cada componente de Fourier se propaga a una velocidad distinta  $-k^2 \pi^2$ .

### 3.2 El problema de la difusión del calor

Como hemos mencionado en el apartado 2.2, Fourier analizó el problema de la difusión del calor en su tratado clásico de 1822, ([Fo]), llegando a establecer, a partir de principios físicos, la ecuación general que debía satisfacer la temperatura  $u$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \quad (3.13)$$

que es la ecuación (*tridimensional*) del calor.

La ecuación (*unidimensional*) del calor (cuya derivación se puede ver en [Si], pp. 324-325) es

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & 0 < x < L, \quad t > 0 \\ u(0, t) = u(L, t) = 0, & t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x) & 0 < x < L. \end{cases} \quad (3.14)$$

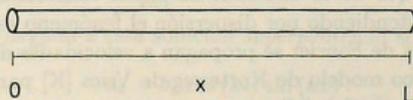


Figura 4: Varilla de longitud  $L$

El modelo (3.14) describe la variación de la temperatura a lo largo de una varilla de longitud  $L$  (ver figura 4). Se supone que es lo suficientemente delgada como para que en todos los puntos de cada sección perpendicular a la varilla se puede considerar el mismo valor de la temperatura. Suponemos asimismo, que la varilla está completamente aislada del exterior, de manera que no pueda fluir calor a través de su superficie lateral.

Las condiciones  $u(0, t) = u(L, t) = 0$  son las condiciones de contorno, que nos indican que, en los extremos, la temperatura se mantiene nula. En la práctica, frecuentemente, estas condiciones se sustituyen por otras de la forma  $u_x(0, t) = u_x(L, t) = 0$ , en las que queda reflejado el hecho de que el flujo de calor a través de la frontera es nulo.

La última condición,  $u(x, 0) = u_0(x)$ , es la condición inicial y describe, por medio de la función  $u_0(x)$ , cuál es la distribución de temperaturas que había inicialmente a lo largo de la varilla.

Como ya hemos mencionado, J. Fourier no sólo dedujo la ecuación del calor sino que estableció un programa sistemático de resolución de Ecuaciones en Derivadas Parciales, el *método de separación de variables o método de Fourier* que involucra varias etapas:

- Descomposición de los datos del problema en series de Fourier.
- Obtención de la evolución de cada coeficiente de Fourier en función de la EDP y de los datos.
- Reconstrucción de la solución como superposición de cada una de las componentes de Fourier (serie de Fourier).

A diferencia del procedimiento utilizado por d'Alembert y Euler que consistía fundamentalmente en superponer soluciones elementales de la forma (3.10), encontradas *ad hoc* para la ecuación de ondas; Fourier ataca el problema de una manera más general.

En primer lugar se buscan soluciones que sean funciones con las variables separadas,

$$u(x, t) = X(x)T(t) \quad (3.15)$$

Esto da lugar a dos Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, para  $X(x)$  e  $T(t)$ , respectivamente que, junto con las condiciones de contorno, dan lugar a dos

grupos de soluciones<sup>1</sup>

$$X_k(x) = \sin(kx), \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (3.16)$$

$$T_k(t) = e^{-k^2 t}, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (3.17)$$

(los detalles sobre la solución de estos problemas pueden consultarse en cualquier texto de ecuaciones, por ejemplo, [Si] o [Zi])

Por lo tanto, las soluciones producto resultantes serán

$$u_k(x, t) = e^{-k^2 t} \sin(kx), \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (3.18)$$

Aplicando el *principio de superposición*, también será solución cualquier combinación lineal finita de las funciones anteriores, es decir,

$$b_1 u_1(x, t) + b_2 u_2(x, t) + \dots + b_n u_n(x, t) \quad (3.19)$$

Sin embargo, Fourier va más allá y afirma, sin preocuparse demasiado sobre los problemas de convergencia, que también la siguiente función es solución de la ecuación del calor

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k e^{-k^2 t} \sin(kx) \quad (3.20)$$

Y para que esto sea así, necesita que se satisfaga la condición inicial  $u(x, 0) = u_0(x)$ . Por lo tanto, necesita poder desarrollar la función  $u_0(x)$  en la forma

$$u(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx) \quad (3.21)$$

Pero, para Fourier, este problema queda resuelto en tanto en cuanto sea posible calcular los coeficientes  $b_k$  mediante la fórmula

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(kx) dx \quad (3.22)$$

Este es pues el punto controvertido del trabajo de Fourier y la razón por la que Lagrange, Laplace y Legendre no van a aceptar el trabajo de Fourier sin más. Sin embargo, el paso del tiempo y, fundamentalmente, los posteriores trabajos de Dirichlet y de Riemann sobre las condiciones para que una serie

<sup>1</sup>Estas soluciones corresponden realmente al caso en el que la longitud de la varilla es  $L = \pi$ .

de Fourier sea convergente, acaban dando al análisis de Fourier la importancia que realmente tiene.

Fourier también estudia el caso *estacionario* (independiente del tiempo  $t$ ) de la ecuación del calor

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad (3.23)$$

al que aplica también su método de separación de variables. Esta ecuación, que se suele llamar *ecuación de Laplace* ha dado lugar a la rama de las matemáticas denominada *Teoría del Potencial*, de suma importancia a la hora de estudiar fenómenos como la gravitación.

## 4 Fenómeno de Gibbs

Esta sección está enteramente dedicada al fenómeno de Gibbs. En primer lugar lo describiremos mediante un ejemplo concreto: la función salto, también veremos las gráficas de las sumas parciales de Fourier para la función delta de Dirac. Después analizaremos las gráficas que se producen al sumar los términos de las sumas parciales de Fourier de una forma diferente: el método de sumación de Fejér. Además compararemos las gráficas obtenidas mediante las sumas parciales de Fourier y las sumas parciales de Fejér, observando un curioso fenómeno.

### 4.1 Fenómeno de Gibbs en series de Fourier

#### 4.1.1 La función salto

Consideremos la función salto

$$f(x) = \begin{cases} -1 & ; \text{ si } -\pi \leq x < 0 \\ 1 & ; \text{ si } 0 \leq x \leq \pi \end{cases} \quad (4.24)$$

La  $N$ -ésima suma parcial correspondiente a su serie de Fourier viene dada por la expresión

$$s_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^N [a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)] \quad (4.25)$$

donde los coeficientes de Fourier se calculan utilizando las fórmulas (2.2) y (2.3).

Como  $f$  es una función impar,  $a_k = 0$ , para todo  $k = 0, 1, 2, \dots$

Por otra parte,  $b_k$  puede calcularse de forma explícita, obteniéndose el siguiente resultado:

$$b_k = \frac{2}{\pi} \left( \frac{1 - (-1)^k}{k} \right), \quad \text{para } k = 1, 2, \dots$$

Por tanto, para nuestra función salto, la suma parcial de Fourier queda

$$s_N(x) = \sum_{k=1}^N \frac{2}{\pi} \left( \frac{1 - (-1)^k}{k} \right) \sin(kx) \quad (4.26)$$

Por otra parte, como  $b_k = 0$  si  $k$  es par, la suma se puede escribir también de la forma

$$s_{2n-1}(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{r=1}^n \frac{1}{2r-1} \sin((2r-1)x) \quad (4.27)$$

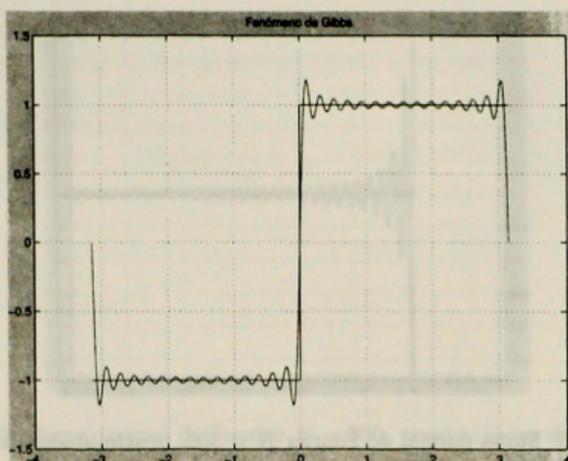
$$= \frac{4}{\pi} \left[ \sin(x) + \frac{\sin(3x)}{3} + \dots + \frac{\sin((2n-1)x)}{2n-1} \right] \quad (4.28)$$

Con el programa para MATLAB incluido en el apartado 5.1, se pueden dibujar las gráficas de las sumas parciales de Fourier para la función salto. Una vez guardado con el nombre `sumpar.m`,<sup>2</sup> para activarlo, basta con escribir, por ejemplo, `>>sumpar(30)` y obtendremos la gráfica de la suma parcial de Fourier para  $N = 30$  (ver figura 5).

Sabemos que, si  $f$  y  $f'$  son continuas, salvo en un número finito de puntos de discontinuidades de tipo salto, las sumas parciales de Fourier convergen puntualmente a  $f(x)$  en los puntos de continuidad de  $f$  y a la media de los límites laterales en los puntos de discontinuidad (para una demostración, véase [M]).

Este resultado se aplica al caso particular de la función salto que estamos considerando y que presenta una singularidad en  $x = 0$ : una discontinuidad de tipo salto. En las figuras 5 apreciamos la forma en la que, efectivamente, cuando  $x \neq 0$ , las series de Fourier aproximan el valor de la función en  $x$ , mientras que en  $x = 0$  convergen a la media de los límites laterales, nula en este caso puesto que  $[f(0^-) + f(0^+)]/2 = (1 - 1)/2 = 0$ .

<sup>2</sup>Para escribir el programa 5.1 se ha preferido la expresión (4.26) en lugar de (4.27) debido a que, al ser más general, el programa se puede modificar fácilmente para aplicarlo a cualquier otra función.

Figura 5: Suma parcial de Fourier  $N = 30$ 

En este punto de discontinuidad  $x = 0$  se aprecia también con claridad el fenómeno de Gibbs. En efecto, se observa claramente que la gráfica de la suma parcial de Fourier excede a la de la función salto en el punto de discontinuidad. Por ejemplo, a la derecha del punto  $x = 0$  se ve cómo la gráfica de la suma parcial de Fourier supera con nitidez a la de la función salto. La gráfica de la figura 6, donde este hecho se pone de manifiesto, se ha conseguido haciendo primero `>>sumpar(300)`, para generar la gráfica completa y después, con el comando `>>zoom`, que permite seleccionar una zona de la gráfica, con el ratón, para ampliarla. En la figura 7, se puede observar cómo las gráficas de las sumas parciales sobresalen por debajo de la gráfica de  $f(x)$ , en las proximidades del punto  $(0, -1)$ .

En la figura 5 observamos que el fenómeno de Gibbs también se produce en los extremos  $x = \pm\pi$  del intervalo  $(-\pi, \pi)$ . Esto es debido a que la suma parcial de Fourier aproxima a la extensión periódica de período  $2\pi$  de la función salto, que presenta discontinuidades en los puntos de la forma  $x = k\pi$ ,  $k \in \mathcal{Z}$

Se puede demostrar, para esta función particular (ver [Na], pp. 662-663), que el máximo de  $s_{2n-1}(x)$  más cercano a  $x = 0$  (por la derecha) es el punto  $x = \frac{\pi}{2n}$  y que en este punto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n-1}\left(\frac{\pi}{2n}\right) = \frac{2}{\pi} \text{Si}(\pi) \approx 1.1790... \quad (4.29)$$

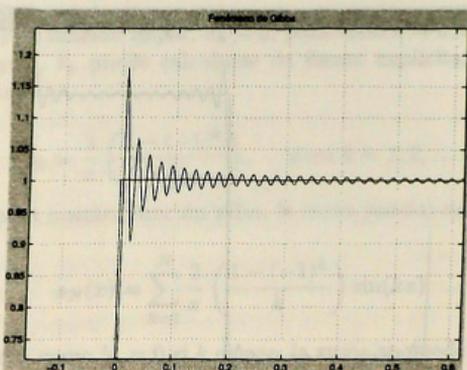


Figura 6: Suma parcial de Fourier  $N = 300$ , proximidades de  $(0,1)$

Aquí y en lo sucesivo  $\text{Si}$  denota la función  $\text{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin(t)}{t} dt$ .

(Para evaluar aproximadamente  $\text{Si}(\pi)$ , se puede utilizar el comando de MATLAB, `sinint(pi)=1.8519...`, ya que la primitiva de  $\sin(t)/t$ , no se puede expresar con funciones elementales.<sup>3</sup>)

El cálculo (4.29) nos indica que las aproximaciones que nos ofrecen las sumas parciales de Fourier exceden al valor verdadero de la función, a la derecha, es decir, a  $f(0+) = 1$  en 0.18, lo que supone aproximadamente un 9% de la longitud del salto, que en este caso es 2.

En general, se puede demostrar el siguiente teorema, debido a M. Bôcher (ver [Bo], la demostración puede verse también en [HH] y [C]):

**Teorema** *Sea  $f$  una función real de variable real, con periodo  $2\pi$ . Supongamos que  $f$  y  $f'$  son ambas continuas excepto para un número finito de discontinuidades de tipo salto en el intervalo  $[-\pi, \pi]$ . Sea  $s_N(x)$  la suma parcial de orden  $N$  de Fourier. Entonces, en un punto  $a$  de discontinuidad, las gráficas de las funciones  $s_N(x)$  convergen al segmento vertical (ver figura 8) de longitud  $L = \frac{2}{\pi} \text{Si}(\pi) |f(a+) - f(a-)|$  centrado en el punto  $(a, \frac{1}{2}(f(a+) + f(a-)))$ .*

La razón entre la longitud del segmento  $L$  (al que tienden las gráficas de las  $s_N(x)$ ) y la longitud del salto de la discontinuidad, es decir,

<sup>3</sup>Curiosamente en algunas referencias clásicas esta constante aparece mal calculada.

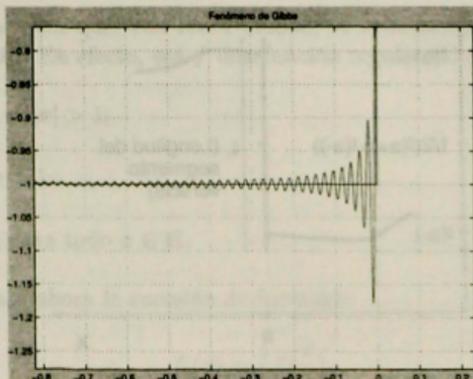


Figura 7: Suma parcial de Fourier  $N = 300$ , proximidades de  $(0, -1)$

$\mathcal{L} = |f(a+) - f(a-)|$ , se denomina *constante de Gibbs* y su valor

$$\frac{L}{\mathcal{L}} = \frac{2}{\pi} \text{Si}(\pi) \quad (4.30)$$

coincide, evidentemente, con el obtenido para nuestro caso particular en (4.29).

#### 4.1.2 Un importante ejemplo: la “función” delta de Dirac

En 1926, el físico inglés P.A.M. Dirac (1902-1984), introdujo la “función” *delta de Dirac* ([Di]), (que denotaremos  $\delta(x)$ ) en conexión con sus estudios sobre *Mecánica Cuántica*. Realmente no se trata de una función en el sentido ordinario del término, sino de una *distribución* (ver [Sc]).

La delta de Dirac viene caracterizada por las siguientes propiedades:

1.  $\delta(x) = 0$  si  $x \neq 0$ .
2.  $\delta(0)$  no está definida.
3.  $\int \delta(x) dx = 1$ , siempre que el recinto de integración incluya a  $x = 0$ .
4. Si  $g(x)$  es una función continua en  $\mathbf{R}$ , entonces  $\int g(x)\delta(x) dx = g(0)$ .

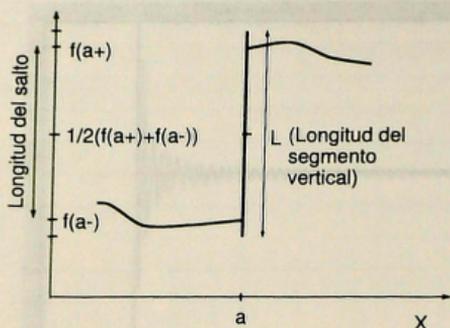


Figura 8: Fenómeno de Gibbs en un punto de discontinuidad

En la figura 9 representamos la delta de Dirac en un sentido figurado: la delta de Dirac puede interpretarse como una función que se anula en todos los puntos salvo en  $x = 0$ , donde toma el valor infinito.

Para  $a \neq 0$ , la función  $\delta(x - a)$ , sería la misma función o distribución pero trasladada a  $x = a$ .

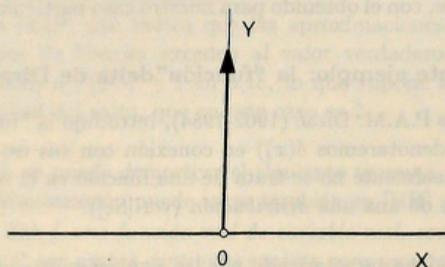


Figura 9: Delta de Dirac,  $\delta(x)$

El concepto de la función delta de Dirac, también llamada *función impulso unitario*, resulta un modelo útil en situaciones en las que, por ejemplo, tenemos un sistema mecánico sobre el que actúa una fuerza externa de gran magnitud durante un breve instante de tiempo. En el caso extremo en el que esta fuerza estuviese concentrada en un punto, vendría representada por la delta de Dirac.

La delta de Dirac puede, efectivamente, entenderse como el límite de una

sucesión de funciones que, con masa unidad, se concentran infinitamente en torno a un punto. En efecto, sea  $f$  una función regular tal que

- $f(x) = 0$ , si  $|x| > 1$ ;
- $\int f(x)dx = 1$ ;
- $f(x) \geq 0$ , para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

Consideramos ahora la sucesión de funciones

$$f_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon} f\left(\frac{x}{\epsilon}\right).$$

Este cambio de escala no altera la masa total de la función, puesto que

$$\int f_\epsilon(x)dx = \int \frac{1}{\epsilon} f\left(\frac{x}{\epsilon}\right)dx = \int f(y)dy = 1.$$

Sin embargo, a medida que  $\epsilon$  tiende a 0, el soporte de la función  $f_\epsilon$  se contrae, puesto que

$$f_\epsilon(x) \rightarrow 0 \quad \text{si } |x| > \epsilon.$$

En el límite, cuando  $\epsilon \rightarrow 0$ , las funciones  $f_\epsilon$ , cada vez más concentradas, convergen a la delta de Dirac, puesto que

$$\begin{aligned} \int f_\epsilon(x)g(x)dx &= \frac{1}{\epsilon} \int f\left(\frac{x}{\epsilon}\right)g(x)dx = \int f(x)g(\epsilon x)dx \\ &\rightarrow g(0) \int f(x)dx = g(0) = \int g(x)\delta(x)dx \end{aligned}$$

cuando  $\epsilon \rightarrow 0$ , para toda función  $g$  continua y acotada.

Vamos a calcular las sumas parciales de Fourier para la delta de Dirac. Pero, ¿cómo puede expresarse con una serie trigonométrica una “función” tan singular como la delta de Dirac? Si, como hemos visto en la sección 2; ya fue difícil que se aceptase, por parte de contemporáneos de Euler y Fourier, que una función de tipo salto se pudiera expresar a través de su serie de Fourier; resulta interesante imaginar lo que habrían pensado de quien intentase hacer lo mismo para un objeto como la delta de Dirac.

En realidad, lo que vamos a hacer es calcular las sumas parciales de Fourier correspondientes a una determinada combinación lineal de deltas de Dirac,

$$\Delta(x) = \sum_{z=\text{par}} \delta(x+z\pi) - \sum_{z=\text{impar}} \delta(x+z\pi) \quad (4.31)$$

que se obtiene al extender de manera periódica, con período  $2\pi$  la "función" que coincide con la delta de Dirac  $\delta(x)$  en  $x=0$  y con  $-\delta(x-\pi)$  en el punto  $x=\pi$ , es decir, con la  $\delta$  trasladada y cambiada de signo, la reflejada impar de la  $\delta(x)$ . Dicho de otra forma, la función que hemos llamado  $\Delta(x)$ , está compuesta por: impulsos unitarios *positivos* en los múltiplos pares de  $\pi$ , es decir, puntos de la forma  $\dots, -2\pi, 0, 2\pi, 4\pi, \dots$ ; e impulsos unitarios *negativos* en los múltiplos impares de  $\pi$ , es decir, puntos de la forma  $\dots, -3\pi, -\pi, \pi, 3\pi, \dots$ . La gráfica de esta función se podría representar como en la figura 10.

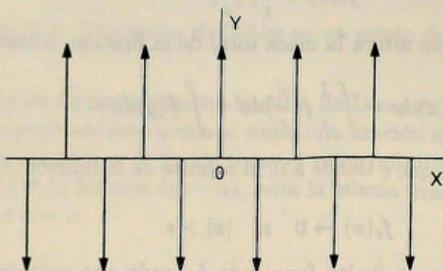


Figura 10: "función"  $\Delta(x)$

Aplicamos nuevamente las fórmulas (2.2) y (2.3) teniendo en cuenta que  $\Delta(x)$  es una función par,

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Delta(x) \cos(kx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \Delta(x) \cos(kx) dx \\ &= \int_0^{\pi} (\delta(x) - \delta(x-\pi)) \cos(kx) dx \\ &= \frac{2}{\pi} (\cos(0) - \cos(k\pi)) \\ &= \frac{2}{\pi} (1 - (-1)^k) \end{aligned}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Delta(x) \sin(kx) dx = 0$$

Por tanto, la suma parcial de Fourier para la función  $\Delta(x)$  queda

$$s_{\Delta, N}(x) = \sum_{k=0}^N \frac{2}{\pi} (1 - (-1)^k) \cos(kx) \quad (4.32)$$

que se puede expresar de la siguiente forma, dado que para los valores pares de  $k$  los sumandos se anulan:

$$s_{\Delta, 2n-1}(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{r=1}^n \cos((2r-1)x) \quad (4.33)$$

$$= \frac{4}{\pi} [\cos(x) + \cos(3x) + \dots + \cos((2n-1)x)] \quad (4.34)$$

El programa de MATLAB incluido en el apartado 5.2 puede utilizarse para representar las sumas parciales descritas mediante la fórmula (4.32). Su sintaxis es: `>>deltafun(N, xmin, xmax)`, donde  $N$  es el número de sumandos y  $xmin$  y  $xmax$  son los valores del rango en el que queremos que aparezca la gráfica. Por ejemplo, la gráfica de la figura 11 se ha generado con el comando `>>deltafun(30, -pi, pi)` y, la gráfica de la figura 12 se ha generado con el comando `>>deltafun(100, -5*pi, 5*pi)` (compárense estas gráficas con el esquema inicial de la función  $\Delta(x)$  mostrado en la figura 10).

Los cálculos y gráficas obtenidas requieren algunas observaciones:

- En primer lugar, con toda seguridad el lector ya se ha dado cuenta, la expresión obtenida en (4.33) es exactamente la derivada de la que obtuvimos en (4.28) (esto explica la manera tan enrevesada en que se definió la función  $\Delta(x)$ ). Es decir,

$$\frac{d}{dx} [s_{2n-1}(x)] = s_{\Delta, 2n-1}(x) \quad (4.35)$$

Lo cual nos hace pensar que, en cierto sentido,<sup>4</sup> la derivada de la función salto (4.24) debe ser la "función"  $\Delta(x)$  (4.31).

- A partir de la observación anterior; si la derivada de las sumas parciales de la función salto son las sumas parciales de la delta de Dirac, entonces

<sup>4</sup>Este sentido no es otro que el de la Teoría de las Distribuciones, de la cual, la delta de Dirac no es más que un ejemplo, ver nuevamente [Sc].

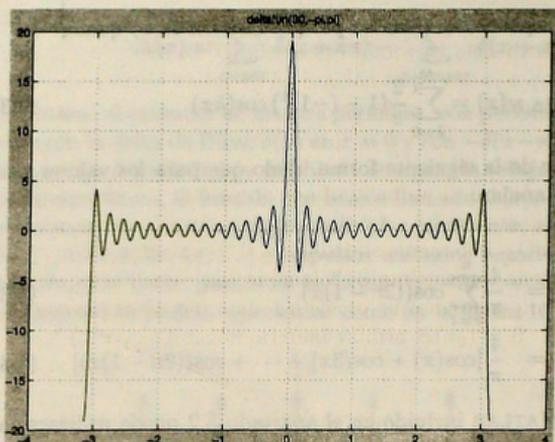


Figura 11: suma de Fourier de  $\Delta(x)$ ,  $N = 30$

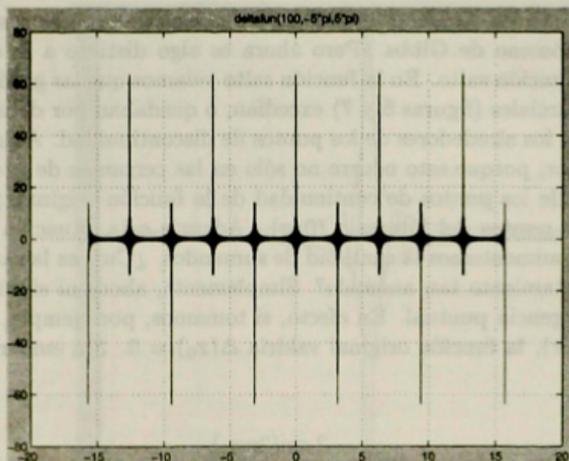
la integral de las sumas parciales de la delta serán las de la función salto, es decir,

$$s_{2n-1}(x) = \int_0^x s_{\Delta, 2n-1}(t) dt \quad (4.36)$$

Por otra parte,  $s_{\Delta, 2n-1}(x)$  admite una expresión más cómoda:

$$\begin{aligned} s_{\Delta, 2n-1}(x) &= \frac{4}{\pi} \sum_{r=1}^n \cos((2r-1)x) \\ &= \frac{2}{\pi \sin(x)} \sum_{r=1}^n 2 \sin(x) \cos((2r-1)x) \\ &= \frac{2}{\pi \sin(x)} \sum_{r=1}^n [\sin(2rx) - \sin(2(r-1)x)] \\ &= \frac{2}{\pi \sin(x)} \left[ \sum_{r=1}^n \sin(2rx) - \sum_{r=0}^{n-1} \sin(2rx) \right] \\ &= \frac{2 \sin(2nx)}{\pi \sin(x)} \end{aligned}$$

Este hecho, junto con (4.36), proporciona la siguiente expresión para las

Figura 12: suma de Fourier de  $\Delta(x)$ ,  $N = 100$ 

sumas parciales de Fourier de la función salto:

$$s_{2n-1}(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^x \frac{\sin(2nt)}{\sin(t)} dt, \quad (4.37)$$

mientras que

$$\frac{d}{dx} [s_{2n-1}(x)] = \frac{2 \sin(2nx)}{\pi \sin(x)} \quad (4.38)$$

Se puede comprobar de esta forma, que los puntos críticos de las sumas parciales de la función salto son los ceros de las sumas parciales de la delta de Dirac. Es decir, que la altura que se alcanza en el primer máximo de la suma parcial de Fourier de la función salto, a la derecha de  $x = 0$ , es la mitad del área por debajo del arco central de la gráfica 11. Es decir,

$$s_{2n-1}\left(\frac{\pi}{2n}\right) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2n}} \frac{\sin(2nt)}{\sin(t)} dt. \quad (4.39)$$

Pasando al límite cuando  $n \rightarrow \infty$  y en virtud de (4.29), necesariamente habremos de obtener el mismo valor. Por tanto,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2n}} \frac{\sin(2nt)}{\sin(t)} dt \rightarrow \int_0^{\pi} \frac{\sin(t)}{t} dt = \text{Si}(\pi) \quad (4.40)$$

(Ver [C], pp. 300-301.)

- En las gráficas de las figuras 11 y 12 parece observarse también algo parecido al fenómeno de Gibbs. Pero ahora es algo distinto a lo que ocurriría con la función salto. En la función salto veíamos que las gráficas de las sumas parciales (figuras 6 y 7) excedían, o quedaban por debajo, de la función en los alrededores de los puntos de discontinuidad. Aquí la situación es peor, porque esto ocurre no sólo en las cercanías de  $x = 0$  sino a lo largo de los puntos de continuidad de la función original, por ejemplo, en los puntos del intervalo  $(0, \pi)$ . Además esta situación no cambia aunque aumentemos la cantidad de sumandos. ¿Cuál es la razón de este comportamiento tan anómalo? Simplemente, ahora ni siquiera tenemos convergencia puntual. En efecto, si tomamos, por ejemplo, un punto  $x_0 \in (0, \pi)$ , la función original valdría  $\Delta(x_0) = 0$ . Sin embargo, la sucesión

$$s_{\Delta, 2n-1}(x_0) = \frac{2 \sin(2nx_0)}{\pi \sin(x_0)} \quad (4.41)$$

no converge cuando  $n \rightarrow \infty$ . De hecho, lo que ocurre es que la gráfica de  $s_{\Delta, 2n-1}(x)$  oscila entre las gráficas de las dos funciones  $y = \pm \frac{2}{\pi} \frac{1}{\sin(x)}$ , que acotan superior e inferiormente a  $s_{\Delta, 2n-1}(x)$ , es decir,

$$\left| \frac{2 \sin(2nx)}{\pi \sin(x)} \right| \leq \frac{2}{\pi} \frac{1}{|\sin(x)|} \quad (4.42)$$

En la figura 13 hemos dibujado la gráfica de la suma parcial de la delta de Dirac hasta el sumando  $N = 50$  (que sería lo mismo que  $n = 25$ , según la notación  $s_{\Delta, 2n-1}(x)$ ), en el intervalo  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  junto con las gráficas de las funciones  $y = \pm \frac{2}{\pi} \frac{1}{\sin(x)}$ .

Entonces, ¿qué tipo de representación es la que producen las sumas parciales de Fourier para la delta de Dirac en la que ni siquiera hay convergencia puntual para los puntos de continuidad? La respuesta es que sí hay convergencia, pero es una convergencia especial, una convergencia "débil": como hemos podido ver más arriba, en la definición de la delta de Dirac, esta función no se define de una manera clásica, dando sus valores, sino más bien a través de sus efectos sobre otras funciones en el sentido de las distribuciones. Y en este sentido, las sumas parciales de Fourier de la delta producen sobre otras funciones los mismos efectos, puesto que las oscilaciones se cancelan a través de la integración.

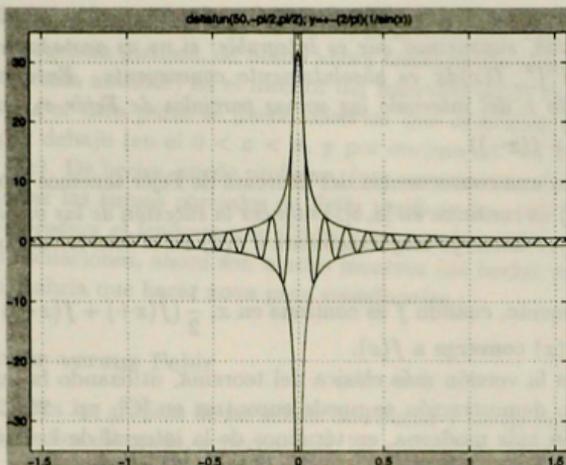


Figura 13: "fenómeno de Gibbs" en delta Dirac,  $N = 50$

## 4.2 Método de sumación de Fejér

En 1904, el matemático húngaro L. Fejér (1880-1959), propuso una nueva forma de sumar los términos de la serie de Fourier. Se trata de sumar los promedios de las sumas parciales y pasar al límite. Se obtiene así una nueva sucesión de funciones que produce convergencia incluso en algunos casos en los que la serie original no la tiene.

Veamos cómo se construye la suma Fejér a partir de las sumas parciales de la serie de Fourier: dada la suma parcial de Fourier (4.25) construimos una nueva sucesión con el promedio de las sumas parciales,

$$\sigma_M(x) = \frac{1}{M+1} \sum_{N=0}^M s_N(x) = \frac{s_0(x) + s_1(x) + \cdots + s_M(x)}{M+1}. \quad (4.43)$$

La suma de Fejér es entonces

$$s(x) = \lim_{M \rightarrow \infty} \sigma_M(x). \quad (4.44)$$

En cuanto a la convergencia de la suma de Fejér se tiene el siguiente

**Teorema de Fejér ([F])** Sea  $f(x)$  definida en el intervalo  $(-\pi, \pi)$ . Si  $f$  es acotada, suponemos que es integrable; si no es acotada, suponemos que la integral  $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$  es absolutamente convergente. Entonces, para cualquier punto  $x$  del intervalo las sumas parciales de Fejér  $\sigma_M(x)$  convergen a  $\frac{1}{2}(f(x+) + f(x-))$ .

Y como una consecuencia del Teorema de Fejér tenemos que,

Si  $f(x)$  es continua en  $[a, b]$ , entonces la sucesión de las medias aritméticas  $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \dots$  converge uniformemente a  $f(x)$  en el interior del intervalo  $(a, b)$ .

Obviamente, cuando  $f$  es continua en  $x$ ,  $\frac{1}{2}(f(x+) + f(x-)) = f(x)$  y, por tanto,  $\sigma_M(x)$  converge a  $f(x)$ .

Esta es la versión más clásica del teorema, utilizando la integral de Riemann y su demostración se puede encontrar en [C], pp. 254-258. Para ver una versión más moderna, en términos de la integral de Lebesgue, se puede consultar [A], pp. 390-391.

En la sección 5, se ha incluido un programa para MATLAB, (el programa 5.3) para dibujar las gráficas de las sumas de Fejér para la función salto. Se trata de hacer una pequeña modificación en el programa `sumpar.m`, introduciendo un nuevo bucle que promedie las sumas de Fourier.

Por ejemplo, haciendo `>>fejer(40)`, se obtiene la gráfica de la figura 14.

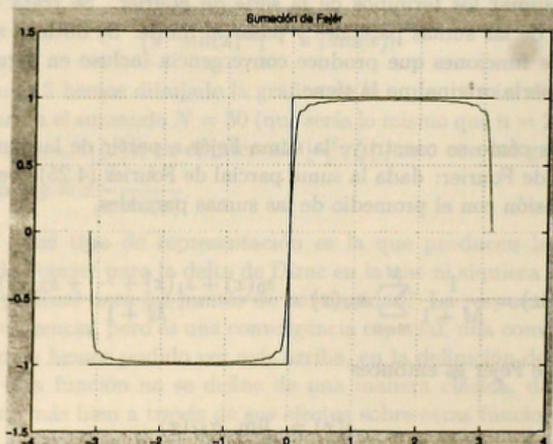


Figura 14: Sumación parcial de Fejér  $M = 40$

Lo primero que se observa en la nueva gráfica es que ahora tenemos un tipo de convergencia distinta, de hecho ahora tenemos convergencia uniforme (según el teorema anterior) en el interior del intervalo  $(0, \pi)$  (y, por simetría, en  $(-\pi, 0)$ ). Por otra parte se puede observar que la gráfica de la suma de Fejér cae por debajo (en el  $0 < x < \pi$ , y por encima en  $-\pi < x < 0$ ) de la gráfica de  $f(x)$ . De hecho, puede probarse, (ver nuevamente el clásico [C], pp. 308) que todas las sumas parciales de Fejér verifican  $|\sigma_M(x)| < 1$ , es decir, ahora *no se produce* el fenómeno de Gibbs y aunque la gráfica sigue teniendo las mismas oscilaciones, ahora son mucho menores (de hecho, en la figura no se aprecian, habría que hacer zoom para visualizarlas.)

### 4.3 Fourier versus Fejér

Dibujemos ahora las gráficas de las sumas de Fourier y las de Fejér juntas. En la figura 15, hemos dibujado, superpuestas, las gráficas de las sumas parciales de Fourier y Fejér hasta el sumando  $N = 11$  en el intervalo  $[0, \pi]$ . En la figura 16, se ha representado lo mismo, pero ahora en el intervalo  $[-\pi, \pi]$ . En ambas figuras se puede observar cómo las sumas parciales de Fourier y las de Fejér parecen coincidir en algunos puntos críticos de las sumas de Fourier. En concreto, en el intervalo  $[0, \pi]$ , esto ocurre en los mínimos y, debido a la simetría impar, en el intervalo  $[-\pi, 0]$ , ocurre en los máximos.

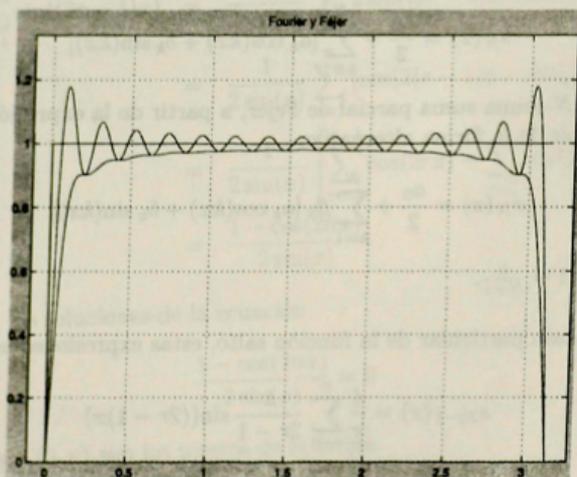


Figura 15: Fourier versus Fejér,  $N = 29$

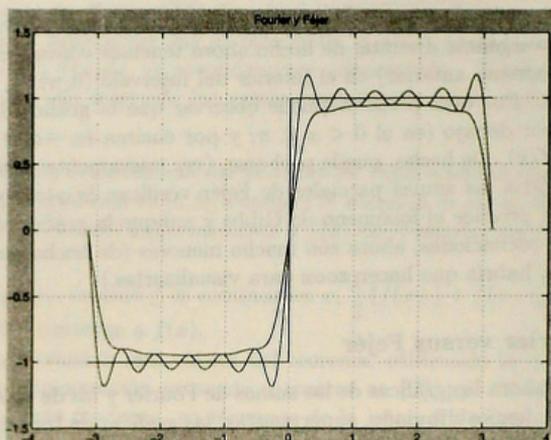


Figura 16: Fourier versus Fejér,  $N = 11$

Veamos que este curioso fenómeno no es sólo aparente, ni debido a los errores de redondeo, sino que ocurre de hecho:

En primer lugar, si la  $N$ -ésima suma parcial de Fourier es

$$s_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^N [a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)] \quad (4.45)$$

entonces la  $N$ -ésima suma parcial de Fejér, a partir de la expresión (4.43), se puede escribir de la forma alternativa

$$\sigma_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^N \beta_k [a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)] \quad (4.46)$$

donde  $\beta_k = 1 - \frac{k}{N+1}$ .

Para el caso particular de la función salto, estas expresiones se convierten en

$$s_{2n-1}(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{r=1}^n \frac{1}{2r-1} \sin((2r-1)x) \quad (4.47)$$

y

$$\sigma_{2n-1}(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{r=1}^n \left(1 - \frac{2r-1}{2n}\right) \frac{1}{2r-1} \sin((2r-1)x) \quad (4.48)$$

Los puntos en que se cortan las gráficas de (4.47) y (4.48), han de ser soluciones de la ecuación

$$s_{2n-1}(x) - \sigma_{2n-1}(x) = 0 \quad (4.49)$$

Por otra parte, si estos puntos son máximos o mínimos, es decir, puntos críticos de la función (4.47), entonces también deben verificar la ecuación

$$\frac{d}{dx} [s_{2n-1}(x)] = 0 \quad (4.50)$$

La ecuación (4.49) la podemos escribir de la forma siguiente:

$$s_{2n-1}(x) - \sigma_{2n-1}(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{r=1}^n \frac{1}{2r} \sin((2r-1)x) = 0. \quad (4.51)$$

Por tanto,

$$\sum_{r=1}^n \sin((2r-1)x) = 0 \quad (4.52)$$

que se puede transformar de la siguiente manera

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{r=1}^n \sin((2r-1)x) = \frac{1}{2 \sin(x)} \sum_{r=1}^n 2 \sin((2r-1)x) \sin(x) \\ &= \frac{1}{2 \sin(x)} \sum_{r=1}^n [\cos(2(r-1)x) - \cos(2x)] \\ &= \frac{1}{2 \sin(x)} \left[ \sum_{r=0}^{n-1} \cos(2rx) - \sum_{r=1}^n \cos(2rx) \right] \\ &= \frac{1 - \cos(2nx)}{2 \sin(x)} \end{aligned}$$

Ahora bien, las soluciones de la ecuación

$$\frac{1 - \cos(2nx)}{2 \sin(x)} = 0 \quad (4.53)$$

en el intervalo  $(0, \pi)$  son los puntos de la forma

$$x_1 = \frac{\pi}{n}, x_2 = \frac{2\pi}{n}, \dots, x_{n-1} = \frac{(n-1)\pi}{n} \quad (4.54)$$

Y es sencillo comprobar que estos puntos son precisamente los mínimos de la función  $s_{2n-1}(x)$ , ya que sabemos, por (4.38), que

$$\frac{d}{dx} [s_{2n-1}(x)] = \frac{2 \sin(2nx)}{\pi \sin(x)} \quad (4.55)$$

Luego, efectivamente las gráficas de las sumas parciales de Fourier y las de Fejér se cortan en los mínimos de las primeras, en el intervalo  $(0, \pi)$  y, por la simetría, en los máximos del intervalo  $(-\pi, 0)$  (excepto para el caso  $n = 1$ , en el que no hay ningún mínimo en  $(0, \pi)$ .)

La primera cuestión que aparece de manera inmediata es: ¿ocurrirá esto en todos los casos? La respuesta es que no. Por ejemplo, en el caso de la función delta de Dirac, que analizamos en el apartado 4.1.2, se pueden dibujar conjuntamente las gráficas de las sumas parciales de Fourier y de Fejér juntas, como hemos hecho en la figura 17, para observar que la gráfica de Fejér no pasa por los puntos críticos mencionados antes. (Para dibujar las gráficas de las sumas de Fejér para la delta de Dirac incluimos el programa 5.4.)

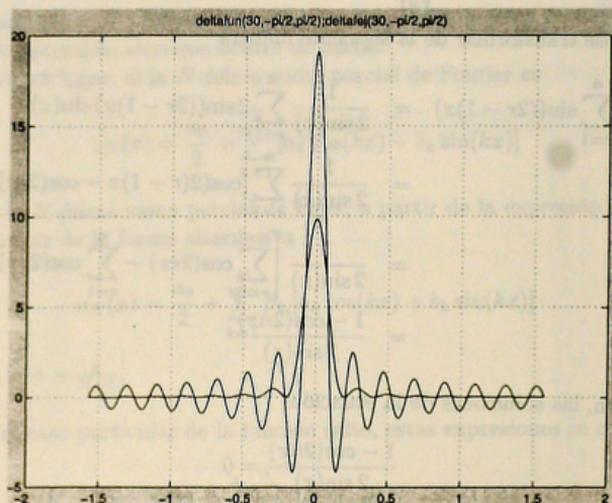


Figura 17: Delta de Dirac: Fourier versus Fejér,  $N = 30$

Veamos no obstante, que también hay otros desarrollos en los que se da esta coincidencia, como por ejemplo, en el caso de la función

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} & ; \text{ si } -\pi \leq x < 0 \\ -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} & ; \text{ si } 0 \leq x \leq \pi \end{cases} \quad (4.56)$$

que vamos a analizar utilizando una técnica distinta a la anterior. Esta función extendida periódicamente, con período  $2\pi$ , a lo largo de todo el eje real se denomina a veces, función "diente de sierra".

Las sumas parciales de Fourier de esta función son

$$s_N(x) = \sum_{k=1}^N \frac{1}{k} \sin(kx) \quad (4.57)$$

y las sumas de Fejér

$$\sigma_N(x) = \sum_{k=1}^N \left(1 - \frac{k}{N+1}\right) \frac{1}{k} \sin(kx) \quad (4.58)$$

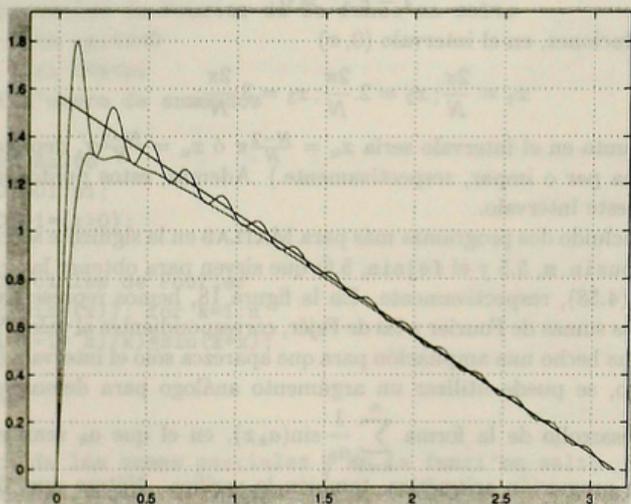


Figura 18: "Diente de sierra": Fourier versus Fejér,  $N = 30$

Ahora, para que las gráficas de (4.57) y de (4.58) se corten en los puntos críticos de (4.57) hace falta que las ecuaciones

$$s_N(x) - \sigma_N(x) = \frac{1}{N+1} \sum_{k=1}^N \sin(kx) = 0 \quad (4.59)$$

y

$$\frac{d}{dx} [s_N(x)] = \sum_{k=1}^N \cos(kx) = 0 \quad (4.60)$$

tengan soluciones comunes. O lo que es lo mismo, utilizando la fórmula de Euler  $e^{ikx} = \cos(kx) + i \sin(kx)$ , que haya valores reales de  $x$  que sean solución de la ecuación compleja

$$\sum_{k=1}^N \cos(kx) + i \sum_{k=1}^N \sin(kx) = \sum_{k=1}^N e^{ikx} = 0. \quad (4.61)$$

Sumando la progresión geométrica

$$\sum_{k=1}^N e^{ikx} = \frac{e^{ix}(1 - e^{iNx})}{1 - e^{ix}} = 0, \quad (4.62)$$

la ecuación se reduce a

$$1 - e^{iNx} = 0 \quad (4.63)$$

que tiene soluciones, en el intervalo  $(0, \pi)$

$$x_1 = \frac{2\pi}{N}; x_2 = 2 \cdot \frac{2\pi}{N}; x_3 = 3 \cdot \frac{2\pi}{N}; \dots \quad (4.64)$$

(el último punto en el intervalo sería  $x_u = \frac{N-2}{N}\pi$  ó  $x_u = \frac{N-1}{N}\pi$ , dependiendo de que  $N$  sea par o impar, respectivamente.) Además, estos puntos son los mínimos en este intervalo.

Se han incluido dos programas más para MATLAB en la siguiente sección: el programa `fousin.m`, 5.5 y el `fejsin`, 5.6; que sirven para obtener las gráficas de (4.57) y (4.58), respectivamente. En la figura 18, hemos representado las gráficas de las sumas de Fourier y las de Fejér, correspondientes al valor  $N = 30$  (después se ha hecho una ampliación para que aparezca sólo el intervalo  $(0, \pi)$ .)

De hecho, se puede utilizar un argumento análogo para demostrar que cualquier desarrollo de la forma  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k} \sin(a_k x)$ , en el que  $a_k$  sean enteros positivos en progresión aritmética, también lo verifica. Nótese que, de esta forma,  $\sum_{k=1}^n e^{ia_k x}$  es una suma de una progresión geométrica.

## 5 Programas para Matlab

Para la realización de este trabajo se ha utilizado, en particular para la parte gráfica, el asistente MATLAB, versión 5.3 Release R11, licencia de campus de la Universidad Complutense de Madrid. Los códigos de los programas con los que se han obtenido las gráficas se incluyen a continuación. Con pequeñas modificaciones se pueden adaptar a cualquier función. Basta con cambiar los valores de los coeficientes.

No obstante, para algunos cálculos y comprobaciones concretas, se ha utilizado también el asistente de Cálculo Simbólico DERIVE. El lector podrá consultar los comandos mediante los cuales se pueden dibujar sumas parciales de Fourier y sumas de Fejér puede verse en el trabajo de R. Rodríguez del Río ([R]). Algunas gráficas de sumas de Fourier y sumas de Fejér realizadas con DERIVE, pueden verse en el artículo de J. Duoandioetxea ([Du]); artículo este último en el que se puede encontrar un completo estudio del desarrollo histórico del Análisis de Fourier desde sus orígenes hasta nuestros días.

### 5.1 Programa: sumpar.m

```
function sumpar(n)

% Sumas parciales de Fourier de la funci'on salto
% f(x)= -1 si -pi<x<0
%      1 si 0<x<pi
% n es el n'umero de sumandos

% Funci'on salto
x = -pi:0.001:pi;
f=-1*(x<0)+1*(x>0);

% sumas parciales de Fourier
s = zeros(size(x)); for k=1:n
    s=s+((1-(-1)^k)/k)*sin(k*x);
end
s = 2/pi*s;

% gr'afica de las sumas parciales y de la funci'on salto
plot(x, s, 'r', x, f, 'b'),grid;

title('Fenómeno de Gibbs');
```

```
% Fin del programa sumpar.m
```

### 5.2 Programa: deltafun.m

```
function deltafun(n,xmin,xmax)
```

```
% Sumas parciales de Fourier de la funci'on
```

```
% Delta(x)=
```

```
% =sum(delta(x+z*pi),z par)+sum(delta(x+z*pi),z impar)
```

```
%
```

```
% n es el n'umero de sumandos
```

```
% [xmin,xmax] es el rango de la gr'afica
```

```
dx=(xmax-xmin)/15000;
```

```
x = xmin:dx:xmax;
```

```
% sumas parciales de Fourier
```

```
s = zeros(size(x)); for k=1:n
```

```
    s=s+(1-(-1)^k)*cos(k*x);
```

```
end s = 2/pi*s;
```

```
% gr'afica de las sumas parciales
```

```
plot(x, s),grid;
```

```
% Fin del programa deltafun.m
```

### 5.3 Programa: fejer.m

```
function fejer(m)
```

```
% Sumas de Fejer de la funci'on salto
```

```
% f(x)= -1 si -pi<x<0
```

```
%      1 si 0<x<pi
```

```
% m es el n'umero de sumandos
```

```
% Funci'on salto
```

```
x = -pi:0.001:pi;
```

```
f=-1*(x<0)+1*(x>0);
```

```
% sumas parciales de Fejer
```

```

fej=zeros(size(x)); for n=1:m
    s = zeros(size(x));
    for k=1:n
        s=s+((1-(-1)^k)/k)*sin(k*x);
    end
    s = 2/pi*s;
    fej=fej+s;
end
fej=fej/(m+1);

```

% gr'afica de las sumas de Fejer y de la funci'on salto  
plot(x, fej, 'r', x, f, 'b'),axis([-4 4 -1.5 1.5]),grid;

```

title('Sumaci3n de Fejer');
% Fin del programa fejer.m

```

#### 5.4 Programa: deltafej.m

```

function deltafej(m,xmin,xmax)

```

```

% Sumas parciales de Fejer de
% la funci'on
% Delta(x)=
% =sum(delta(x+z*pi),z par)+sum(delta(x+z*pi),z impar)
%
% m es el n'umero de sumandos
% [xmin,xmax] es el rango de la gr'afica

```

```

dx=(xmax-xmin)/15000;
x = xmin:dx:xmax;

```

```

% sumas parciales de Fejer
fej=zeros(size(x)); for n=1:m,
    s = zeros(size(x));
    for k=1:n,
        s=s+(1-(-1)^k)*cos(k*x);
    end
    s = 2/pi*s;
    fej=fej+s;
end

```

```
fej=fej/(m+1);
```

```
% gr'afica de las sumas parciales
plot(x, fejj),grid;
```

```
% Fin del programa deltafej.m
```

### 5.5 Programa: fousin.m

```
function fousin(n)
```

```
% Sumas parciales de Fourier de
% la funci'on diente de sierra
%  $f(x) = -x/2 - \pi/2$  si  $-\pi < x < 0$ 
%  $-x/2 + \pi/2$  si  $0 < x < \pi$ 
%
% n es el n'umero de sumandos
```

```
% Funci'on sierra
```

```
x = -pi:0.001:pi;
```

```
f=(-x/2-pi/2).*(x<0)+(-x/2+pi/2).*(x>0);
```

```
% sumas parciales de Fourier
```

```
s = zeros(size(x));
```

```
for k=1:n
```

```
    s=s+(1./k).*sin(k.*x);
```

```
end
```

```
% gr'afica de las sumas parciales y de la funci'on diente de sierra
plot(x, s, 'r', x, f, 'b'),grid;
```

```
% Fin del programa fousin.m
```

### 5.6 Programa: fejsin.m

```
function fejer(m)
```

```
% Sumas de Fejer de
```

```
% la funci'on diente de sierra
```

```
%  $f(x) = -x/2 - \pi/2$  si  $-\pi < x < 0$ 
```

```

%      -x/2+pi/2 si 0<x<pi
%
% m es el n'umero de sumandos

% Funci'on diente de sierra
x = -pi:0.001:pi;
f=(-x/2-pi/2).*(x<0)+(-x/2+pi/2).*(x>0);

% sumas parciales de Fejer
fej=zeros(size(x));
for n=1:m
    s = zeros(size(x));
    for k=1:n
        s=s+(1/k).*sin(k*x);
    end
    fej=fej+s;
end
fej=fej/(m+1);

% gr'afica de las sumas de Fejer y de la f. diente de sierra
plot(x, fej, 'r', x, f, 'b'),axis([-4 4 -2 2]),grid;

% Fin del programa fejsin.m

```

## Referencias

- [A] T.M. Apostol. *Análisis Matemático, Segunda Edición*, Reverté, Barcelona, 1982.
- [B] N.K. Bary. *A Treatise on Trigonometric Series*, Pergamon Press, Oxford, 1964.
- [Be] D. Bernouilli. *Réflexions et éclaircissements sur les nouvelles vibrations des cordes exposées dans les mémoires de l'Académie de 1747 et 1748*, Hist. de l'Acad. Roy. de Berlin, **9** (1753), pp. 147-172 y pp. 173-195.
- [Bo] M. Bôcher. *On Gibbs's Phenomenon*, J. reine angew. Math, **144** (1914), pp. 41-47.
- [Boy] C.B. Boyer. *Historia de la matemática*, Alianza Universidad Textos, Madrid, 1987.

- [Br] R.L. Bracewell. *Jean Baptiste Fourier*, en el libro *Grandes Matemáticos*, Colección Temas de Investigación y Ciencia, 1, Prensa Científica S.A., Barcelona, 1995.
- [C] H.S. Carslaw. *An Introduction to the Theory of Fourier's Series and Integrals*, Dover, Nueva York, 1952.
- [CGI] K. Chen, P. Giblin y A. Irving. *Mathematical Explorations with MATLAB*, Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
- [CH] S.L. Campbell y R. Haberman. *Introducción a las Ecuaciones Diferenciales con problemas de valor de frontera*, McGrawHill, México, 1998.
- [D1] J.R. d'Alembert. *Recherches sur la courbe que forme une corde tendüe mise en vibration*, Hist. de l'Acad. Roy. de Berlin, 3 (1747), pp. 214-219 y *Suite des recherches*, 3 (1747), pp. 220-249.
- [D2] J.R. d'Alembert, *Addition au mémoire sur la courbe que forme une corde tendüe, mise en vibration*, Hist. de l'Acad. Roy. de Berlin, 6 (1750), pp. 355-360.
- [Di] P.A.M. Dirac. *The Principles of Quantum Mechanics*, Cuarta edición, Oxford University Press, Oxford, 1958.
- [Du] J. Duoandikoetxea. *Análisis de Fourier: historia y aplicaciones recientes*, pp. 11-43 en [Z].
- [F] L. Fejér. *Untersuchungen über Fouriersche Reihen*, Math. Annalen, 58, (1904), pp. 51-69.
- [Fo] J. Fourier, *Théorie analytique de la chaleur*, Jacques Gabay, París, 1988. (reedición del trabajo inicialmente editado por Firmin Didot, Père et Fils, en París en 1822).
- [G] J.W. Gibbs. *Fourier's series*, cartas en *Nature*, 59, (1898), p. 606 y 59, (1899), p.606. (También en *Collected Works*, v. 2, Longmans, Green and Co., 1931, pp. 258-260.)
- [Go] D. Gottlieb y Chi-Wang Shu. *On the Gibbs Phenomenon and Its Resolution*, SIAM Review, 39, 4, (1997), pp. 644-668.
- [H] E. Hairer y G. Wanner. *Analysis by Its History*, Springer Verlag, Nueva York, 1996.

- [HDR] Th. L. Harman, J. Dabney y N. Richert. *Advanced Engineering Mathematics using MATLAB V.4*, PWS, Boston, 1997.
- [HH] E. Hewitt y R.E. Hewitt. *The Gibbs-Wilbraham phenomenon: An episode in Fourier analysis*, *Hist. Exact Sci.*, **21** (1979), pp. 129-160.
- [K] D.J. Korteweg y G. de Vries. *On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves*, *Philos. Meq.*, **39** (1895), pp. 422-423.
- [L] C. Lanczos. *Discourse on Fourier Series*, Oliver & Boyd, Edimburgo, 1966.
- [Lu] N. Luzin. *Function: Part I*, *Amer. Math. Monthly*, **105** (1998), pp. 59-67; *Part II*, pp. 263-270.
- [M] T. Myint-U. *Partial Differential Equations of Mathematical Physics*, cap. 5, Elsevier North Holland, Nueva York, 1980.
- [N] A. Nachbin. *Some Mathematical Models for Wave Propagation*, *Cubo Matemática Educacional*, **3**, 1, (2000), pp. 297-315.
- [Na] R.K. Nagle y E.B. Saff. *Fundamentos de ecuaciones diferenciales*, Addison-Wesley Iberoamericana, Buenos Aires, 1992.
- [R] R. Rodríguez del Río. *Matemáticas en el Aula de Informática*, pp. 145-210 en [Z].
- [S] C. Sánchez del Río. *Los principios de la Física en su evolución histórica*, Editorial Complutense, Madrid, 1986.
- [Sc] L. Schwartz. *Théorie des Distributions*, Hermann, París, 1973.
- [Si] G.F. Simmons. *Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones y notas históricas, segunda edición*, McGrawHill, Madrid, 1993.
- [So] A. Sommerfeld. *Partial Differential Equations in Physics*, Academic Press, Nueva York, 1949.
- [Sp] M.R. Spiegel, J. Liu y L. Abellanas. *Fórmulas y tablas de Matemática Aplicada, segunda edición*, McGrawHill, Madrid, 2000.
- [St] G. Strang. *Introduction to Applied Mathematics*, Wellesley-Cambridge Press, Wellesley, Massachusetts, 1986.

- [V] I.M. Vinográdov (director) *Enciclopedia de las Matemáticas*, Mir-Rubiños, Madrid, 1994.
- [W] H. Wilbraham. *On a certain periodic function*, Cambridge & Dublin Math. J., **3** (1848), pp. 198-201.
- [Zi] D.G. Zill. *Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones de modelado, sexta edición*, México, 1997.
- [Z] E. Zuazua (director) *Temas relevantes de la Matemática actual: el reto de la Enseñanza Secundaria*, Centro de publicaciones del Ministerio de Educación, Cultura y Deportes/UIIMP, Madrid, 2000.
- [Zy] A. Zygmund. *Trigonometrical Series*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1968.