Cubo Matemática Educacional
Vol. 3., N°1, ENERO 2001

Difféomorphismes du cercle et déformations des produits croisés

Alain Guichardet

Centre de Mathématiques
Ecole Polytechnique
U.R.A. 169 du C.N.R.S.
91128 Palaiseau Cedex
FRANCE

Résumé. On cherche à comprendre pourquoi la même "condition diophantienne" intervient dans l'étude de la conjugaison des difféomorphismes du cercle et dans celle de la cohomologie de Hochschild de certaines algèbres produits croisés.

ABSTRACT. We try to understand why the same "diophantine condition" appears both in the study of the conjugation of the diffeomorphisms of the circle, and in that of the Hochschild cohomology of some crossed product algebras.

1 Introduction.

1.1 Résultat de Yoccoz.

On désigne par θ un réel irrationnel et par R_θ la rotation correspondante du cercle $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$; on dit que θ est *diophantien* (ou *mal approché par les rationnels*) si la suite $(e^{2\pi in\theta} - 1)^{-1}$ est à croissance lente; on rappelle qu'à tout difféomorphisme C^∞ positif du cercle on peut associer son *nombre de rotation*, élément du cercle. J.C. Yoccoz([6]), améliorant un résultat de M. Herman ([5]), a démontré ce qui suit:

Théorème. *Si le nombre de rotation θ d'ún difféomorphisme C^∞ positif φ du cercle est diophantien, φ est C^∞ conjugué à R_θ.*

1.2 Produits croisés.

Soit A une algèbre sur un corps k, G un groupe opérant dans A par automorphismes notés α_g; le *produit croisé* $A \times_\alpha G$ est l'ensemble des combinaisons linéaires d'élements notés $a \cdot \varepsilon_g$, $a \in A$, $g \in G$, avec le produit $(a \cdot \varepsilon_g) \cdot (a' \cdot \varepsilon_{g'}) = a \cdot \alpha_g(a') \cdot \varepsilon_{gg'}$; si A est munie d'une topologie, on complète convenablement ce produit croisé.

Exemples. Notons respectivement $\mathcal{P}(\mathbb{T})$ et $C^\infty(\mathbb{T})$ l'algèbre des polynômes trigonométriques sur $\mathbb{T}$ et celle des fonctions $\mathbb{C}^\infty$ sur $\mathbb{T}$; posons $e_n(x) = e^{2\pi i n x}$; toute rotation irrationnelle R_θ définit un automorphisme de ces deux algèbres, d'où des actions α du groupe $\mathbb{Z}$; l'algèbre $\mathcal{P}(\mathbb{T}) \times_\alpha \mathbb{Z}$ admet pour base les éléments $e_n \cdot \varepsilon_k$ où n et k sont dans $\mathbb{Z}$, avec le produit

$$(e_n \cdot \varepsilon_k) \cdot (e'_n \cdot \varepsilon'_k) = e^{2\pi i k n' \theta} \cdot e_{n+n'} \cdot \varepsilon_{k+k'}$$

par contre l'algèbre $C^\infty(\mathbb{T}) \times_\alpha \mathbb{Z}$, notée traditionnellement $\mathbb{A}_\theta$, est l'ensemble des séries $\sum_{n,k} c_{n,k} e_n \cdot \varepsilon_k$ où la suite $(c_{n,k})$ est à décroissance rapide.

1.3 Un calcul de A. Connes.

A. Connes [2] a calculé la cohomologie cyclique de l'algèbre A_θ et constaté que le résultat dépend fondamentalement de la nature diphantienne ou non diophantienne de θ; en fait tous les calculs d'homologie ou de cohomologie de Hochschild de cette algèbre font apparaître le même phénomène - qui, par contre, n'apparaît pas lorsque l'on considère l'algèbre $\mathcal{P}(\mathbb{T}) \times_\alpha \mathbb{Z}$; la raison en est que, si l'on considère des suites (c_n) à support fini avec $c_0 = 0$, on peut toujours les multiplier par la suite $(e^{2\pi i n\theta} - 1)^{-1}$, mais que, dons le cas des suites à décroissance rapide, ce n'est possible que si la même suite $(e^{2\pi i n\theta} - 1)^{-1}$ est à croissance lente. Le but de ce travail est de tenter de mieux comprendre pourquoi la même condition diophantienne intervient dans l'étude de la conjugaison des difféomorphismes du cercle et dans celle de la cohomologie de Hochschild de l'algèbre $\mathbb{A}_\theta$ (en fait, de $H^2(\mathbb{A}_\theta, \mathbb{A}_\theta)$). La réponse que nous donnerons à cette question est la suivante : dans les deux cas, on étudie des espaces de déformations qui se trouvent être identiques à l'ordre 1. Pour cela nous ferons appel à la théorie des deformations de certaines structures algébriques. En ce qui concerne la cohomologie de Hochschild des algèbres associatives, on pourra consulter par exemple [3] ou [1].

2 Déformations à l'ordre 1.

2.1 Généralités.

On désignera toujours par k un corps commutatif; notons $\tilde{k}$ l'anneau $k[h]/(h^2)$. Si X est un k-espace vectoriel, $\tilde{X}$ désignera le $\tilde{k}$-module $X \oplus X$ avec l'opération externe $(\lambda_0 + h\lambda_1) \cdot (x_0 + hx_1) = \lambda_0 x_0 + h(\lambda_0 x_1 + \lambda_1 x_0)$. Si X et Y son deux k-espaces vectioriels, les applications $\tilde{k}$-linéaires $\tilde{X} \to \tilde{Y}$ sont les applications de la forme $x_0 + hx_1 \to f_0(x_0) + h(f_0(x_1) + f_1(x_0))$ où f_0 et f_1 sont des applications k-linéaires $X \to Y$. De même les applications $\tilde{k}$-bilinéaires $\tilde{X} \times \tilde{Y} \to \tilde{Z}$ sont les applications de la forme

$$(x_0 + hx_1, y_0 + hy_1) \to f_0(x_0, y_0) + h(f_0(x_1, y_0) + f_0(x_0, y_1) + f_1(x_0, y_0)) .$$

En particulier, si A est une k-algèbre, on peut définir une multiplication sur $\tilde{A}$ par

$$(a_0 + ha_1) \cdot (b_0 + hb_1) = a_0b_0 + h(a_0b_1 + a_1b_0) .$$

2.2 1-déformations d'algèbres associatives.

Une *1-déformation* d'une algèbre associative A est une structure de $\tilde{k}$-algèbre associative sur le $\tilde{k}$-module $\tilde{A}$ induisant sur A la structure de départ, i.e., une application $\tilde{\mu} : \tilde{A} \times \tilde{A} \to \tilde{A}$ de la forme

$$\tilde{\mu}(a_0 + ha_1, b_0 + hb_1) = a_0b_0 + h(a_0b_1 + a_1b_0 + \mu_1(a_0, b_0))$$

où μ_1 est une application bilinéire $A \times A \to A$. L'associativité de $\tilde{\mu}$ s'écrit

$$a \cdot \mu_1(b, c) - \mu_1(ab, c) + \mu_1(a, bc) - \mu_1(a, b) \cdot c = 0 ,$$

i.e.,

$$\mu_1 \in Z^2(A, A) .$$

Deux 1-déformations $\tilde{\mu}$ et $\tilde{\mu}'$ son *équivalentes* s'il existe une application $\tilde{k}$-linéaire $\tilde{u} : \tilde{A} \to \tilde{A}$ de la forme $\tilde{u}(a_0 + ha_1) = a_0 + h(a_1 + u_1(a_0))$ vérifiant $\tilde{u} o \tilde{\mu}' = \tilde{\mu} o (\tilde{u}, \tilde{u})$; ceci équivaut à

$$\mu'_1(a, b) - \mu_1(a, b) = a \cdot u_1(b) - u_1(ab) + u_1(a) \cdot b ;$$

donc $\tilde{\mu}$ et $\tilde{\mu}'$ sont *équivalentes* si et seulement si $\mu'_1 - \mu_1$ est un cobord. Ceci justifie la

Définition. 1-déf$(A) = H^2(A, A)$ où $H^2(A, A)$ désigne le deuxième groupe de cohomologie de Hochschild de A.

L'élément 0 de $H^2(A, A)$ correspond aux déformations dites *triviales*.

2.3 1-déformations de groupes d'automorphismes.

Soit G un groupe opérant dans une algèbre A par automorphismes α_g. Munissons $\tilde{A}$ de la multiplication défine au n° 2.1. Une 1-*déformation* de α est un morphisme de groupes $\tilde{\alpha} : G \to$ Aut $(\tilde{A})$ induisant α en degré 0, donc de la forme

(1) $$\tilde{\alpha}_g(a_0 + ha_1) = \alpha_g(a_0) + h(\alpha_g(a_1) + \beta_g(\alpha_g(a_0))) ;$$

on a écrit $\beta_g(\alpha_g(a_0))$ plutôt que $\beta_g(a_0)$ parce que

i) le fait que chaque $\tilde{\alpha_g}$ soit multiplicatif équivaut à $\beta_g \in Z^1(A, A) = Der(A)$, *i.e.*

$$\beta_g(a_1a_2) = a_1 \cdot \beta_g(a_2) + \beta_g(a_1) \cdot a_2 .$$

ii) le fait que $\tilde{\alpha}$ soit un morphisme de groupes équivaut à $\beta \in Z^1(G, Z^1(A, A))$, *i.e.*

$$\beta_{g_1 g_2} = \alpha_{g_1} \circ \beta_{g_2} \circ \alpha_{g_1}^{-1} + \beta_{g_1} .$$

Deux 1-déformations $\tilde{\alpha}$ et $\tilde{\alpha}'$ sont *équivalentes* s'il existe un automorphisme $\tilde{u}$ de l'algébre $\tilde{A}$, induisant l'identité sur A et vérifiant

(2) $$\tilde{\alpha}'_g = \tilde{u} \circ \tilde{\alpha}_g \circ \tilde{u}^{-1} ;$$

$\tilde{u}$ est nécessairement de la forme $\tilde{u}(a_0 + ha_1) = a_0 + h(a_1 + u_1(a_0))$ où $u_1 \in Z^1(A, A)$ et (2) s'écrit

$$B'_g - \beta_g = u_1 - \alpha_g \circ u_1 \circ \alpha_g^{-1} .$$

Ceci justifie la

Définition. 1-déf(α) = $H^1(G, Z^1(A, A))$ = premier groupe de cohomologie de G dans le G-module $Z^1(A, A)$ muni de l'action $(g, u) \to \alpha_g \circ u \circ \alpha_g^{-1}$.

2.4 Application 1-déf(α) → 1-déf $(A \times_\alpha G)$.

Le produit croisé $\tilde{A} \times_{\tilde{\alpha}} G$ est engendré linéairement par des éléments $(a_0 + ha_1) \cdot \varepsilon_g$ avec le produit

$$((a_0 + ha_1) \cdot \varepsilon_g) \cdot ((a'_0 + ha'_1) \cdot \varepsilon_{g'}) =$$

$$a_0 \cdot \alpha_g(a'_0) \cdot \varepsilon_{gg'} + h(a_0 \cdot \alpha_g(a'_1) + a_1 \cdot \alpha_g(a'_0) + a_0 \cdot \beta_g(\alpha_g(a'_0))) \cdot \varepsilon_{gg'}$$

Le 2-cocycle μ_1 de cette déformation est donné par

$$\mu_1(a \cdot \varepsilon_g, a' \cdot \varepsilon_{g'}) = a \cdot \beta_g(\alpha_g(a')) \cdot \varepsilon_{gg'} ;$$

d'où une application

$$\wedge : Z^1(G, Z^1(A, A)) \to Z^2(A \times_\alpha G,\ A \times_\alpha G)$$

$$(\wedge(\beta))(a \cdot \varepsilon_g\ ,\ a' \cdot \varepsilon_{g'}) = a \cdot \beta_g(\alpha_g(a')) \cdot \varepsilon_{gg'} .$$

Lemme. *Le 2-cocycle $\wedge(\beta)$ est un cobord si et seulement s'il existe $u \in Z^1(A, A)$ et une famille d' éléments $b_g \in A$ vérifiant*

$$b_{g_1 g_2} = \alpha_{g_1}(b_{g_2}) + b_{g_1}$$

et

$$\beta_g(a) = \alpha_g(u(\alpha_g^{-1}(a))) - u(a) + b_g \cdot a - a \cdot b_g .$$

Démonstration.
Condition suffisante : dans ces conditions, $\wedge(\beta)$ est le cobord de l'application $U : A \times_\alpha G \to A \times_\alpha G$ donnée par $U(a \cdot \varepsilon_g) = u(a) \cdot \varepsilon_g + a \cdot b_g \cdot \varepsilon_g$.

Condition nécessaire : si $\wedge(\beta)$ est le cobord d' une application $U : A \times_\alpha G \to A \times_\alpha G$, on peut prendre $u(a) = U_{e,e}(a)$ et $b_g = U_{g,g}(1)$.

Corollaire. Si A *est commutative, l'application* $\wedge$ *induit une application injective* $1-$ déf $(\alpha) \to 1-$ déf$(A \times_\alpha G)$.

2.5 Cas où $A = C^\infty(X)$.

Ici X est une variété C^∞; les automorphismes de A s'identifient aux difféomorphismes C^∞ de X, et les dérivations de A - aux champs de vecteurs C^∞ sur X. On peut donc reformuler le $n°2.3$ en termes géométriques : pour chaque $g \in G$, on a un difféomorphisme φ_g de X et un champ de vecteurs ξ_g reliés à α_g et à β_g par

$$\alpha_g(f)(x) = f(\varphi_g^{-1}(x))\ ,\ \beta_g(f) = < \xi_g\, , df > \ .$$

3 Retour aux difféomorphismes du cercle.

3.1 Généralités.

On prend ici $A = C^\infty(\mathbb{T}), G = \mathbb{Z}$ avec l'action $\alpha_k(f)(x) = f(x + k\theta)$ où θ est supposé irrationnel et diophantien: $Z^1(A, A)$ s'identifie à A par l'application qui, à tout $\Psi \in A$, associe la dérivation $a \to \Psi \cdot da/dx$.

3.2 Calcul de $H^2(A_\theta\, , A_\theta)$ et de $H^1(G, Z^1(A, A))$.

Pour calculer $H^2(A_\theta, A_\theta)$, on peut utiliser soit la résolution projective du $A_\theta \oplus A_\theta^{op}$-module A_θ déjà utilisée dans [2], soit la suite spectrale exposée dans [4]. On trouve que $H^2(A_\theta, A_\theta)$ est de dimension 1. Par ailleurs un 1-cocycle $\beta \in Z^1(G, Z^1(A, A))$ est entièrement déterminé par sa valeur β_1 en 1 que nous noterons Ψ; on a en effet

$$\beta_m = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad m = 0 \\ (1 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_{m-1}) \cdot \Psi & \text{si} \quad m > 0 \\ -(\alpha_{-1} + \cdots + \alpha_{-m} \cdot \Psi & \text{si} \quad m < 0 \end{cases}$$

De plus β est un cobord si et seulement si Ψ peut s'écrire $\Psi(x) = \omega(x + \theta) - \omega(x)$ avec $\omega \in A$. Notant $\hat{\Psi}(k)$ et $\hat{\omega}(k)$ les coefficients de Fourier de Ψ et ω, ceci équivaut à $\hat{\Psi}(k) = (e^{2\pi i k\theta} - 1) \cdot \hat{\omega}(k)$, équation qui a une solution si et seulement si $\hat{\Psi}(0) = 0$, i.e., Ψ est d'intégrale nulle (compte tenu du fait que θ est diophantien).

Donc $H^1(G, Z^1(A, A))$ est de dimension 1, et l'application Λ du n°2.4 est un isomorphisme.

3.3 Interprétation en termes de conjugaison de difféomorphismes

Appelons 1-*déformation* du difféomorphisme R_θ tout difféomorphisme φ_h de $\mathbb{T}$ de la forme

$$\varphi_h(x) = x + \theta + h \cdot \Psi(x)$$

où $\Psi \in C^\infty(\mathbb{T})$ et où h est un nombre réel suffisamment petit pour que $\varphi_h'(x) > 0$ pour tout x. Disons que deux 1-déformations $\varphi_{h,n}(x) = x + \theta + h \cdot \Psi_n(x), n = 1, 2$, sont *équivalentes* s'il existe $\omega \in C^\infty(\mathbb{T})$ telle que l'on ait

$$\varphi_{h,2} = (\mathrm{id} + \mathrm{h}\omega) \circ \varphi_{\mathrm{h},1} \circ (\mathrm{id} + \mathrm{h}\omega)^{-1} \mod \mathrm{h}^2 ;$$

cette condition s'écrit

$$\Psi_2(x) - \Psi_1(x) = \omega(x + \theta) - \omega(x) .$$

On peut donc interpréter $H^1(G, Z^1(A, A))$ comme un espace 1-déf(R_θ) - idée confortée par le fait que l'automorphisme $\tilde{\alpha}$ de A correspondant à φ_h (cf. (1) avec $a_1 = 0$) est donné par

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_1(a)(x) &= a(\varphi_h(x)) = a(x + \theta + h \cdot \Psi(x)) \\ &= a(x + \theta) + h \cdot a'(x + \theta) \cdot \Psi(x) \mod \mathrm{h}^2 , \end{aligned}$$

i.e., le 1-cocycle β de cette déformation est donné par $\beta_1(a) = \Psi.\mathrm{da}/\mathrm{dx}$.
Montrons enfin que, si Ψ est d'intégrale nulle, le nombre de rotation $\rho(\varphi_h)$ est égal à θ "a l'ordre 1". Rappelons que $\rho(\varphi_h)$ est défini par $\rho(\varphi_h) = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} \varphi_h^n(0)$.

On a facilement

$$\begin{aligned} \varphi_h^n(x)|_{h=0} &= x + n\theta \\ \frac{d}{dh} \varphi_h^n(x)|_{h=0} &= \Psi(x) + \Psi(x + \theta) + \cdots + \Psi(x + (n-1)\theta) \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{1}{n} \varphi_h^n(0)|_{h=0} = \theta$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \frac{d}{dh} \varphi_h^n(0)|_{h=0} &= \frac{1}{n}(\Psi(0) + \Psi(\theta) \cdots + \cdots + \Psi((n-1)\theta)) \\ &= \hat{\Psi}(0) + \frac{1}{n} \sum_{k \neq 0} \hat{\Psi}(k) \cdot (e^{2\pi i k n \theta} - 1) \,/\, (e^{2\pi i k \theta} - 1) \end{aligned}$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \varphi_h^n(0)|_{h=0} = \theta$$

Utilisant à nouveau le fait que θ est diophantien et que $\hat{\Psi}(0) = 0$, on obtient

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \frac{d}{dh} \varphi_h^n(0)|_{h=0} = 0$$

et c'est ce qui permet d'écrire

$$\rho(\varphi_h) = \theta \quad \text{à l'ordre 1.}$$

Referencias

[1] **H. Cartan and S. Eilenberg**, *Homological algebra*, (Princeton Univ. Press, 1956).

[2] **A. Connes**, *Non-commutative differential geometry*, (Publ. IHES, t. 62, 1985, p. 41-144).

[3] **A. Guichardet**, *Cohomologie des groupes topologiques et des algèbres de Lie*, (CEDIC-Nathan, 1980).

[4] **A. Guichardet**, *Suites spectrales à la Hochschild-Serre pour les produits croisés d' algébres et de groupes* (à paraître).

[5] **M. Herman**, *Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle à des rotation*, (Publ. IHES, t. 49, 1979, p. 5-233).

[6] **J.C. Yoccoz**, *Conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle dont le nombre de rotation vérifie une condition diphantienne*. (Ann. Sci. Ec. Norm. Sup., t.17, 1984, p. 333-359).