Cubo Matemática Educacional
Vol. 3., N°1, ENERO 2001

Subálgebras Densas de Funciones Diferenciables

Jorge Mujica

IMECC-UNICAMP
Caixa Postal 6065,
13083-970 Campinas, SP, Brasil
e-mail: mujica@ime.unicamp.br

1. Introducción

Un teorema clásico del matemático alemán Karl Weierstrass [4], publicado en 1885, afirma que toda función continua en $[a, b]$, con valores reales, puede ser uniformemente aproximada por polinomios de una variable real, con coeficientes reales.

En 1937 el matemático norteamericano Marshall Stone [3] obtuvo una notable generalización del teorema de aproximación de Weierstrass. Este teorema, que enunciamos a continuación, pasó a ser conocido como teorema de Stone-Weierstrass.

Teorema de Stone-Weierstrass. *Sea X un espacio topológico de Haussdorf y completamente regular. Sea A una subálgebra de $C(X)$. Para que A sea densa en $C(X)$ es necesario y suficiente que se verifiquen las siguientes condiciones:*
(a) Dados $x, y \in X$, con $x \neq y$, existe $f \in A$ tal que $f(x) \neq f(y)$.
(b) Dado $x \in X$, existe $f \in A$ tal que $f(x) \neq 0$.

$C(X)$ denota el álgebra de todas las funciones continuas en X, con valores reales. Siempre consideraremos $C(X)$ con la topología compacto-abierta, o sea la topología de la convergencia uniforme sobre los subconjuntos compactos de X.

En 1949 el matemático brasileño Leopoldo Nachbin [1] obtuvo el siguiente teorema, que puede ser considerado como una versión del teorema de Stone-Weierstrass para funciones diferenciables.

Teorema de Nachbin. *Sea Ω un subconjunto abierto de $\boldsymbol{R}^n$, y sea A una subálgebra de $C^k(\Omega)$. Para que A sea densa en $C^k(\Omega)$ es necesario y suficiente que se verifiquen las siguientes condiciones:*
(a) Dados $x, y \in \Omega$, con $x \neq y$, existe $f \in A$ tal que $f(x) \neq f(y)$.
(b) Dado $x \in \Omega$, existe $f \in A$ tal que $f(x) \neq 0$.
(c) Dados $x \in \Omega$ y $t \in \boldsymbol{R}^n$, con $t \neq 0$, existe $f \in A$ tal que $\frac{\partial f}{\partial t}(x) \neq 0$.

$C^k(\Omega)$ denota el álgebra de todas las funciones de clase C^k en Ω, con valores reales, o sea, las funciones $f : \Omega \to \mathbf{R}$ que admiten derivadas parciales continuas hasta el orden k. Siempre consideraremos $C^k(\Omega)$ con la topología compacto-abierta de orden k, o sea la topología de la convergencia uniforme de las funciones y sua derivadas parciales hasta el orden k, sobre los subconjuntos compactos de Ω.

Como el teorema de Nachbin es muy bonito, pero parece ser poco conocido, presentaremos aquí una demostración completa del mismo. La demostración que veremos aquí esta basada en la demostración original de Nachbin, pero es mucho más detallada. Para entender la demostración, basta estar familiarizado con álgebra lineal, análisis en $\mathbf{R}^n$ y topología general.

2. Resultados Auxiliares

Para demostrar el teorema de Nachbin utilizaremos el teorema siguiente, que es una generalización del teorema de aproximación de Weierstrass, y que puede ser demostrado adaptando la demostración original del propio Weierstrass, como lo hace Narasimhan en [2, pags. 33-34].

Teorema de aproximación de Weierstrass. *Sea Ω un subconjunto abierto de $\boldsymbol{R}^n$. Entonces los polinomios de n variables reales, con coeficientes reales, forman una subálgebra densa de $C^k(\Omega)$.*

De este teorema se deduce fácilmente el corolario siguiente.

Corolario. *La clausura en $C^k(\boldsymbol{R}^n)$ de la subálgebra de todos los polinomios de n variables reales, con coeficientes reales y sin término constante, es la subálgebra de todas las $g \in C^k(\boldsymbol{R}^n)$ tales que $g(0) = 0$.*

Para demostrar el teorema de Nachbin, necesitaremos también los dos lemas siguientes.

Lema 1. *Sea Ω un subconjunto abierto de $\boldsymbol{R}^n$. Sea $N \geq n$ y supongamos que las funciones $f_1, ..., f_N \in C^k(\Omega)$ verifiquen las siguientes condiciones:*

(a) La aplicación $F = (f_1, ..., f_N) : \Omega \to \mathbf{R}^N$ es un homeomorfismo entre Ω y

su imagen en $\mathbf{R}^N$.

(b) La matriz jacobiana

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\right)_{1\leq i\leq N, 1\leq j\leq n}$$

tiene rango n para cada $x \in \Omega$.

Entonces para cada función $g \in C^k(\Omega)$ y cada punto $a \in \Omega$, existen un entorno abierto W de $F(a)$ en $\mathbf{R}^N$ y una función $\tilde{g} \in C^k(W)$ tales que

$$g(x) = \tilde{g}(f_1(x), ..., f_N(x))$$

para cada $x \in F^{-1}(W)$.

Dem. Fijemos $g \in C^k(\Omega)$ y $a \in \Omega$. Usando (b) y reordenando las funciones f_i, podemos suponer que la matriz cuadrada $(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a))_{1\leq i,j\leq n}$ sea invertible. Aplicando el teorema de la aplicación inversa obtenemos un entorno abierto U de a en Ω y un subconjunto abierto V de $\mathbf{R}^n$ tales que la aplicación $(f_1, ..., f_n) : U \to V$ es una biyección, cuya inversa $\psi : V \to U$ es también una aplicación de clase C^k. Sea $W = V \times \mathbf{R}^{N-n}$ y definamos $\tilde{g} \in C^k(W)$ por

$$\tilde{g}(y_1, ..., y_N) = g \circ \psi(y_1, ..., y_n)$$

para cada $(y_1, ..., y_N) \in W$. Entonces

$$\tilde{g}(f_1(x), ..., f_N(x)) = g \circ \psi(f_1(x), ..., f_n(x)) = g(x)$$

para cada $x \in U$.

El lema no está probado todavía, pues no sabemos si $U = F^{-1}(W)$. Ahora bien, sigue de (a) que $F(U)$ es un subconjunto abierto de $F(\Omega)$. Luego existe un subconjunto abierto W_1 de $\mathbf{R}^N$ tal que $F(U) = W_1 \cap F(\Omega)$. Como $F(U) \subset W$, vemos que $F(U) = W \cap W_1 \cap F(\Omega)$. Como F es inyectiva, sigue que

$$U = F^{-1}(F(U)) = F^{-1}(W \cap W_1 \cap F(\Omega)) = F^{-1}(W \cap W_1).$$

Luego $W \cap W_1$ es un entorno abierto de $F(a)$ en $\mathbf{R}^N$ y

$$g(x) = \tilde{g}(f_1(x), ..., f_N(x))$$

para cada $x \in U = F^{-1}(W \cap W_1)$.

Lema 2. *Sea Ω un subconjunto abierto de $\mathbf{R}^n$. Sea $N \geq n$ y supongamos que las funciones $f_1, ..., f_N \in C^k(\Omega)$ verifiquen las siguientes condiciones:*

(a) La aplicación $F = (f_1, ..., f_N) : \Omega \to \mathbf{R}^N$ es inyectiva.

(b) La matriz jacobiana

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\right)_{1\leq i\leq N, 1\leq j\leq n}$$

tiene rango n para cada $x \in \Omega$.

Entonces para cada función $g \in C^k(\Omega)$ y cada subconjunto compacto K de Ω, existe una función $\tilde{g} \in C^k(\mathbf{R}^N)$ tal que $g(x) = \tilde{g}(f_1(x), ..., f_N(x))$ para cada $x \in K$.

Dem. Sea Ω_0 un entorno abierto y relativamente compacto de K en Ω. Entonces la restricción $F|\overline{\Omega}_0$ es un homeomorfismo entre $\overline{\Omega}_0$ y su imagen en $\mathbf{R}^N$. Luego el Lema 1 se aplica a Ω_0.

Por consiguiente, usando el Lema 1 y la compacidad de $F(K)$, podemos encontrar subconjuntos abiertos $W_1, ..., W_p$ de $\mathbf{R}^N$ y funciones $g_1 \in C^k(W_1), ..., g_p \in C^k(W_p)$ tales que

$$F(K) \subset \bigcup_{j=1}^{p} W_j$$

y

$$g(x) = g_j \circ F(x)$$

siempre que $x \in F^{-1}(W_j) \cap \Omega_0$ y $j = 1, ..., p$.

Sea $(\phi_1, ..., \phi_p)$ una partición de la unidad de $F(K)$ subordinada al recubrimiento $(W_1, ..., W_p)$, o sea $\phi_j \in C^k(\mathbf{R}^N)$, *soporte*$(\phi_j) \subset W_j$ y

$$\sum_{j=1}^{p} \phi_j(y) = 1$$

para cada $y \in F(K)$.

Definamos $\tilde{g}_1, ..., \tilde{g}_p \in C^\infty(\mathbf{R}^N)$ por $\tilde{g}_j(y) = \phi_j(y)g_j(y)$ si $y \in W_j$ y $\tilde{g}_j(y) = 0$ si $y \notin W_j$. Finalmente definamos $\tilde{g} \in C^\infty(\mathbf{R}^N)$ por

$$\tilde{g} = \sum_{j=1}^{p} \tilde{g}_j.$$

Entonces

$$\tilde{g} \circ F(x) = \sum_{j=1}^{p} \tilde{g}_j(F(x)) = \sum_{j=1}^{p} \phi_j(F(x))g(x) = g(x)$$

para cada $x \in K$.

3. Demostración del Teorema de Nachbin

Necesidad. Si x e y son dos puntos distintos de Ω, entonces

$$A \not\subset \{f \in C^k(\mathbf{R}^n) : f(x) = f(y)\},$$

puesto que A es una subálgebra densa de $C^k(\mathbf{R}^n)$, y el conjunto de la derecha es una subálgebra cerrada propia de $C^k(\mathbf{R}^n)$. Esto prueba (a). Las demostraciones de (b) y (c) son igualmente sencillas, y las dejaremos como ejercicio.

Suficiencia. Sea K un subconjunto compacto de Ω, y sea Ω_0 un entorno abierto y relativamente compacto de K en Ω.

Usando (b) y la compacidad de $\overline{\Omega}_0$, podemos encontrar funciones $f_1, ..., f_p \in A$ tales que

$$(1) \qquad (f_1(x), ..., f_p(x)) \neq (0, ..., 0)$$

para cada $x \in \overline{\Omega}_0$.

Usando (c) vemos que, dados $x \in \Omega$ y $t = (t_1, ..., t_n) \in \mathbf{R}^n$, $t \neq 0$, existe $g \in A$ tal que

$$\frac{\partial \mathrm{g}}{\partial \mathrm{t}}(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_j}(x) t_j \neq 0.$$

Esto prueba que, dado $x \in \Omega$, ningún funcional lineal no nulo en $\mathbf{R}^n$ se anula sobre todos los vectores de la forma

$$(\frac{\partial \mathrm{g}}{\partial \mathrm{x}_1}(x), ..., \frac{\partial \mathrm{g}}{\partial \mathrm{x}_n}(x)),$$

con $g \in A$. Luego estos vectores generan $\mathbf{R}^n$. Por consiguiente, para cada $x \in \Omega$ podemos encontrar funciones $g_1, ..., g_n \in A$ tales que los vectores

$$(\frac{\partial \mathrm{g_i}}{\partial \mathrm{x}_1}(x), ..., \frac{\partial \mathrm{g_i}}{\partial \mathrm{x}_n}(x)) \quad (i = 1, ..., n)$$

son linealmente independientes y, por lo tanto,

$$det(\frac{\partial \mathrm{g_i}}{\partial \mathrm{x_j}}(x))_{1 \leq i,j \leq n} \neq 0.$$

Usando el teorema de la aplicación inversa y la compacidad de $\overline{\Omega}_0$, podemos encontrar subconjuntos abiertos $V_1, ..., V_q$ de Ω y n-tuplas $(g_{k1}, ..., g_{kn}) \in A^n \quad (k = 1, ..., q)$ tales que

$$(2) \qquad \overline{\Omega}_0 \subset \bigcup_{k=1}^{q} V_k;$$

$$(3) \qquad det(\frac{\partial g_{ki}}{\partial x_j}(x))_{1\leq i,j\leq n} \neq 0$$

siempre que $x \in V_k$ y $k = 1, ..., q$; y

(4) la aplicación $x \in V_k \to (g_{k1}(x), ..., g_{kn}(x)) \in \mathbf{R}^n$ es inyectiva para cada $k = 1, ..., q$.

Consideremos el conjunto compacto

$$C = (\overline{\Omega}_0 \times \overline{\Omega}_0) \setminus \bigcup_{k=1}^{q} (V_k \times V_k).$$

Sigue de (2) que $x \neq y$ para cada $(x, y) \in C$. Usando (a) y la compacidad de C, podemos encontrar $h_1, ..., h_r \in A$ tales que

$$(5) \qquad (h_1(x), ..., h_r(x)) \neq (h_1(y), ..., h_r(y))$$

para cada $(x, y) \in C$.

Reordenemos las funciones $f_i \ (1 \leq i \leq p)$, $g_{ki} \ (1 \leq k \leq q, 1 \leq i \leq n)$, $h_i \ (1 \leq i \leq r)$ de la siguiente manera. Escribamos

$$g_{ki} = f_{p+(k-1)n+i} \ \ (1 \leq k \leq q, 1 \leq i \leq n), \quad h_i = f_{p+qn+i} \ \ (1 \leq i \leq r).$$

Sea $N = p + qn + r$. Entonces, usando (1), (2), (3), (4) y (5), vemos que las funciones $f_1, ..., f_N \in A$ verifican las siguientes condiciones:

(6) Para cada $x \in \overline{\Omega}_0$, existe i tal que $f_i(x) \neq 0$;

(7) La matriz jacobiana $(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x))_{1\leq i\leq N, 1\leq j\leq n}$ tiene rango n para cada $x \in \overline{\Omega}_0$; y

(8) Dados $x, y \in \overline{\Omega}_0$, con $x \neq y$, existe i tal que $f_i(x) \neq f_i(y)$.

En virtud de (7) y (8), el Lema 2 se aplica a Ω_0. Luego existe $\tilde{g} \in C^k(\mathbf{R}^N)$ tal que

$$(9) \qquad g(x) = \tilde{g}(f_1(x), ..., f_N(x))$$

para cada $x \in K$.

Ahora bien, sigue de (6) que la imagen de K bajo la aplicación

$$F = (f_1, ..., f_N) : \Omega_0 \to \mathbf{R}^N$$

no contiene el origen. Por lo tanto, sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\tilde{g}(0) = 0$. Aplicando el corolario del teorema de aproximación de Weierstrass vemos que, dado $\delta > 0$, podemos encontrar un polinomio P de N variables reales, con coeficientes reales y sin término constante, tal que

$$(10) \qquad \left|\frac{\partial^{l_1+...+l_N}}{\partial y_1^{l_1}...\partial y_N^{l_N}}(\tilde{g} - P)(y)\right| < \delta$$

siempre que $y \in F(K)$ y $l_1 + ... + l_N \leq k$.

Aplicando la regla de la cadena un número finito de veces vemos que, dado $\epsilon > 0$, podemos encontrar $\delta > 0$ tal que (9) y (10) impliquen que

$$\left|\frac{\partial^{k_1+...+k_n}}{\partial x_1^{k_1}...\partial x_n^{k_n}}(g(x) - P(f_1(x), ..., f_N(x)))\right| < \epsilon$$

siempre que $x \in K$ y $k_1 + ... + k_n \leq k$. Esto completa la demostración, puesto que $P \circ (f_1, ..., f_N) \in A$.

4. Comentarios Finales

El teorema de Stone-Weierstrass que vimos en la introdución caracteriza las subálgebras densas de funciones continuas. Existe otra versión, más general, que caracteriza los elementos de la clausura de una subálgebra arbitraria de funciones continuas.

Teorema de Stone-Weierstrass II. *Sea X un espacio topológico de Haussdorf y completamente regular. Sea A una subálgebra de $C(X)$, y sea $g \in C(X)$. Para que g pertenezca a $\overline{A}$ es necesario y suficiente que se verifiquen las siguientes condiciones:*

(a) Dados $x, y \in X$ tales que $g(x) \neq g(y)$, existe $f \in A$ tal que $f(x) \neq f(y)$.

(b) Dado $x \in X$ tal que $g(x) \neq 0$, existe $f \in A$ tal que $f(x) \neq 0$.

Hace ya medio siglo que Nachbin publicó el teorema que caracteriza las subálgebras densas de funciones diferenciables, pero hasta ahora no se conoce un teorema similar que caracterice los elementos de la clausura de una subálgebra arbitraria de funciones diferenciables.

Referencias

[1] **L. Nachbin**, *Sur les algèbres denses de fonctions différéntiables sur une varieté*, C. R. Acad. Sci. Paris 228 (1949), 1549-1551.

[2] **R. Narasimhan**, *Analysis on Real and Complex Manifolds*, tercera impresión, North-Holland, Amsterdam, 1985.

[3] **M. Stone**, *Applications of the theory of Boolean rings to general topology*, Trans. Amer. Math. Soc. 41 (1937), 375-481.

[4] **K. Weierstrass**, *Über die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Functionen reeler Argumente*, Sitzungsberichte der Königl. Preuss. Akademie der Wissenschaften zu Berlin (1885) 633-639, 789-805. También en: Karl Weierstrass, Mathematische Worke III, primera reimpresión, Olms y Johnson, Hildesheim y Nueva York, 1967, pags. 1-37.