Cubo Matemática Educacional
Vol. 3., N°1, ENERO 2001

Função de Correlação e Álgebra Linear

R. Mendoza
Departamento de Matemática
Universidade Federal de Pernambuco
50740-540, RECIFE-PE. BRASIL

J. Rojas
Departamento de Matemáticas
Universidade Federal da Paraíba
58059-900, J. Pessoa - PB. BRASIL

Introdução

Desde seus primordios a interação entre física e matemática tem trazido à tona resultados surpreendentes para uma melhor compreensão do mundo que nos rodeia. De fato, Newton para formular a Teoria da Gravitação Universal desenvolveu o cálculo diferencial e integral, Einstein fez uso da geometria riemanniana para formular a Teoria da Relatividade Geral. Nesta última decada teorias tais como o Modelo Sigma Não Linear Super-Simétrico [5] tem gerado uma interação forte com teoria da interseção, gravitação quântica [3], invariantes topológicos para variedades de dimensão baixa [2], etc.

Por outra parte, a tarefa de fundamentar rigorosamente e validar os resultados obtidos pelos físicos teoricos não é simples. Em particular é necessário desenvolver uma teoria de integração sobre variedades de dimensão infinita, que no caso mais conhecido corresponde a espaços de funções [1].

Nosso objetivo é apresentar um modelo matemático de um sistema físico usando conceitos de álgebra linear para obter a função de correlação de dois pontos.

Observamos que as mesmas técnicas são utilizadas para calcular a função de partição para campos fermiônicos, no lugar de campos bosônicos [4].

A seguir consideramos duas aplicações a primeira é o cálculo da transformada de Fourier de $e^{-\frac{1}{2}\langle Hx,x\rangle}$, onde H é um operador autoadjunto de $\mathbb{R}^n$, o resultado é matematicamente exato; e a segunda é o cálculo da função de correlação de dois pontos. Notamos que nesta última aplicação o resultado é rigoroso se a variedade for 0-dimensional.

1 Preliminares

A seguir definiremos algumas noções básicas inerentes à mecânica estatística.

Definição 1: *Seja S um conjunto e $E : S \to \mathbb{R}$ uma função. O par (S, E) é chamado sistema físico. Os elementos de S são chamados* **estados do sistema físico** *e E é chamada função energia.*

Definição 2: *Seja (S, E) um sistema físico.*

$$Z(\beta) = \int_S e^{-\beta E} d\mu$$

é a Função de Partição do sistema físico a temperatura T ($\beta = (kT)^{-1}$ e k é a constante de Boltzman), μ denota alguma medida sobre S escolhida de maneira que a integral acima existe.

Na verdade, em muitos casos a integral acima não é conhecida, mas em alguns casos, por um processo denominado renormalização é possível calcular Z módulo fatores multiplicativos constantes.

Definição 3: *Seja (S, E) um sistema físico. Uma função $X : S \to \mathbb{R}$ é chamada um observavel físico e sua média corresponde a:*

$$< X >= \frac{\int_S e^{-\beta E} X d\mu}{\int_S e^{-\beta E} d\mu} = \frac{\int_S e^{-\beta E} X d\mu}{Z}.$$

2 Modelo Matemático Abstracto

Nesta seção consideraremos um módelo matemático abstrato da situação física e obteremos algumas formulas rigorosas usando técnicas de Algebra Linear.

Sejam $(V, <,>)$ um espaço vetorial com produto escalar, V^* seu dual e $H : V \to V$ uma aplicação linear autoadjunta i.e. $< Hv, w >=< v, Hw > \forall v, w \in V$.

Considere $Z : V^* \to \mathbb{R}$ definido por $Z(j) = L\left(e^{-\frac{1}{2}(\langle H\bullet,\bullet\rangle + 2j)}\right)$ onde L é um operador linear definido sobre um certo subespaço de $C^\infty(V)$ sujeito à condição $L(f) = L(f_v)$ com $f_v(u) = f(u+v)$, para todo f e v em seus respectivos dominios.

Sob as condições acima podemos verificar

Proposição 1: *Suponha que existe $G : V^* \to V$ tal que*

$$< Hv, Gj > = j(v) \ \forall j \in V^*, v \in V.$$

Então

$$Z(j) = Z(0)\, e^{\frac{1}{2} j(Gj)}. \qquad (1)$$

Demonstração: Precisaremos do seguinte lema.

Lema: *Com as notações e hipóteses acima, verifica-se que*

$$\langle H(\varphi + Gj), \varphi + Gj \rangle = \langle H\varphi, \varphi \rangle + 2j(\varphi) + j(Gj)$$

Demonstração do lema:

$$\begin{aligned} \langle H(\varphi + Gj), \varphi + Gj \rangle &= \langle H\varphi + HGj, \varphi + Gj \rangle \\ &= \langle H\varphi, \varphi \rangle + \langle H\varphi, Gj \rangle + \langle HGj, \varphi \rangle + \langle HGj, Gj \rangle \\ &= \langle H\varphi, \varphi \rangle + j(\varphi) + \langle Gj, H\varphi \rangle + j(Gj) \\ &= \langle H\varphi, \varphi \rangle + 2j(\varphi) + j(Gj). \end{aligned}$$

Continuaremos com a demonstração da proposição 1.

Considere $f : V \to \mathbb{R}$ definida por $\varphi \to e^{-\frac{1}{2}\langle H\varphi, \varphi \rangle}$.

Observe que $L(f) = Z(0)$ e

$$\begin{aligned} L(f) = \quad L(f_{Gj}) &= L[e^{\left(-\frac{1}{2}\langle H(\bullet + Gj), \bullet + Gj \rangle\right)}] \\ &= L[e^{\left(-\frac{1}{2}\{\langle H\bullet, \bullet \rangle + 2j\} - \frac{1}{2}j(Gj)\right)}] \\ &= e^{-\frac{1}{2}j(Gj)} L[e^{-\frac{1}{2}\{\langle H\bullet, \bullet \rangle + 2j\}}]. \end{aligned}$$

Portanto, $Z(0) = Z(j)\, e^{-\frac{1}{2}j(Gj)}$. ■

Definição: *Para cada* $\alpha \in V^*$ *definimos*

$$\frac{\delta Z}{\delta \alpha}(j) = \frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} \{ Z(j + \varepsilon\alpha) \}.$$

Proposição 2: *Com as notações acima verifica-se que:*

$$< \alpha\beta >= \beta G \alpha = \alpha G \beta \ \forall \alpha, \beta \in V^*.$$

Demonstração: Observe que

$$\begin{aligned} \frac{\delta Z}{\delta \alpha}(j) &= \frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} \left\{ L\left[e^{-\frac{1}{2}\{\langle H\bullet, \bullet \rangle + 2j + 2\varepsilon\alpha\}} \right] \right\} \\ &= L\left[\frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} e^{-\frac{1}{2}\{\langle H\bullet, \bullet \rangle + 2j + 2\varepsilon\alpha\}} \right] \\ &= -L\left[e^{-\frac{1}{2}\{\langle H\bullet, \bullet \rangle + 2j\}} \alpha \right] \qquad (2) \end{aligned}$$

Por outra parte, temos que

$$\begin{aligned} Z(j+\varepsilon\alpha) &= Z(0)\, e^{\frac{1}{2}(j+\varepsilon\alpha)(G(j+\varepsilon\alpha))} \\ &= Z(0)\, e^{\frac{1}{2}j(Gj)} e^{\frac{1}{2}\varepsilon(jG\alpha+\alpha Gj+\varepsilon\alpha G\alpha)} \end{aligned}$$

Observe que $jG\alpha = \langle HG\alpha, Gj\rangle = \langle G\alpha, HGj\rangle = \alpha Gj$.
Portanto

$$\frac{\delta Z}{\delta\alpha}(j) = Z(0)\, e^{\frac{1}{2}j(Gj)} jG\alpha \tag{3}$$

De (1) temos que

$$\begin{aligned} \frac{\delta^2 Z}{\delta\beta\delta\alpha}(j) &= \frac{\delta}{\delta\beta}\left(\frac{\delta Z}{\delta\alpha}\right)(j) \\ &= \frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}\left\{\frac{\delta Z}{\delta\alpha}(j+\varepsilon\beta)\right\} \\ &= \frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}\left\{-L\left(e^{-\frac{1}{2}\{\langle H\bullet,\bullet\rangle+2(j+\varepsilon\beta)\}}\alpha\right)\right\} \\ &= L\left(e^{-\frac{1}{2}\{\langle H\bullet,\bullet\rangle+2j\}}\beta\alpha\right). \end{aligned}$$

De (2) temos que

$$\frac{\delta Z}{\delta\alpha}(j+\varepsilon\beta) = Z(0)\, e^{\frac{1}{2}(j+\varepsilon\beta)G(j+\varepsilon\beta)}(j+\varepsilon\beta)G\alpha.$$

Logo

$$\frac{\delta^2 Z}{\delta\beta\delta\alpha}(j) = Z(0)\, e^{\frac{1}{2}jGj}\{(jG\beta)(jG\alpha)+\beta G\alpha\}.$$

Se $j=0$, então $L\left(e^{-\frac{1}{2}\langle H\bullet,\bullet\rangle}\beta\alpha\right) = Z(0)\,\beta G\alpha$. Portanto, $\langle\beta\alpha\rangle = \beta G\alpha = \alpha G\beta$. ∎

3 Aplicações

Aplicaremos o modelo desenvolvido acima nos seguintes 2 casos:

Exemplo 1: Calcularemos a transformada de Fourier de $e^{-\frac{1}{2}<H\bullet,\bullet>}$ com H um operador autoadjunto.

Considere $\mathbb{R}^n$ com o produto escalar usual, $\langle,\rangle$. Identificaremos $\mathbb{R}^n$ e $(\mathbb{R}^n)^*$ mediante a seguinte aplicação:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \to & (\mathbb{R}^n)^* \\ e_i & \to & e^i, \end{array}$$

onde $\{e_i\}$ e $\{e^i\}$ denotam a base canônica de $\mathbb{R}^n$ e a base dual respectivamente.

Seja $\widetilde{H} : \mathbb{R}^n \to (\mathbb{R}^n)^*$ a aplicação linear associada a H pela identificação acima.

Considere L o funcional definido pela integração sobre $\mathbb{R}^n$.

Assim

$$Z(j) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{2}\{\langle H\bullet,\bullet\rangle + 2j\}} d\widetilde{x}$$

onde $d\widetilde{x} = \frac{dx}{(2\pi)^{n/2}}$ e dx denota a medida de Lebesgue usual em $\mathbb{R}^n$.

Portanto,

$$Z(0) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{2}\langle H\bullet,\bullet\rangle} d\widetilde{x} = \frac{1}{\sqrt{\det H}}.$$

Finalmente observe que para $j = i\xi$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, podemos definir

$$\begin{array}{cccc} i\xi : & \mathbb{R}^n & \to & i\mathbb{R} \approx \mathbb{R} \\ & v & \longmapsto & i\langle \xi, v\rangle \end{array}$$

Assim, temos que

$$\begin{aligned} Z(i\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{2}\langle H\bullet,\bullet\rangle} e^{-i\xi\bullet} d\widetilde{x} \\ &= \left[e^{-\frac{1}{2}\langle H\bullet,\bullet\rangle}\right]^{\wedge}(\xi) \\ &= Z(0)\, e^{i\xi(Gi\xi)} \end{aligned}$$

onde $G : (\mathbb{R}^n)^* \to \mathbb{R}^n$ corresponde, módulo as identificações assinaladas acima, a H^{-1}.

Portanto,

$$\left[e^{-\frac{1}{2}\langle H\bullet,\bullet\rangle}\right]^{\wedge}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\det H}} e^{-\frac{1}{2}<\xi, G\xi>}.$$

Exemplo 2: Seja $(\mathcal{U}, g)$ uma variedade riemanniana de dimensão n, com métrica g ([6]). Considere o seguinte sistema físico: $S = C^\infty(\mathcal{U})$ e

$$\begin{array}{cccc} E: & C^\infty(\mathcal{U}) & \to & \mathbb{R} \\ & \varphi & \to & \frac{1}{2} < H\varphi, \varphi > \end{array}$$

onde $H : C^\infty(\mathcal{U}) \to C^\infty(\mathcal{U})$ é um operador autoadjunto definido positivo e $<,>$ é um produto escalar definido por:

$$< \varphi, \psi > = \int_{\mathcal{U}} \varphi(x)\psi(x) v_g$$

onde v_g é a forma de volume determinada por g.

Observe que $<,>$ na verdade, é definido num subespaço de $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{U})$, mas, como foi anunciado na introdução os calculos são levados à frente de uma maneira heurística.

Em relação ao modelo matemático (seção 2), considere: $V = \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U})$, H citado acima e $\alpha = \delta_p, \beta = \delta_q \in (\mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}))^*$ definidas por $\delta_p(\varphi) = \varphi(p)$ e $\delta_q(\varphi) = \varphi(q)$ respectivamente.

De fato, o valor médio do observável $X : V \to \mathbb{R}$ definida por:

$$X(\varphi) = C_{p,q}(\varphi) = \varphi(p)\varphi(q).$$

É chamada *função de correlação de dois pontos.*

Portanto, segue da proposição 2, seção 2 que $\langle C_{p,q}\rangle = \langle\alpha\beta\rangle = \beta G\alpha$.

Na comunidade física identifica-se cada elemento $T \in V^\bullet$ com uma integral, no seguinte sentido

$$T(\varphi) = \int_{\mathcal{U}} T(x)\varphi(x)v_g.$$

Portanto

$$\begin{aligned}\delta_p(G\delta_q) &= \int_{\mathcal{U}} \delta_p G\delta_q v_g\\ &= \int_{\mathcal{U}} \delta_p(x)\left[\int_{\mathcal{U}} G(x,y)\delta_q(y)\,v_g\right]v_g\\ &= G(p,q).\end{aligned}$$

Observamos que $G(p,q)$ é o núcleo de Schwartz, associado ao operador G [5].

Se consideramos $\mathcal{U} = \mathbb{R}^3, H = -\Delta_g + m^2$ e g a métrica usual, mostra-se que

$$G(p,q) = \tfrac{e^{-m|p-q|}}{4\pi|p-q|}.$$

Neste caso $G(p,q)$ é função de Green associada ao operador H.

Observamos que o rigor matemático aliado ao raciocínio físico nos permitiu verificar um resultado conhecido, como também conjeturar a solução de outro problema.

Referências

[1] **Glimm J. & Jaffe A.** *Quantum Physics*, Springer Verlag, 1987.

[2] **Atiyah M.**, *The Geometry and Physics of Knots,* Cambridge University Press, 1990.

[3] **Baez J. & Muniain J.**, *Gauge Fields, Knots and Gravity,* World Stientific, 1994.

[4] **Itzykson C. & Drouff J.**, *Statistical Field Theory,* Cambridge University Press, 1992.

[6] **Aspinwall P. S. & Morrison D. R.**, *Topological Field and Rational Curves,* Commun. Math. Phys, 151, 245-262, 1993.

[7] **Do Carmo M.**, *Geometria Riemanniana,* IMPA, 1979.

[8] **Ehrenpreis L.**, *On the theory of kernels of Schwartz,* Proceedings of the American Mathematical Society, vol. 7, 1956.