Cubo Matemática Educacional
Vol. 4, Nº1, MAYO 2002

CUADRATURA DE RECTÁNGULOS

Francisco J. Solis y Brenda Tapia
CIMAT
Apartado Postal 402
Guanajuato Gto. México - 36000

Resumen

Se considera un algoritmo usado por los Babilonios para resolver un problema geométrico con la ayuda de la teoría de sistemas dinámicos discretos. El problema consiste en encontrar un cuadrado con área igual al área de un rectángulo dado. Se brindan algunas ideas básicas de la teoría de sistemas dinámicos discretos y con su ayuda se generalizan tanto el algoritmo como el problema geométrico.

1 Introducción

Los Babilonios vivieron en Mesopotamia hacia finales del siglo IV A.C. Desarrollaron una forma abstracta de escritura basada en símbolos cuneiformes, los cuales fueron escritos en tablas de arcilla mojadas cocidas al sol. Aproximadamente unas trescientas tablas se relacionan con la matemática y unas doscientas de estas representan tablas de multiplicar, de recíprocos, de cuadrados, cubos, raíces cuadradas, raíces cúbicas, etc. Muchas de sus tablas matemáticas son resultado de combinaciones de pesos y medidas, las cuales eran necesarias para su vida diaria. Los Babilonios fueron pioneros en el sistema de medición del tiempo; introdujeron el sistema sexagesimal, el cual sigue vigente en la actualidad. El sistema de numeración babilónico tuvo una gran desventaja debido a la carencia del número cero. Los Babilonios usaban la formula $ab = \frac{(a+b)^2 - a^2 - b^2}{2}$ para multiplicar. La división fue un arduo proceso para ellos pues no tenían un algoritmo completo, en su lugar se basaron en el hecho de que $\frac{a}{b} = ab^{-1}$, por lo que les fue necesario tener una tabla de recíprocos y dado que su notación numérica es en base 60, la tabla consta de los recíprocos del 2 hasta el 58. Esta tabla tiene algunos espacios vacios, por ejemplo no hay recíproco de 7, 11, 13, 14, 17, etc. La razón es que si se quiere calcular $\frac{1}{7}$ en la base sexagesimal se obtiene la sucesión $8, 34, 17, 8, 34, 17, \ldots$ Es decir es una repetición infinita de tres números, la cual origina lo que se llama una órbita periódica de período tres de cierto sistema dinámico. A continuación se plantea un problema que de manera natural permite introducir conceptos básicos de la teoría de sistemas dinámicos.

2 Problema

Los Babilonios usaban un método interesante de extracción de raíces cuadradas. Su método lo podemos estudiar geométricamente al analizar el problema de encontrar un cuadrado con área igual al área de un rectángulo dado. Este problema puede ser resuelto mediante un proceso que contiene una sucesión de rectángulos con área igual al área del rectángulo inicial. El proceso consiste en:

A partir del rectángulo inicial se construye un nuevo rectángulo con las siguientes características

1) La longitud de su base es el promedio de las longitudes del rectángulo inicial.
2) Su altura es el cociente del área del rectángulo inicial y la longitud de la base.

Si este rectángulo no es un cuadrado, se procede a construir otro rectángulo siguiendo los pasos 1 y 2 tomando como rectángulo inicial, el previamente obtenido.

El proceso anterior da origen a las siguientes preguntas:

a) ¿Las sucesión de rectángulos convergerá a un cuadrado?
b) En caso de convergencia, ¿la longitud del cuadrado será igual a la raíz cuadrada del área del rectángulo inicial?

c) ¿Para que rectángulos es cierto esto?

El proceso anteriormente descrito, puede ser puesto en términos matemáticos como sigue:

Sean x_o y y_o las dimensiones del rectángulo inicial y sea $\lambda = x_o y_o$ su área. En cada paso, el rectángulo obtenido tiene como dimensiones:

$$x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2} \tag{2.1}$$

$$y_{n+1} = \frac{\lambda}{x_{n+1}} \tag{2.2}$$

Sustituyendo la ecuación (2.2) en (2.1) se obtiene que

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + \frac{\lambda}{2x_n} \tag{2.3}$$

lo cual genera un sistema dinámico discreto. La teoría de sistemas dinámicos es muy extensa, a continuación se brinda una breve introducción de esta teoría que facilita la solución del problema así como la respuesta a las preguntas de interés mencionadas anteriormente.

3 Sistemas Dinámicos Discretos

La evolución temporal de un sistema está descrita por las iteraciones de una sola función f, donde $f : X \to X$ definida en cierto conjunto X que recibe el nombre de espacio fase. Un sistema dinámico discreto es definido por el par (X, f).

Si el sistema se encuentra en estado inicial x_o, su evolución temporal corresponde a la sucesión $\{x_o, x_1, x_2, \dots\}$ también llamada órbita de x_o la cual se obtiene recursivamente:

$$x_{k+1} = f(x_k) \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

es decir $x_1 = f(x_o)$, $x_2 = f(x_1) = f(f(x_o))$, etc.

Para un sistema dinámico dado por $x_{k+1} = f(x_k)$ con $f : X \to X$ se dice que $\psi \in X$ es un punto fijo del sistema si $f(\psi) = \psi$. Por lo que la orbita de ψ esta dada por la sucesión constante $\{\psi\}_{k=0}^{\infty}$.

Los puntos fijos se clasifican de acuerdo al comportamiento de las órbitas de puntos iniciales cercanos a ellos, por ejemplo si ψ es un punto fijo de $x_{k+1} = f(x_k)$, se dice que ψ es un punto fijo atractor si $|f'(\psi)| < 1$.

Si ψ es un punto fijo atractor entonces existe una vecindad abierta (un intervalo abierto) de este punto con la propiedad de que las órbitas de sus elementos convergen a ψ.

Sea ψ un punto fijo de f y consideremos el conjunto de puntos

$$C(\psi) = \left\{ x \in X \mid \lim_{k\to\infty} f^k(x) = \psi \right\}$$

donde $f^k(x)$ representa $f(f^{k-1}(x))$. Al intervalo abierto que contenga a C denotado por $C(\psi)^\circ$ se le llama la cuenca de atracción de ψ (en términos más estrictos se define a la cuenca de atracción usando conjuntos abiertos pero para nuestros fines esto no es necesario). La cuenca de atracción de ψ es el conjunto de condiciones (estados) iniciales que convergen al punto fijo ψ.

Sea ψ un punto fijo de $x_{n+1} = f(x_n)$, con f una función cuya derivada es continua y tal que $|f'(\psi)| < K < 1$. Usando el teorema del valor medio, regla de la cadena y el hecho de que la derivada de f es continua se obtiene que:

Si $\epsilon > 0$ es suficientemente pequeño y si x está suficientemente cerca de ψ (es decir $|x - \psi| < \delta(\epsilon)$) entonces

$$|x - \psi|(K - \epsilon)^n < |f^n(x) - \psi| < (K + \epsilon)^n |x - \psi| \tag{3.4}$$

4 Resultados

El único punto fijo del sistema

$$x_{n+1} = f(x_n) \equiv \frac{1}{2}x_n + \frac{\lambda}{2x_n}$$

con $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ es $x = \sqrt{\lambda}$. Como $|f'(\sqrt{\lambda})| = 0$ entonces dicho punto fijo es atractor. Por lo que en una vecindad de $x = \sqrt{\lambda}$ se tiene que la sucesión $\{x_n\}$ converge a $\sqrt{\lambda}$. De este hecho se puede concluir que para rectángulos con longitudes de bases cercanas al punto fijo siempre se obtiene un cuadrado con longitud igual a la raíz cuadrada del área del rectángulo inicial.

El punto fijo $x = \sqrt{\lambda}$ además de ser atractor satisface que $|f'(\sqrt{\lambda})| = 0$. A este tipo de puntos fijos se les conoce como superatractores, lo cual significa que las órbitas convergen de manera exponencial, ver (3.4). Si se considera una condición inicial cercana (menor que un $\epsilon > 0$ dado) al punto fijo la aproximación cumple que

$$|f^n(x) - \sqrt{(\lambda)}| < \epsilon^n |x - \sqrt{\lambda}| \tag{4.5}$$

lo cual da una buena cota para el número de iteraciones.

Afortunadamente la cuenca de atracción del sistema dinámico consiste del intervalo $(0, \infty)$ por lo cual no es necesario escoger longitudes de base cercanas al punto fijo. De hecho cualquier longitud inicial convergerá al cuadrado requerido.

Dado que el proceso de cuadrar un rectángulo requiere relativamente de pocos pasos, dicho proceso es muy rápido cuando se requiera una precisión determinada. Por ejemplo, si se tiene un rectángulo de dimensiones dos y uno, y se requiere una precisión en milésimas, en teoría solo se necesitan pocas iteracciones. En la Figura 1 se muestra el número exacto de iteracciones necesarias en la práctica para condiciones iniciales en el intervalo (0,400) con una precisión de 10^{-4}. Nótese que este número exacto es la cota ideal que difiere de la cota dada por (4.5).

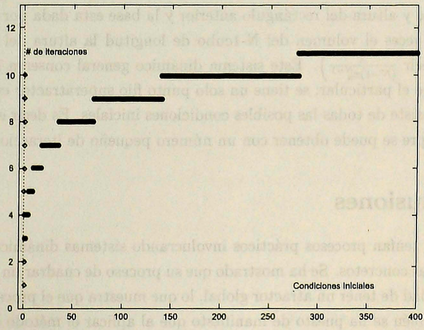

Figura 1. Número de iteraciones para cuadrar rectángulos

4.1 Generalización

El problema de cuadrar un rectángulo puede ser generalizado si se observa que el sistema dinámico obtenido surge de aplicar el método de Newton a la función $f(x) = x^2 - \lambda$. Es decir se buscan los ceros de la ecuación $x^2 - \lambda = 0$. El método de Newton aplicado a la función $f(x)$ es un sistema dinámico dado por

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

El problema de cuadratura se puede generalizar considerando ahora la función $f_N(x) = x^N - \lambda$ de la cual obtenemos el sistema dinámico:

$$x_{n+1} = \left(1 - \frac{1}{N}\right) x_n + \frac{\lambda x_n^{1-N}}{N}$$

El proceso anterior puede ser descrito geométricamente al querer obtener un cuadrado de longitud igual a la raíz N-esima de cierto número, digamos λ. Se toma un rectángulo inicial de altura arbitraria, x_o, entonces la base estará dada por λx_o^{N-1}. A partir de este rectángulo inicial se construye una sucesión de rectángulos con la propiedad de que la altura de cada rectángulo sea el promedio $\frac{N-1}{N}$ veces la suma de la base y altura del rectángulo anterior y la base esta dada por el cociente de λ y $N - 1$ veces el volumen del N-1cubo de longitud la altura del rectángulo anterior $\left(\text{es decir } \frac{\lambda}{(N-1)x_n^{N-1}}\right)$. Este sistema dinámico general conserva las mismas propiedades que el particular; se tiene un solo punto fijo superatractor cuya cuenca de atracción cosiste de todas las posibles condiciones iniciales. Es decir el cuadrado requerido siempre se puede obtener con un número pequeño de iteracciones.

5 Conclusiones

Los Babilonios tenían procesos prácticos involucrando sistemas dinámicos para resolver problemas concretos. Se ha mostrado que su proceso de cuadrar un rectángulo tiene la propiedad de tener un atractor global, lo que muestra que el proceso siempre converge. También se ha puesto de manifiesto que al aplicar el método de Newton se obtuvo una generalización del problema planteado. De hecho, el método de Newton da origen a numerosos sistemas dinámicos con orden de complejidad bastante elevado. Se invita al lector a aplicar este método a funciones reales sin raíces y a observar el comportamiento de sus órbitas.

Referencias

[1] **Neugebauer, O.**, *The Exact Sciences in Antiquity*, Dover Publications Inc., New York, 1969.

[2] **Boyer, C.**, *A History of Mathematics*, Wiley International, New York, 1976.

[3] **Devaney, R.**, *An introduction to Chaotic Dynamical Systems*, Addison-Wesley, 1985.

[4] **Dahlquist, G.**, *Numerical Methods*, Prentice Hall, London, 1974.