Cubo Matemática Educacional
Vol. 3., N° 1, ENERO 2001

Fonctions Pseudo Presque-Périodiques

E. Ait. Dads
Université Cadi Ayyad, Faculté des Sciences Semlalia
Département de Mathématiques; B.P. 2390
Marrakech Morocco

O. Arino
Laboratoire de Mathématiques Appliquées
Université de Pau et des pays de l'Adour
URA 1204. Avenue de l'Université
64000 Pau. France

Chapitre 1. Fonctions Presque-Périodiques

Introduction

La notion de fonctions pseudo presque-périodiques est d'une grande importance dans l'étude des équations différentielles. Pour cette raison on se propose dans ce travail de réunir un certain nombre de résultats classiques sur les fonctions pseudo presque-périodiques. Au cours de l'exposé, nous soulignons quelques différences avec les fonctions périodiques et les insuffisances au niveau de l'analyse fonctionnelle qui leur correspondent. Quelques résultats ont été plus particulièrement et plus personnellement développés, notamment,

- Section 3: Propriétés d' approximation.
- Section 5: Conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une fonction presque-périodique au sens de Besicovitch [9] soit presque-périodique au sens de Bohr [15].
- Section 6: Dérivée et intégrale de fonctions presque-périodiques.

- Deuxième partie : Des résultats sur la notion de fonctions pseudo presque-périodiques généralisées.

Terminons cette introduction par un bref rappel historique: La théorie des fonctions pseudo presque-périodiques se développe avec vigueur depuis une soixante dizaine dánnées environ; très exactement, les premiers résultats de celle-ci ont été publiés dans les deux articles du pionnier de cette classe de fonctions, P. Bohr [15] parus dans la revue " Acta-Mathematica " en 1925 – 26. Elle a été développée par d'autres, notamment par Bochner [13] qui, vers 1933, a donné deux autres versions de la définition des fonctions presque-périodiques équivalentes à celle donnée par Bohr, mais plus maniables. Dans les années cinquante, cette étude a été reprise par Stepanov [35] (cf section 5) qui définit la notion de fonction presque-périodique en moyenne L^p_{loc}. Dans les années soixante, Bertrandias [8] a présenté un travail dans le prolongement de celui de Stepanov en définissant les fonctions presque-périodiques continues seulement en moyenne. Il faut aussi mentionner les noms de Weiner, Besicovitch [9], Delsarte, Maak [32] Bogolioboff, Levitan [31], dont les travaux consistent en l'étude de la presque-périodicité de la primitive d'une fonction presque-périodique.

Avant que Bohr eût donné la définition générale, il y a eu des études de fonctions presque-périodiques d'un type special: somme de fonctions périodiques par Bohl et Esclangon en 1923. Cette idée a été soulevée vers la fin du siecle dernier par H. Poincaré . Les premières publications dans ce domaine ne concernaient que les fonctions à valeurs réelles ou complexes. C'est Bochner [13] qui a étendu la notion au cas des fonctions à valeurs dans un espace de Banach quelconque de dimension finie ou infinie. Plusieurs articles récents traitent de l'existence de solutions presque-périodiques dans des systèmes dynamiques en dimension infinie

- Equations différentielles à retard infini (Hino [29], Sawano [33], Seifert [34], J. K. Hale [26]).
- Equations opérationnelles abstraites (Zaidman [39]).
- Systèmes d'évolution généraux (Ait Dads-Arino [2], Ait Dads-Ezzinbi [3], Fink et Gatica [25], Ishi- Itoshi [30], Dafermos [20], Haraux [28], Torrejòn [36], Ezzinbi-Hachimi [22]).

Définitions et Propriétés

Caractérisations des fonctions presque-périodiques

Définition 1 *(de Bohr [15]): Soit X un espace de Banach muni d'une norme notée $\|.\|$, $f : \mathbb{R} \longrightarrow X$. On dit que f est presque-périodique si* *i) f est continue*

ii) pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un nombre réel $l(\varepsilon) > 0$, tel que, dans tout intervalle I de longueur $l(\varepsilon)$, il existe un réel τ pour lequel on a:

$$\|f(t+\tau) - f(t)\| < \varepsilon, \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

Examples:

a) Toute fonction continue et T-périodique est une fonction presque-périodique.

En effet soit $l = T$ et soit I un intervalle quelconque de longueur T: $I = [\gamma, \gamma + T]$ avec γ un réel. Si $\gamma = (n-1)T + \delta$ où $n \in N$ et $0 \leq \delta < T$, alors I contient un point de la forme $nT = \tau$ et on a: $f(t+\tau) - f(t) = f(t+nT) - f(t) = 0$.

b)[17] $f(t) = \sin t + \sin\sqrt{2}t$, est presque -périodique. Vérifions cela.

Il est clair que f n'est pas périodique.

$$|f(t+p) - f(t)| = \left|\sin(t+p) + \sin\sqrt{2}(t+p) - \sin t - \sin\sqrt{2}t\right|$$
$$\leq |1 - (\cos p)| + \left|1 - \cos\sqrt{2}p\right| + |\sin p| + \left|\sin\sqrt{2}p\right|.$$

Si $\varepsilon > 0$ est donné, alors il existe m et n deux entiers naturels tels que $\left|m - \sqrt{2}n\right| \leq \dfrac{\varepsilon}{4\pi}$. Si on prend $p = 2n\pi$ alors $\cos p = 1$ et $\sin p = 0$. D'où

$$|f(x+p) - f(x)| \leq \left|1 - \cos\sqrt{2}p\right| + \left|\sin\sqrt{2}p\right|.$$

Mais $\sqrt{2}p = (\sqrt{2}n)2\pi = (m+\alpha)2\pi$, où α est un réel vérifiant $|\alpha| \leq \varepsilon/4\pi$. Ainsi, $\cos\sqrt{2}p = \cos 2\alpha\pi$ et $\sin\sqrt{2}p = \sin 2\alpha\pi$.

Soit

$$|f(t+p) - f(t)| \leq 2\pi|\alpha| + 2\pi|\alpha| = 4\pi|\alpha| \leq \varepsilon,$$

car $|1 - \cos\theta| \leq |\theta|$ et $|\sin\theta| \leq \theta$, pour tout θ.

Remarque 1 Contrairement au cas périodique où toute fonction périodique atteint son maximum (resp minimum) on remarque que $\sup\{f(x), x \in \mathbb{R}\} = 2$, mais le maximum n'est pas atteint.

Commentaire et conséquences

La définition 1 est la plus proche de celle des fonctions périodiques. Les nombres τ sont appelés des ε -presque-périodes.

Conséquences simples

C_1 : Toute fonction presque-périodique est bornée.

C_2 : Toute fonction presque-périodique est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

C_3 : Principe de reconstitution (à $+\infty$ et $-\infty$). Il existe des suites $(t_n)_{n\in N}$, $(t'_n)_{n\in N}$ avec $t_n \to \infty$ et $t'_n \longrightarrow -\infty$ telle que $f(t+t_n)$, $f(t+t'_n)$ convergent uniformément sur $\mathbb{R}$ vers $f(t)$.

C_4 : L'ensemble des fonctions presque-périodiques est invariant par translation; il l'est également par convolution par des fonctions de L^1.

Le défaut de la définition de Bohr est que chaque fonction presque-périodique a ses presque-périodes propres, de ce fait deux fonctions presque-périodiques sont a priori difficilement comparables, et l'on ne peut rien dire de leur somme.

La caractérisation suivante, dûe à Bochner [13] est beaucoup plus maniable.

Caractérisations de Bochner

Définition 2 *Soit X un espace de Banach muni d'une norme notée $\|.\|$, $f : \mathbb{R} \longrightarrow X$. On dit que: f est presque-périodique si elle vérifie les deux conditions suivantes:*
i) f est continue,
ii) de toute suite $(h_n)_{n\in N}$ de nombres réels, on peut extraire une sous suite $(h'_n)_{n\in N}$ telle que la suite $f(t+h'_n)$ soit uniformément convergente sur $\mathbb{R}$.

Commentaires et conséquences

Cette caractérisation correspond à une propriété élémentaire dans le cas périodique. En effet, si f est une fonction T périodique (et continue) et $(h_n)_{n\in N}$ une suite quelconque de réels, la suite $h'_n = h_n - E(\frac{h_n}{T})T$, où $\mathrm{E}(.)$ est la fonction partie entière, est bornèe et a donc des sous suites convergentes. Si $(h'_{n_k})_{n\in N}$ est une telle sous suite, on déduit de l'uniforme continuité de f sur $\mathbb{R}$ que $f(t+h'_{n_k}) = f(t+h_{n_k})$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

La démonstration de l'équivalence des propriétés se fait dans le cas général, en adoptant cette méthode.

Quelques unes des conséquences nouvelles que l'on tire de la caractérisation de Bochner sont:

$\mathbf{C}_5$: L'image d'une fonction presque-périodique à valeurs dans un espace de dimension quelconque est relativement compacte.

$\mathbf{C}_6$: L'ensemble des translatées d'une fonction presque-périodique f i.e.

$$\{s \longrightarrow f(t+s), t \in \mathbb{R}\},$$

est relativement compact, quand $C(\mathbb{R}, \mathbf{X})$ est muni de la topologie de la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ (cet énoncé n'est qu'une reformulation de la définition).

$\mathbf{C}_7$: L'espace des fonctions presque-périodiques est complet pour la norme du sup.

$\mathbf{C}_8$: La somme et le produit de fonctions presque-périodiques sont presque-périodiques. Donc, l'espace des fonctions presque-périodiques a une structure d'algèbre de Banach.

$\mathbf{C}_9$: La composée de deux fonctions presque-périodiques est une fonction presque-périodique.

Nous notons enfin que la fonction $\|f\|_X$ est presque -périodique si f l'est.

$\mathbf{C}_{10}$: Si f est une fonction presque-périodique et si g est une fonction uniformément continue alors la composée gof est une fonction presque-périodique.

La nécessité de vérifier la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ est une difficulté sérieuse pour établir la presque-périodicité. Il arrive souvent que l'on ait la convergence uniforme sur les bornés, mais que l'on ne puisse dire plus a priori. La caractérisation suivante introduite également par Bochner [13] présente un grand interêt de ce point de vue.

2ème caractérisation de Bochner

Théorème 3 *Soit f:$\mathbb{R} \to X$ une fonction continue. Alors, f est presque - périodique si pour toute suite $((\sigma_n)_{n\in N}, (\tau_n)_{n\in N})$ σ_n, $\tau_n \in \mathbb{R}$, il existe une sous suite $\left((\sigma_n')_{n\in N},\ (\tau_n')_{n\in N}\right)$ telles que $f(t+\sigma_n')$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction $g(t)$ et $f(t+\sigma_n'+\tau_n')$ et $g(t+\tau_n')$ convergent simplement vers la même fonction $h(t)$.*

Nous donnons une démonstration du théorème 3, qui fait apparaître le lien entre les deux caractérisations de Bochner:

Supposons d'abord f est presque-périodique au sens de la définition 1. Considérons deux suites $(\sigma_n)_{n\in N}$ et $(\tau_n)_{n\in N}$. De la définition 1, nous déduisons l'existence d'une sous suite $(\sigma_n')_{n\in N}$ telle que $f(t+\sigma_n')$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$. Désignons par $g(t)$ la fonction limite. Du corollaire $\mathbf{C}_6$, on déduit que g est presque-périodique. En appliquant la première caractérisation à la fonction g et à (τ_n) on déduit l'existence d'une sous suite (τ_n') telle que $g(t+\tau_n')$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction h. On a alors:

$$\left\|f(t+\sigma_n'+\tau_n')-h(t)\right\| \leq \left\|f(t+\sigma_n'+\tau_n')-g(t+\tau_n')\right\| + \left\|g(t+\tau_n')-h(t)\right\| .$$

Le terme
$$\left\| f(t+\sigma_n'+\tau_n') - g(t+\tau_n') \right\| \longrightarrow 0,$$
indépendamment de $t+\tau_n'$ quand $n \longrightarrow \infty$, en raison de l'uniforme convergence de $f(t+\sigma_n')$ vers $g(t)$. On obtient donc la conclusion du théorème,
$$\lim_{n\longrightarrow\infty} f(t+\sigma_n'+\tau_n') = h(t) = \lim_{n\longrightarrow\infty} g(t+\tau_n').$$
Inversement, supposons vérifiée la propriété du théorème 3 et montrons la propriété caractéristique de la definition 1. On fait un raisonnement par l'absurde. Supposons donc qu'il existe une suite (σ_n) telle que $f(t+\sigma_n)$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction g et que la convergence n'est pas uniforme. On en déduit l'existence d'un nombre $\varepsilon > 0$, d'une sous suite (σ_n') et d'une suite (τ_n) telles que
$$\left\| f(\sigma_n'+\tau_n) - g(\tau_n) \right\| \geq \varepsilon.$$
Mais, par application du théorème 3, on déduit l'existence de deux sous suites (τ_n') et (σ_n'') telles que $g(t+\tau_n')$ et $f(t+\tau_n'+\sigma_n'')$ aient en chaque point t, la même limite. L'inégalité précédente montre que cette conclusion n'a pas lieu en $t=0$, d'où une contradiction.

Commentaires et conséquences

Nous verrons plus loin que la définition 2 est particulièrement adaptée pour obtenir des résultats pour des systèmes dynamiques à dépendance presque-périodique.

Nous notons que la propriété du théorème 3 est vérifiée par des fonctions uniformément continues, dans le cas des suites (σ_n), (τ_n) bornées. Ce qui est caractéristique des fonctions presque-périodiques, c'est donc que la même propriété soit vérifiée avec des suites non bornées.

Introduisons l'opérateur U_σ comme dans Haraux [28], associé à une suite $(\sigma_n)_{n\in N}$ de réels quelconques, par:
$$(U_{\sigma_n} f)(t) = \lim_{n\longrightarrow\infty} f(t+\sigma_n) \tag{1.1}$$
quand cette limite existe.

A l'aide des opérateurs U_σ, le théorème 3 s'énonce ainsi:

f est presque -périodique si et seulement si pour toute suite $((\sigma_n)_{n\in N}, (\tau_n)_{n\in N})$ σ_n, $\tau_n \in \mathbb{R}$, il existe une sous suite $\left((\sigma_n')_{n\in N}, (\tau_n')_{n\in N}\right)$ telle que
$$U_{\sigma'+\tau'} f = U_{\sigma'}(U_{\tau'} f) = U_{\tau'}(U_{\sigma'} f)$$
$$(U_\sigma f)(t) = \lim n \longrightarrow \infty f(t+\sigma_n)$$
quand cette limite existe. Propriété que l'on peut qualifier de commutativité asymptotique des translations.

Cette propriété caractérise une classe de fonctions qui englobe les fonctions presque-périodiques.

C$_{11}$: Soit f une fonction presque-périodique. Si g est une translatée-limite de f, alors f est aussi une translatée limite de g (g est une translatée-limite de f, s'il existe une suite de réels $(\sigma_n)_{n\in N}$ telle que $g(t) = \lim\limits_{n\longrightarrow\infty} f(t+\sigma_n)$).

Pour conclure la présentation de ces caractérisations nous devons souligner qu'aucune d'entre elles n'est de type fonctionnel en ce sens qu'elle correspond à une caractérisation ensembliste des fonctions presque-périodiques à partir d'un seul opérateur, contrairerement à ce que l'on a pour les fonctions périodiques de période donnée.

En ce qui concerne l'utilité respective des caractérisations, les deux premières définition 1 et définition 2, interviennent surtout dans l'étude des propriétés des fonctions presque-périodiques. Quant à la deuxième caractérisation de Bochner 3, elle est particulièrement adaptée pour obtenir des résultats d'existence de solutions presque-périodiques pour des systèmes à dépendance presque-périodique.

Propriétés d'approximations

Les principaux résultats d'approximations dans les espaces de fonctions continues périodiques (de période donnée) sont le théorème de convergence uniforme, le théorème de Dini, le théorème de Stone-Weierstrass ([21] théorème 7.3.1. page 138).

Nous examinons les énoncés correspondants dans le cas des fonctions presque-périodiques. Pour le premier résultat nous n'avons qu' à rappeler le corollaire **C**$_6$.

Théorème 4 *L'espace des fonctions presque-périodiques est un sous espace vectoriel fermé de l'espace des fonctions uniformément continues sur* $\mathbb{R}$ *et bornées, muni de la topologie de la norme sup. C'est un espace de Banach pour cette norme.*

Remarque 2: (Convergence compacte dans le cas presque-périodique.) Une différence importante avec les des fonctions périodiques est que pour les fonctions périodiques de période donnée, la convergence compacte est équivalente à la convergence uniforme dans $\mathbb{R}$; ceci n'est pas vrai dans le cas des fonctions presque-périodiques.

Ainsi la suite (f_n) définie par

$$f_n(x) = \begin{cases} x & -n \leq x \leq n \\ 2n - x & n \leq x \leq 3n \end{cases}.$$

Completée par translation sur les intervalles $[-n + 4nk, 3n + 4nk]$ et qui est donc une suite de fonctions presque-périodiques converge au sens de la convergence compacte vers la fonction $f(x) = x$ qui n'est pas une fonction presque-périodique.

Une question importante est de caractériser les sous-espaces fermés de fonctions presque-périodiques dans lesquels convergence compacte et convergence uniforme sont équivalentes.

La condition nécessaire suivante n'est, à ce sujet, qu'un résultat partiel (voir [1]).

Proposition 5 *Soit F un sous espace fermé de l'espace des fonctions presque-périodiques, invariant par les translations (i.e: $f \in F$, $\tau \in \mathbb{R}$, alors $f_\tau(t) = f(t+\tau) \in F$). Si, dans F, la convergence compacte est équivalente à la convergence uniforme, alors F est séparable.*

Démonstration : L'invariance par translation entraine l'invariance par convolution avec un élement quelconque de $L^1(\mathbb{R})$. En particulier pour tout $h > 0$, l'opérateur K_h défini par

$$K_h(f)(t) = \frac{1}{h}\int_{t-h}^{t} f(s)ds, \tag{1.2}$$

est continu de F dans lui même. De plus, pour f fixé, on a la convergence de $K_h f$ vers f (au sens de la convergence uniforme) quand $h \longrightarrow 0$. Donc par exemple

$$F = \overline{\cup_{n\in\mathbb{N}} K_{1/n} F} \tag{1.3}$$

Enfin, l'image par K_h d'un sous-ensemble borné de $C_B(\mathbb{R})$ est un sous-ensemble borné de $C_B^1(\mathbb{R})$. C'est donc, en vertu du théorème d'Ascoli-Arzéla, un sous ensemble relativement compact au sens de la convergence compacte. L'équivalence sur F des deux notions de convergence entraine que $(K_h)_{h\in N^*}$ est une famille d'opérateurs compacts. Donc,

$$\text{Les espaces images } K_h F \text{ sont separables} \tag{1.4}$$

Des deux résultats (1.3) et (1.4), on déduit que F est separable. ■

Théorème 6 : *L'espace des fonctions presque-périodiques à dérivée presque-périodique est dense dans l'espace des fonctions presque-périodiques.*

Preuve : C'est une conséquence immédiate de C_1. ■

Théorème de Dini

l'énoncé classique (Dieudonné [21], théorème 7.2.2. page 136) de ce théorème n'est pas valable dans le cadre presque-périodique, ainsi qu'on peut le voir sur l'exemple suivant: Ci-dessous est représenté le graphe d'une fonction f_1 périodique continue.

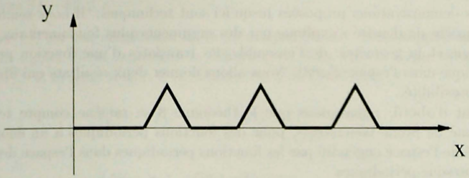

Figure 1

A partir de f_1, on définit par récurrence une suite $(f_n)_{n\in N}$ en supprimant un triangle sur deux dans le graphe de f_n pour obtenir le graphe de (f_{n+1}), on obtient ainsi une suite décroissante tendant vers zéro uniformément sur tout borné, mais dont la norme du sup sur $\mathbb{R}$ reste constante.

En fait, une condition nécessaire pour qu'une suite $(f_n)_{n\in N}$ de fonctions presque-périodiques converge uniformément vers une fonction g est que pour toute suite $(\widetilde{f_n}, \widetilde{g})$ de translatées limites simultanées de (f_n, g), $\widetilde{f_n(t)}$ converge vers $\widetilde{g}(t)$, en chaque point t. En tenant compte de cette condition, on obtient la version suivante du théorème de Dini.

Théorème 7 *J. Bass [7]) Soit $(f_n)_{n\in N}$ une suite croissante (resp décroissante) de fonctions presque-périodiques telle que f_n converge simplement vers une fonction g continue presque-périodique et pour toute suite de translatées limites simultanées $(\widetilde{f_n}, \widetilde{g})$ de (f_n, g) $\widetilde{f_n}$ converge simplement vers $\widetilde{g}$. Alors, f_n converge uniformément vers g.*

Le théorème d'approximation de Stone-Weierstrass

Nous abordons ici la relation entre fonctions périodiques et fonctions presque-périodiques. On a l'énoncé classique suivant.

Théorème 8 *([6]) Si $f:\mathbb{R} \longrightarrow X$ est presque-périodique, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un polynôme trigonométrique*

$$P(t) = \textstyle\sum_{q=1}^{n} b_q \exp(i\lambda_q t), \qquad \text{tel que } \|f(t) - P(t)\| \leq \varepsilon, \text{ pour tout } t \tag{1.5}$$

$$\|f - P\|_\infty \leq \varepsilon \tag{1.6}$$

Ce résultat a été démontré, par Amério [6], Corduneanu [18], et J. Bass [7], en utilisant la caractérisation de Bohr 1, et une représentation intégrale de la fonction f.

Les démonstrations proposées jusqu'ici sont techniques. Il nous semble que la propriété de densité s'explique par des arguments plus fondamentaux sur la topologie et la géométrie de l'ensemble des translatés d'une fonction presque-périodique dans l'espace $C_B(\mathbb{R})$. Nous allons donner deux résultats qui illustrent cette possibilité.

Tout d'abord, remarquons que le théorème 8 se ramène compte tenu du théorème de Stone-Weierstrass, pour des fonctions périodiques à un énoncé de densité de l'espace engendré par les fonctions périodiques dans l'espace des fonctions presque-périodiques.

Pour notre premier résultat, nous considérons des fonctions presque-périodiques particulières.

Proposition 9 *Supposons f continue et vérifiant la condition suivante. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $T > 0$ tel que*

$$\|f(t+nT) - f(t)\| \leq \varepsilon, \text{ pour tout } t \in \mathbb{R},\ n \in Z.$$

Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction périodique g de période T telle que

$$\|f(t) - g(t)\| \leq \varepsilon, \text{ pour tout} t \in \mathbb{R}.$$

Preuve: Nous pouvons supposer que f est dans $C^1_B(\mathbb{R})$ et conclure par densité (théorème 6). Considérons la suite

$$f_n(t) = \tfrac{1}{2n+1}\textstyle\sum_{j=-n}^{n} f(t+jT), \tag{1.7}$$

où T est la $\varepsilon-$presque-période de l'énoncé. On a donc

$$\|f_n(t) - f(t)\| \leq \varepsilon, \text{ pour tout t} \in \mathbb{R}.$$

Dans le meilleur des cas, si la suite (f_n) converge, sa limite f_∞ est une fonction $T-$périodique correspondant à une "projection" de f sur l'espace des fonctions T-périodiques.

Malheureusement, on ne peut pas garantir la convergence en général. Mais puisque f est dans $C^1_B(\mathbb{R})$ on voit que la suite $(f_n)_{n\in N}$ est dans un borné de $C^1_B(\mathbb{R})$. On peut donc appliquer le théorème d'Ascoli-Arzéla pour la convergence compacte et conclure à l'existence d'un point limite g de la suite (f_n).

Comme

$$f_n(t+T) - f_n(t) = \tfrac{1}{2n+1}\left[f(t+(n+1)T) - f(t+nT)\right] \tag{1.8}$$

tend vers zéro à l'infini, g est alors T périodique. Enfin de l'inégalité $\|f_n - f\| \leq \varepsilon$ on déduit que $\|f(t) - g(t)\| \leq \varepsilon$. ∎

Proposition 10 *Soit f une fonction presque-périodique. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\tilde{f}$ combinaison convexe finie de translatées de f et une fonction g périodique* *telles que* $\left\|\widetilde{f} - g\right\| \leq \varepsilon$.

Preuve : C'est une adaptation de la preuve précédente. Nous supposons que f est dans $C^1_B(\mathbb{R})$. Nous exprimons la définition de Bohr sous la forme suivante: il existe $T > 0$, et pour tout $n \in \mathbb{Z}$, il existe $\sigma_n \in [0, T]$ tel que

$$\|f(t) - f(t + nT - \sigma_n)\| \leq \varepsilon, \qquad t \in \mathbb{R},$$

ou

$$\|f(t + \sigma_n) - f(t + nT)\| \leq \varepsilon, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Comme dans la proposition 9, nous introduisons les moyennes

$$\widetilde{f_n}(t) = \frac{1}{2n+1} \sum_{j=-n}^{n} f(t + \sigma_j T) \qquad \text{et} \qquad f_n(t) = \frac{1}{2n+1} \sum_{j=-n}^{n} f(t + jT).$$

La différence de ces deux moyennes est encore $\leq \varepsilon$. Nous choisissons $\delta > 0$ tel que pour tout s_1, s_2, $|s_1 - s_2| \leq \delta$ on ait $\|f(s_1) - f(s_2)\| \leq \varepsilon$. (ceci d'après l'uniforme continuité de f) et à partir de là une partition de $[0, T]$ en intervalles $[a_j, a_{j+1}]$, $j = 0, 1, 2 ....k + 1$, avec $a_0 = 0$ et $a_{k+1} = T$; $a_{j+1} - a_j \leq \delta$. Nous substituons à chaque σ_n le terme a_j tel que $\sigma_n \in [a_j, a_{j+1}]$.

La première moyenne est alors remplacée par

$$\widetilde{f_n}(t) = \tfrac{1}{2n+1} \textstyle\sum_{j=0}^{n} \varphi_j(n) f(t + a_j)$$

où

$$\varphi_j(n) = \sum \{\, m : m \in Z, \ -n \leq 2m \leq n \text{ tel que } \sigma_n \in [a_j, a_{j+1}]\} .$$

On a

$$\left\|\widetilde{f_n}(t) - f_n(t)\right\| \leq 2\varepsilon.$$

Les suites $(\frac{1}{2n+1}\varphi_j(n))$ $j = 0, 1 ......k + 1$ sont bornées, par conséquent la suite $(\widetilde{f_n}(t))_{n \in N}$ est relativement compacte dans $C_B(\mathbb{R})$, ses points limites sont des combinaisons convexes des fonctions $f(t + a_j)$ $j = 0, 1 ....k + 1$. Nous avons considéré la suite (f_n) dans la proposition 10 . Nous savons qu'elle est relativement compacte au sens de la convergence compacte et que ses points limites sont des fonctions T-périodiques. En prenant deux points limites simultanés de $\widetilde{f_n}$ et f_n on obtient la conclusion de la proposition 10. ■

Bien entendu, il s'agit de résultats très partiels par rapport au théorème de Stone-Weierstrass qui suggèrent d'étudier de plus près l'ensemble des translatées d'une fonction presque-périodique, sa fermeture K_f (qui est compact $\mathbf{C}_6$) et connexe) son enveloppe convexe $\widetilde{K_f}$ et les propriétés extrémales de $(f_\sigma)_{\sigma \in \mathbb{R}}$ relativement aux fonctions périodiques qui sont dans $\widetilde{K_f}$.

Analyse de Fourier des Fonctions Presque-Périodiques

Valeur moyenne d'une fonction presque-périodique

Une conséquence importante du théorème de Stone-Weierstrass (théorème 8) est l'existence d'une moyenne pour les fonctions presque-périodiques, prolongeant la notion de moyenne de fonctions périodiques.

Proposition 11 *([6]) A toute fonction presque-périodique est associée de manière unique une valeur moyenne définie comme*

$$M(f) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f(s)ds = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_t^{t+T} f(s)ds \qquad (1.9)$$

Preuve : En fait, nous allons déduire l'existence de $M(f)$ de la forme faible du théorème de densité proposition 10. Considérons une fonction f presque-périodique. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une combinaison convexe finie de translatées de f et une fonction g périodique telles que:

$$\left\|\sum_{j=1}^{k} \theta_j f(t+a_j) - g(t)\right\| \leq \varepsilon, \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

Etudions

$$\tfrac{1}{T}\int_0^T f(s)ds.$$

L'indépendance vis à vis de t ne posant aucun problème, en prenant la moyenne de la dernière inegalité, on obtient

$$\left\|\sum_{j=1}^{k} \theta_j \tfrac{1}{T}\int_0^T f(t+a_j)dt - \tfrac{1}{T}\int_0^T g(t)dt\right\| \leq \varepsilon$$

d'où

$$\left\|\tfrac{1}{T}\int_0^T f(s)ds - \tfrac{1}{T}\int_0^T g(s)ds\right\| \leq \varepsilon + \tfrac{1}{T}\sum_{j=1}^{k}\left[\int_{[0,a_j]}\|f(t)\|\,dt + \int_{[T,T+a_j]}\|f(t)\|\,dt\right].$$

On en déduit que l'ensemble des points limites de la famille

$$\left\{\tfrac{1}{T}\int_0^T f(s)ds,\ T > 0\right\}$$

qui est un sous ensemble compact ($\mathbf{C}_6$) a un diamètre $\leq 2\varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$. C'est donc un ensemble réduit à un point, ce qui prouve la convergence de

$$\frac{1}{T}\int_0^T f(s)ds$$

à l'infini. ■

Remarque 3: Notons que la moyenne est en fait la même non seulement sur toutes les translatées d'une fonction presque-périodique donnée, mais aussi sur les translatées limites de la fonction et même en tous les points de l'ensemble $\widetilde{K_f}$ (Proposition 10 fin).

L'interêt de la notion de moyenne est qu'elle permet de définir sur l'espace des fonctions presque-périodiques une structure préhilbertienne, sur l'espace complété. Les fonctions $\{\exp(i\lambda t)\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ forment une base orthonormale, sur laquelle chaque fonction presque-périodique a une décomposition canonique, extension des séries de Fourier de fonctions périodiques, et peut être approchée en moyenne par des suites de polynômes trigonométriques dont les coefficients sont uniquement determinés par la fonction et analytiquement calculables à partir d'elle. Nous détaillons ces résultats dans la suite de cette section.

Structure Préhilbertienne- Base

On suppose que X a une structure préhilbertienne. Fixons un produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$ sur le complèté de X. Si f et g sont deux fonctions presque-périodiques, la fonction:

$$t \longrightarrow \langle f(t), g(t)\rangle$$

est presque-périodique ($\mathbf{C}_8$,$\mathbf{C}_9$). On définit le produit sesquilinéaire suivant sur l'espace des fonctions presque-périodiques

$$(f,g) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \langle f(s), g(s)\rangle ds = M(\langle f,g\rangle), \tag{1.10}$$

la seule chose qui ne soit pas immédiate dans la vérification de la structure préhilbertienne est le caractére défini de la forme: c'est à dire $(f,f) \neq 0$ si $f \neq 0$. Ce résultat fait l'objet du lemme suivant:

Lemme 12 *Soit g:$\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ une fonction presque-périodique, non nulle. Alors il existe $\alpha > 0$, $T_0 > 0$ tels que: tout intervalle de longueur T_0 contient un sous ensemble de longueur d sur lequel $g \geq \alpha$. Par conséquent $M(g) > 0$.*

Preuve du Lemme 12 on a donc

$$\int_t^{T_0+t} g(s)ds \geq \alpha d.$$

et de là on déduit que $M(g) \geq \dfrac{\alpha d}{T_0} > 0$. ■

Pour completer la démonstration du résulat énoncé dans (1.10), il suffit dáppliquer le lemme 12 à la fonction $g(t) = \langle f(t), f(t)\rangle$.

Notations 1 $\mathcal{H}$ est le completé de l'espace des fonctions presque-périodiques pour la norme $\sqrt{(f,f)}$; m_2 est la norme complétée. $m_2(f) = \sqrt{M(f,f)}$.

Proposition 13 *Pour toute fonction presque-périodique f on a:*

$$m_2(f) \leq \|f\|_\infty \tag{1.11}$$

(i.e. l'injection de l'espace des fonctions presque-périodiques avec la norme du sup dans $\mathcal{H}$ est continue).

Preuve: On applique le lemme à la fonction $g(t) = \langle f(t), f(t) \rangle$. ■

Proposition 14 *([7]) La famille $\{\exp(i\lambda t)_{\lambda \in \mathbb{R}}\}$ est une base orthonormale de $\mathcal{H}$.*

Preuve : La proposition 13 et le théorème d'approximation de Stone-Weierstrass montrent que les polynômes trigonométriques sont denses dans l'espace des fonctions presque-périodiques pour la norme m_2 et donc aussi dans $\mathcal{H}$. De plus, on vérifie immédiatement que la famille $\{\exp(i\lambda t)_{\lambda \in \mathbb{R}}\}$ est un système orthonormal. ■

Définition 15 *Pour toute fonction presque-périodique f, on note par $a_\lambda(f)$ la composante de f sur $exp(i\lambda t)$*

$$a_\lambda(f) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(s) \exp(-i\lambda s) ds, \tag{1.12}$$

$a_\lambda(f)$ est le coefficient de Fourier de f, d'ordre λ. Quand il n'y a pas d'ambiguité on notera simplement a_λ les coefficients.

De manière tout à fait analogue au cas périodique, on démontre que pour tout ensemble fini L, on a

$$\textstyle\sum_{\lambda \in L} |a_\lambda(f)|^2 \leq m_2(|f|^2) \tag{1.13}$$

et par un argument classique sur les séries sommables, on déduit que lénsemble des λ, tels que $a_\lambda(f) \neq 0$ est au plus dénombrable.

Definition 16 *On appelle exposants de Fourier, les nombres λ tels que $a_\lambda(f) \neq 0$. On désigne par Λ_f l'ensemble des exposants de Fourier de f. On appelle module de f (noté $mod(f)$) le module sur Z engendré par Λ_f.*

$$mod(f) = \{\textstyle\sum_{i=1}^p n_i \lambda_i, \quad n_i \in Z, \lambda_i \in \Lambda_f, \ p \in N\}. \tag{1.14}$$

Citons les inégalités de Parseval.

$$m_2(|f|^2) = \textstyle\sum_{\lambda \in \Lambda_f} |a_\lambda(f)|^2 \tag{1.15}$$

$$(f, g) = \textstyle\sum_{\lambda \in \Lambda_f \cap \Lambda_g} \langle a_\lambda(f), a_\lambda(g) \rangle. \tag{1.16}$$

Remarque 4: Notons que l'espace $L^2(0, T)$ des classes de fonctions T-périodiques muni de la norme

$$\frac{1}{T}\left(\int_0^T |f(s)|^2\,ds\right)^{\frac{1}{2}} \tag{1.17}$$

se polonge isométriquement dans $\mathcal{H}$. Chacun des espaces de fonctions T-périodiques sidentifie à un sous espace fermé de $\mathcal{H}$, qui n'est autre que la fermeture de la somme des $L^2(0,T)$, $T > 0$.

Nous venons de voir le passage formel des fonctions presque-périodiques aux séries la situation ici est tout à fait analogue à celle des fonctions périodiques.

Un autre aspect important de l'analyse de Fourier consiste en l'étude des modes de convergence des séries et du passage des séries à des fonctions ou classes de fonctions. Ici, apparaissent quelques différences avec le cas périodique.

Différence dans l'analyse de Fourier des fonctions périodiques et des fonctions presque-périodiques

Nous ne faisons qu'évoquer la question des modes de convergence (voir à ce sujet Amério [6], Bohr [15]) .

Dans le cas périodique, nous savons que des hypothèses de régularité sur les fonctions entrainent des propriétés sur la convergence des séries. Il n'en est pas de même pour les fonctions presques-périodiques. En fait, les principaux critères sur le mode de convergence portent sur les exposants ou coefficients des séries, et non sur les fonctions, nous avons le résultat suivant.

Preposition 17 *([15]) Soit f est une fonction presque-périodique. On suppose qu'il existe un ensemble fini L de Z tel que les exposants de Fourier de f $\{\lambda_i : i \in Z \setminus L\}$ soient rationnellement indépendants, i.e; pour toute famille finie $(n_i)_{i\in I}$, d'entiers relatifs non tous nuls, on $\sum n_i\lambda_i \neq 0$. Alors, la série de Fourier est normalement convergente.*

Passage des séries aux fonctions

Le problème de faire correspondre à une série (éléments de $\mathcal{H}$) une fonction ayant pour coefficients de Fourier les coefficients de la série est ouvert même si l'on autorise la fonction cherchée à être plus générale que les fonctions presque-périodiques.

Que ce soit une fonction presque -périodique en norme d'intégrale (comme nous le verrons plus loin dans la section 5 de ce travail ou simplement la possibilité de définir les coefficients de la fonction).

Le seul résultat dans cette direction est le suivant:

Proposition 18 *(Amerio [6]) Soit $S = \sum a_n \exp(i\lambda_n t)$ un élément de $\mathcal{H}$. Si la suite des sommes partielles de S converge uniformément vers une fonction f*

alors, f est presque-périodique, et la série de Fourier de f est S.

Notons qu'on ne peut rien affirmer si la convergence est seulement localement uniforme ou L^2_{loc}.

Examinons plus particulièrement le cas de séries ayant pour exposants une suite tendant vers zéro. La série

$$\sum \frac{1}{n} \exp(i\frac{1}{n}t)$$

ne converge en aucun point et aucune des sous suites extraites des sommes partielles ne converge. S'il lui correspond une fonction, cette correspondance n'est pas de type local (ce résultat est très différent de celui correspondant au cas périodique). D'autre part, il résulte de la proposition 18 que si $(\lambda_n)_{n\in N}$ est une suite d'exposants linéairement indépendants, tendant vers zéro, la série $\sum a_n \exp(i\lambda_n t)$ ne peut être la série de Fourier d'une fonction presque-périodique. On peut donc affirmer qu'en général une série de Fourier à coefficients dans l^2, à exposants tendant vers zéro ne provient pas d'une fonction presque-périodique. Mais peut-on au moins lui faire correspondre une fonction?

Dans l'exemple suivant, nous considérons des séries dont les coefficients sont à l'exception d'un nombre fini d'entre eux, les coefficients de Fourier d'une fonction qui n'est pas presque-périodique mais est déterminée de manière unique dans l'ensemble image des fonctions presque-périodiques, par une translation convenable.

Considérons la série

$$\sum a_n \exp(i\lambda_n t),\ (a_n)_{n\in N},\ (\lambda_n)_{n\in N} \in l^2,\ \lambda_n \neq 0,\ a_n \geq 0, \text{bornée}, \sum_n a_n = \infty.$$

La série $\sum a_n (i\lambda_n)\exp(i\lambda_n t)$ est alors normalement convergente et la somme est une fonction presque-périodique g de moyenne nulle.

Formellement la série $\sum a_n \exp(i\lambda_n t)$ est une primitive de la série associée à g. Si l'on considère la fonction

$$F(t) = \int_0^t g(s)ds$$

on vérifie par une intégration par parties que les coefficients $a_\lambda(F)$ existent pour $\lambda \neq 0$ et valent

$$\begin{aligned} &\tfrac{1}{i\lambda} M(exp(-i\lambda t)g(t)), \ \text{i.e.}\ (a_{\lambda_n}(F)\lambda = a_n)\,, \\ &a_\lambda(F) = 0 \qquad \lambda \notin \{\lambda_n\}_{n\in N} \cup \{0\}\,. \end{aligned}$$

Donc la série $\{(a_n, \lambda_n), (0, \lambda), \lambda \neq 0\}$ est la série des coefficients d'une fonction. Cette fonction n'est pas presque-périodique. Ceci est encore une conséquence de la proposition 17 et des conditions d'incommensurabilité rationnelle vérifiées par les exposants $(\lambda_n)_{n\in N}$ et les coefficients $(a_n)_{n\in N}$.

Après avoir montré que la série correspond à une fonction, la question se pose de savoir dans quelle mesure la fonction trouvée est caractérisée par ses coefficients de Fourier. Le résultat simple suivant nous permet de conclure que F est déterminée à l'addition près d'une constante dans l'ensemble des fonctions f telles que, pour tout τ $f(t+\tau) - f(t)$ est presque-périodique.

Notons (d'après un résultat précédent) que F a cette propriété puisque

$$F(t+\tau) - F(t) = \int_t^{t+\tau} g(s)ds, \tag{1.18}$$

avec g presque-périodique.

Proposition 19 *Dans l'ensemble des fonctions continues G à moyenne finie, telles que $G(t+\tau) - G(t)$ est presque-périodique pour tout τ, les seules fonctions pour lesquelles tous les coefficients de Fourier de $G_\tau - G$, autres que la moyenne, sont nuls sont les constantes.*

Preuve: Soit G une fonction vérifiant les conditions de la Proposition 19. On a donc, pour tout τ, et tout $\lambda \neq 0$, $a_\lambda(G - G_\tau) = 0$. Mais, puisque $G - G_\tau$ est presque-périodique, cette fonction est entièrement determinée (proposition 18), par ses coefficients de Fourier. Donc, $G(t+\tau) - G(t) = c(\tau)$, pour tout τ ce qui montre que $G(t) = ct + d$. Si G est bornée, ou a une moyenne finie on a: $c = 0$. Mais on vérifie immédiatement que, pour que les intégrales coefficients

$$\frac{1}{T}\int_0^T \exp(-i\lambda t)G(t)dt$$

aient une limite; à l'infini il faut que $c \equiv 0$ on obtient donc la conclusion de la proposition 19. ■

Remarque 5: Des résultats analogues peuvent être établis pour des séries associées à des suites d'exposants tendant beaucoup plus lentement vers zéro, par exemple telles que $a_n \in l^2$, et pour un entier $p > 1$, $\sum |a_n|\,|\lambda_n|^p < \infty$. Ainsi, pour $p = 2$, nous avons le résultat suivant. Désignons par S la série formelle

$$\sum a_n \exp(i\lambda_n t) \qquad (a_n) \in l^2, \ \sum |a_n|\,|\lambda_n|^2 < +\infty.$$

Il existe une fonction F de classe C^2, telle que pour tout τ,

$$F(t+2\tau) - 2F(t+\tau) - F(t)$$

est presque-périodique et a pour série de Fourier la série

$$S(t+2\tau) - 2S(t+\tau) - S(t).$$

S'il existe une fonction presque-périodique F_1, qui a pour série de Fourier S, F diffère de F_1 au plus par l'addition d'un polynôme de degré 1. En effet, F est simplement une primitive double de la fonction presque-périodique - $\sum a_n \lambda_n^2 \exp(i\lambda_n t)$. Enfin, si $\sum |a_n|\,|\lambda_n|^p = \infty$, pour tout p, nous ne connaissons pas de correspondance naturelle entre S et une fonction.

Presque-Periodicité en norme intégrale (ou au sens de Stepanov)

Les définitions 1 et 2 qui ont été données dans le paragraphe 1 de la section 2 utilisant la norme du sup peuvent être formulées sous forme intégrale conduisant à de nouvelles classes de fonctions presque-périodiques. Ainsi dans la classe des fonctions L^p_{loc}, on peut considérer les fonctions vérifiant:

Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un nombre $l(\varepsilon) > 0$ tel que dans tout intervalle I de longueur $l(\varepsilon)$, il existe un réel $\tau > 0$ pour lequel on a:

$$(\int_{\mathbb{R}} \|f(t+\tau) - f(t)\|^p \, dt)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon, \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

Cette définition paraît toutefois très restrictive, elle n'est probablement pas équivalente à l'expression analogue sous forme intégrale de la caractérisation de Bochner. La définition la mieux connue est celle des fonctions presque-périodiques en moyenne L^p (Amério [6], Bertrandias [8], Stepanov [35]). (On dit aussi presque-périodicité au sens de Stepanov ou de classe S^p).

Considérons d'abord le cas $p < +\infty$. Soit $f \in L^p$, tel que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un nombre $l(\varepsilon) > 0$, tel que dans tout intervalle de longueur $l(\varepsilon)$, il existe un réel $\tau > 0$, tel que pour tout intervalle J, de longueur ≥ 1, on ait

$$(\int_J \|f(t+\tau) - f(t)\|^p \, dt)^{1/p} < \varepsilon \, |J|^{1/p}.$$

Pour le cas $p = +\infty$, la définition est la suivante:

$$\operatorname{supess}_{t \in \mathbb{R}} \|f(t+\tau) - f(t)\| \leq \varepsilon.$$

Les fonctions vérifiant cette définition sont telles que

$$(\int_J \|f(t)\|^p \, dt)^{1/p} < M \, |J|^{1/p},$$

pour tout intervalle J, $|J| \geq 1$.

L'espace des fonctions presque-périodiques au sens de Stepanov muni de la norme suivante:

$$\|f\|_{p,m} = \sup_{J, |J| \geq 1} \frac{1}{|J|} (\int_J \|f(t)\|^p \, dt)^{1/p}$$

est le cadre qui correspond à celui des fonctions continues bornées sur $\mathbb{R}$, avec la norme du sup, nous le désignons par L^p_m.

Remarque 6: Notons que la norme $\|.\|_{p,m}$ est équivalente à la norme du sup de

$$\frac{1}{|J|} (\int_J \|f(t)\|^p \, dt)^{1/p}$$

sur les intervalles J de longueur comprise entre deux nombres a, b avec $0 < a \leq b < \infty$.

Dans ce cadre, la caractérisation de Bohr est équivalente à celle de Bochner: Ainsi.

C_1' : f est presque-périodique en moyenne L^p si et seulement si $\{f_t,\ t \in \mathbb{R}\}$ est relativement compact.

C_2' : De la caractérisation de Bochner, on voit que les fonctions presque-périodiques L^p_m ont une structure d'espace vectoriel qui est un sous-espace fermé de L^p_m.

La deuxième caractérisation de Bochner est remplacée par la suivante. f est presque -périodique si et seulement si de toutes suites $(\sigma_n)_{n\in N}$, $(\tau_n)_{n\in N}$ de $\mathbb{R}$, il existe deux sous suites communes $(\sigma_n')_{n\in N}$, $(\tau_n')_{n\in N}$ telles que $f(t+\sigma_n')$ converge vers $g(t)$ dans L^p_{loc}, et $f(t+\sigma_n'+\tau_n')$ et $g(t+\tau_n')$ convergent dans L^p_{loc} et ont la même limite.

L'équivalence de cette dernière définition avec les deux autres caractérisations est obtenue en utilisant les normes locales introduites dans la remarque précédente.

La plupart des propriétés des fonctions presque-périodiques ont leur analogue dans le cas des fonctions presque-périodiques en moyenne.

C_3' : Si f est presque-périodique L^p_m alors $t \longrightarrow f_t$ est uniformément continue de $\mathbb{R} \longrightarrow L^p_m$, (alors que l'application $t \longrightarrow f_t$ n'est même pas continue en général sur L^p_m).

C_4' : Si f *et* g sont presque-périodiques L^p_m, L^q_m (respectivement) avec $1/p + 1/q \leq 1/r$; alors le produit fg est presque-périodique L^r_m.

C_5' : Si f est presque-périodique L^p_m, $t \longrightarrow \|f_t\|$ est presque-périodique L^1_m. D'autres propriétés peuvent être envisagées à partir des relations entre les classes de fonctions presque-périodiques. Ces relations se déduisent de celles entre les espaces L^p_m.

L'inclusion suivante est continue: $L^p_m \subset L^r_m$ pour tout $p \geq r$.

Le passage continu de L^p_m à $C_B(\mathbb{R})$ par régularisation: $f \longrightarrow f * \varphi$, avec φ une fonction continue positive, à support compact, $\displaystyle\int \varphi = 1$, l'approximation dans L^p_{loc} de toute fonction de L^p_m par la famille $f * \varphi_\varepsilon$ avec

$$\varphi_\varepsilon(t) = \tfrac{1}{\varepsilon}\varphi(\tfrac{t}{\varepsilon}).$$

L'approximation ayant lieu dans L^q_m si l'on suppose que l'application $t \longrightarrow f_t$ est continue de $\mathbb{R}$ dans L^q_m.

C_6' : Si f est presque-périodique L^p_m, elle l'est aussi en moyenne L^q_m pour tout $q \leq p$.

C_7' : L'espace des fonctions presque-périodiques L^p_m est dense dans l'espace des fonctions presque-périodiques L^q_m, pour tout $q \leq p$.

C'_x : En particulier toute fonction presque-périodique en moyenne L^p_m, f peut être approchée par une suite $f * \varphi_{\varepsilon_n}$ $\varepsilon_n \longrightarrow 0$ de fonctions presque-périodiques au sens de Stepanov [35].
De la densité des fonctions presque-périodiques, on déduit l'existence pour toute fonction presque-périodique en moyenne L^p_m f d'une moyenne

$$M(f) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f(s)ds = \lim_{|J|\longrightarrow\infty} \frac{1}{|J|}\int_J f(s)ds.$$

De même,

$$a_\lambda(f) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f(s)\exp(-i\lambda s)ds.$$

A noter que $M_p(\cdot)$ est une norme dans l'espace des fonctions presque-périodiques L^p_m, toutefois, cet espace n'est pas fermé pour cette norme, la fermeture est un espace qu' on note $\mathcal{H}_p$. Pour $p = 2$, $\mathcal{H}_2$ est l'espace $\mathcal{H}$ que nous avons considéré dans la section Structure préhilbertienne.

L'application

$$\lim_{T\to\infty} \lim \frac{1}{T}\int_0^T \langle f(s), g(s)\rangle ds = M(\langle f, g\rangle),$$

définie sur les couples de fonctions presque-périodiques,

$$L^p_m \times L^q_m \ \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$$

se prolonge sur $\mathcal{H}_p \times \mathcal{H}_q$ et permet d'identifier pour $\mathcal{H}_p$ et $\mathcal{H}_q$ repectivement à $\mathcal{H}'_p$ et $\mathcal{H}'_q$, sous la restriction $1 < p, q < +\infty$.

Proposition 20 *Pour $1 < p < \infty$, $\mathcal{H}_p$ est un espace reflexif, $\mathcal{H}'_p$ s'identifie à $\mathcal{H}_q$ à travers l'application de dualité $(f, g) \longrightarrow M(\langle f, g\rangle)$.*

Conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une fonction presque-périodique au sens de Besicovitch soit presque-périodique au sens de Bohr

Définition 21 *Soit X un espace de Banach muni d'une norme notée $\|.\|$. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow X$. On dit que f est presque-périodique en moyenne (ou au sens de Stepanov $S^p(X)$ presque-périodique avec $p \geq 1$) si*
i) f est continue,
ii) Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un nombre réel $l(\varepsilon) > 0$ tel que dans tout intervalle I de longueur $l(\varepsilon)$, il existe un réel τ pour lequel on a:

$$\sup_{a\in\mathbb{R}} \left\{ \int_a^{a+1} \|f(t+\tau) - f(t)\|^p \, dt \right\}^{\frac{1}{p}} < \varepsilon.$$

Remarque 7: Cette définition est un cas particulier de la définition donnée dans la section précedente avec J de longueur 1.

Le lien entre la presque-périodicité au sens de Bohr et celle au sens de Stepanov est fourni par le résultat suivant:

Proposition 22 *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction presque-périodique en moyenne L^p soit presque-périodique est qu'elle soit uniformément continue.*

Preuve: La condition suffisante est évidente. Montrons alors la condition nécessaire. Soit f une fonction presque-périodique en moyenne L^p, uniformément continue. Montrons que f est presque-périodique au sens de Bohr. En effet, soit $(\rho_j)_j$ une suite régularisante i.e. $\rho_j > 0$ indéfiniment dérivable à support compact et vérifiant

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho_j(t)dt = 1,$$

et le supp ρ_j tend vers $\{0\}$.

Considérons le produit de convolution de f par ρ_j, on pose

$$f_j(t) = (f * \rho_j)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho_j(s) f(t-s)ds.$$

On a alors

$$f_j(t+\tau) - f_j(t) = (f * \rho_j)(t+\tau) - (f * \rho_j)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho_j(s)(f(t+\tau-s) - f(t-s))ds.$$

Cette intégrale est prise le long d'un intervalle de longueur finie car ρ_j est à support compact. En appliquant l'inégalité de Hölder ($s \in [-A, A] \supset \mathrm{supp}\rho_j$) avec $1/p + 1/q = 1$

$$\|f_j(t+\tau) - f_j(t)\| \leq \left[\int_{-A}^{A} \|f(t+\tau-s) - f(t-s)\|^p ds\right]^{\frac{1}{p}} \left[\int_{-A}^{A} (\rho_j(s))^q ds\right]^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq M_p \left[\int_{-A}^{A} \|f(t+\tau-s) - f(t-s)\|^p ds\right]^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq M_p \left[\int_{t-A}^{A+t} \|f(\tau+s) - f(s)\|^p ds\right]^{\frac{1}{p}}$$

or la quantité

$$\left[\int_{t-A}^{t+A} \|f(\tau+s)-f(s)\|^p\,ds\right]^{\frac{1}{p}}$$

est estimée en fonction d'une somme finie d'intégrales de type

$$\leq \left[\int_{t-A+j}^{t-A+j+1} \|f(\tau+s)-f(s)\|^p\,ds\right]^{\frac{1}{p}}.$$

En utilisant cette fois ci la S^p presque-périodicité de f on aura:

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \|f_j(t+\tau)-f_j(t)\| \leq \alpha M_p \varepsilon,$$

ce qui implique que f_j est presque-périodique.

Comme f est uniformément continue, alors en particulier f est continue, alors $f * \rho_j$ converge vers f pour la topologie de la convergence uniforme sur tout compact. Montrons alors que (f_j) converge uniformément vers f .

En effet, $\forall \varepsilon > 0, \exists\, N(\varepsilon) \in N$ tel que dès que $j > N(\varepsilon)$, alors $\|f_j(t)-f(t)\| < \varepsilon$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Soit (ρ_j) la suite régularisante à support dans la boule $B(0,\frac{1}{j})$ alors

$$\|f_j(t)-f(t)\| = \int_{-\frac{1}{j}}^{\frac{1}{j}} \rho_j(s)\,\|f(t-s)-f(t)\|\,ds.$$

La continuité uniforme de f permet de dire que: $\forall \varepsilon > 0, \exists\, \delta(\varepsilon) > 0$ tel que $\|f(t')-f(t'')\| < \varepsilon$, quand $|t'-t''| < \delta(\varepsilon)$.

Prenons n_ε tel que $\dfrac{1}{2n_\varepsilon} \leq \delta(\varepsilon)$, quand $n > n_\varepsilon$ on a

$$\|f_j(t)-f(t)\| = j\int_0^{\frac{1}{j}} \rho_j(s)\,\|f(t-s)-f(t)\|\,ds < \varepsilon$$

implique ,$\forall \varepsilon > 0, \exists\, N(\varepsilon) \in N$ tel que dés que $j > N(\varepsilon)$ alors $\|f_j(t)-f(t)\| < \varepsilon$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, d'où f_j converge uniformément vers f de plus (f_j) est une suite de fonctions presque-périodiques, par suite f est une fonction presque-périodique au sens de Bohr. Ce qui achève la démonstration de la proposition. ■

1 Derivée et intégrale de fonctions presque-périodiques

Les opérateurs fondamentaux dans l'étude des systèmes dynamiques différentiels sont l'opérateur derivé

$$f \longrightarrow \frac{d}{dt}f$$

et l'opérateur intégral

$$f \longrightarrow \int_0^t f(s)ds.$$

Comment ces opérateurs se comportent ils dans l'espace des fonctions presque-périodiques? Dans cette section, nous indiquons d'abord les résultats sur les domaines de ces opérateurs. Ces résultats sont des conditions pour que la derivée d'une fonction presque-périodique soit presque-périodique, et des conditions pour que l'intégrale d'une fonction presque-périodique soit presque-périodique.

Il s'agit de résultats classiques pour lesquels nous renvoyons à des références classiques [13], [6], [18] .

Les problèmes d'existence de solutions presque-périodiques des systèmes dynamiques différentiels sont complètement liés aux problèmes de recherche de points fixes d'opérateurs intégrals, nous sommes donc, intéressés dans cette partie à la compacité de l'opérateur intégral dans des sous espaces de fonctions presque-périodiques, plus généraux que l'espace des fonctions périodiques.

Derivée

Théorème 23 *([18]) Si f est une fonction presque-périodique dérivable, et si $\frac{d}{dt}f$ est uniformément continue, alors $\frac{d}{dt}f$ est une fonction presque-périodique.*

Remarque 8 La propriété indiquée par le théorème est une banalité dans le résultat du théorème 23: le fait que la derivée d'une fonction presque-périodique est presque-périodique, est vrai sans condition dans le cas périodique. Comme on le voit sur l'exemple suivant, elle est fausse en général dans le cas presque-périodique. Soit

$$f(t) = \sum_1^{\infty} \frac{1}{n^2} \exp(in^2 t).$$

Si $\frac{d}{dt}f$ est presque-périodique la série formelle est $\sum_1^{\infty} i \exp(in^2 t)$, mais cette dernière n'est pas presque-périodique car la série de ses coefficients n'est pas de carré sommable, donc $\frac{d}{dt}f$ n'est pas presque-périodique car elle n'est pas uniformément continue.

Primitive

Dans le cas de fonctions périodiques, toute fonction à moyenne nulle est à primitive périodique, mais dans le cas de fonctions presque-périodiques, il n'est pas toujours vrai que

$$\int_0^t f(s)ds$$

reste presque-périodique même si l'on suppose qu'elle est a' moyenne nulle :
Contre-exemple : Nous avons donné un exemple à la suite de la proposition 18. Nous détaillons ici l'argumentation donnée par Zhensheng [41] pour l'exemple suivant:

$$f(t) = \sum_0^\infty \frac{1}{(2k+1)^2} \sin\left(\frac{t}{2k+1}\right).$$

$f(t)$ est une fonction presque-périodique, car la série $\sum_1^\infty \frac{1}{(2k+1)^2}$ est absolument convergente.

$$F(t) = \int_0^t f(s)ds = \sum_0^\infty \frac{1}{2k+1}\left(1 - \cos\frac{t}{2k+1}\right) = \sum_0^\infty \frac{2}{2k+1} \sin^2 \frac{t}{2\,(2k+1)} \geq 0.$$

Pout tout N et tout réel t, on a

$$F(t) > \textstyle\sum_0^N \frac{1}{2k+1} \sin^2 \frac{t}{2k+1}.$$

On observe que F est continue sur $\mathbb{R}$, pour tout $k > 0$, prenons

$$t_k = \tfrac{\pi}{2} \textstyle\prod_{j=0}^k (2j+1).$$

On a:

$$F(t_k) \geq \textstyle\sum_0^k \frac{1}{2j+1}$$

$F(t_k) \to \infty$ quand $k \to \infty$.

D'autre part, f comme somme à coefficients dans l^1 de fonctions à moyennes nulle, est à moyenne nulle. Donc, f est presque-périodique à moyenne nulle mais n'a pas de primitive presque-périodique

En fait dans le cas périodique, la propriété de moyenne nulle équivaut au bornage de la fonction intégrale: condition nécessaire et suffisante pour qu'elle soit périodique. Cette propriété n'est pas suffisante dans le cas presque-périodique. Malgré tout, en dimension finie, la condition de bornage reste suffisante.

Théorème 24 *([18]) Soit f une fonction presque-périodique à valeurs dans un espace de dimension finie . Alors une condition nécessaire et suffisante pour que*

$$F(t) = \int_0^t f(s)ds \tag{1.19}$$

soit presque-périodique est qu'elle soit bornée.

Notons qu'en dimension infinie, le bornage de l'intégrale n'est plus une condition suffisante (sauf dans le cas d'un espace de Banach uniformément convexe où l'image de F est relativement compact) ([18]).

Théorème 25 *(Levitan [31]) Soit X un espace de Banach, $f : \mathbb{R} \to X$ presque-périodique telle que F soit bornée. Si, de plus,*

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} F(s)ds = b,$$

existe, uniformément par rapport à t, alors F est presque-périodique.

Théorème 26 *([24]) Soit X un espace de Banach, $f : \mathbb{R} \to X$ presque-périodique telle que Λ_f est formé d'éléments incommensurables dans leur ensemble, alors F est presque-périodique.*

Théorème 27 *([26]) Soit X un espace de Banach, $f : \mathbb{R} \to X$ presque-périodique telle qu' il existe $\alpha > 0$, $\forall\ \lambda \in \Lambda_f$, $|\lambda| > \alpha$. Alors F est presque-périodique.*

Compacité de l'opérateur intégral (cas de dimension finie)

Nous désignons par T un opérateur du type suivant

$$(Tf)(t) = \int_0^t f(s)ds + c(f)$$

où c est une forme linéaire continue sur $C_B(\mathbb{R})$.
Nous travaillons dans le domaine de T,

$$D(T) = \{f \text{ presque-périodique}, Tf \text{ est presque-périodique}\},$$

et dans $D(T)$, nous cherchons des sous espaces F invariants par T, sur lesquels T est compact.
Notons que si F est invariant par T, il en est de même de la fermeture, donc F

pourra être supposé fermé.
Si T est compact, il en est de même de l'opérateur $K_h = (T - T_{-h})/h$, introduit dans la preuve de la proposition 5. Par conséquent, la conclusion de cette preuve est encore valable. F doit être séparable. Enonçons ce résultat général dans une proposition.

Proposition 28 *Soit F un sous-espace fermé de l'espace des fonctions presque-périodiques tel que $T{:}F \longrightarrow F$ et $T/_F$ est compact. Alors F est séparable.*

Une étude detaillée des propriétés de F paraît difficile. Nous pouvons simplement ajouter que par application des résultats sur les opérateurs compacts [21] (Tome 1, page 330) si T est compact sur F, F s'écrit comme somme non directe $F = K + F_1$ de deux sous-espaces fermés K, F_1 invariants par T et tels que

- Le spectre de T/K se réduit à $\{0\}$. F_1 est la fermeture de la somme des espaces propres pour les valeurs propres autres que 0.
  Nous ne savons rien à dire sur K.
  Nous ramenons au cas où F est de type F_1.
  Nous étudions un cas particulier. On donne une famille d'exposants $(\lambda_j)_{j\in N}$, $\lambda_j \to +\infty$ quand $j \to +\infty$, supposés ordonnés dans l'ordre croissant.

Proposition 29 *Si E est l'ensemble des limites uniformes des séries formelles*

$$\sum a_j \exp(i\lambda_j t).$$

Alors, T défini sur les $\exp(i\lambda_j t)$ par

$$T(\exp(i\lambda_j t)) = \frac{1}{i\lambda_j}\exp(i\lambda_j t)$$

est compact sur E.

Preuve: Introduisons la suite d'opérateurs de rang fini

$$\begin{aligned} \pi_n : E &\longrightarrow E \\ f &\longrightarrow \pi_n f = \sum_{j\leq n} a_j \exp(i\lambda_j t). \end{aligned} \tag{1.20}$$

Les opérateurs π_n sont bornés en tout point de E. D'après le théorème de la borne uniforme [21] on déduit qu'ils sont uniformément bornés. Il existe $\beta \geq 0$ tel que

$$\|\pi_n f\|_{C_B(\mathbb{R})} \leq \beta \|f\|_{C_B(\mathbb{R})}, \text{pour tout } n \in N.$$

Par ailleurs, de la convergence de $\pi_n f$ vers f on déduit que $\|\pi_n f\|_{C_B(\mathbb{R})}$ converge vers $\|f\|_{C_B(\mathbb{R})}$ et donc

$$\sup_{n\in N} \|\pi_n f\|_{C_B(\mathbb{R})} \geq \|f\|_{C_B(\mathbb{R})}.$$

La norme $\|f\|_E = \sup_{n\in N} \|\pi_n f\|_{C_B(\mathbb{R})}$ est donc équivalente sur E à la norme du sup sur $\mathbb{R}$ $\|\cdot\|_{C_B(\mathbb{R})}$.

Revenons à l'opérateur T dont on connait l'expression sur les polynômes trigonométriques engendrés par $\{\exp(i\lambda_j t), j \in N\}$.

En utilisant la régle d'Abel $a_j \exp(i\lambda_j t) = \pi_{j+1} f - \pi_j f$ et la norme sur E, on obtient:

$$n > m, \ \|T\pi_n f - T\pi_m f\|_E \leq \left(\frac{1}{\lambda_m} - \frac{1}{\lambda_n}\right) \sup_{j\geq m-1} \|\pi_j f\|,$$

ce qui complète l'expression de T sur E et donne

$$\|Tf - T\pi_m f\|_E \leq \left(\tfrac{1}{\lambda_m}\right) \sup_{j\geq m-1} \|\pi_j f\|.$$

T est limite uniforme d'une suite d'opérateurs de rang fini. T est donc compact. Un cas dápplication de la proposition 29, est celui où on suppose les $(\lambda_j)_{j\in N}$ rationnellement indépendants et

$$E = \left\{f \text{ presque-périodique, avec } \Lambda f \subset (\lambda_j)_{j\in N}\right\}.$$

En effet d'après la proposition 18, pour tout $f \in E$ la série de Fourier de f converge normalement vers f. De plus, E est fermé dans $C_B(\mathbb{R})$.

Remarque 9 Notons que le fait que $|\lambda_j| \longrightarrow \infty$ est une condition nécessaire pour la compacité de T. S'il y a un nombre infini de λ_j, compris dans un intervalle $[\alpha, \beta]$, la suite

$$\left\{\tfrac{1}{i\lambda_j} \exp(i\lambda_j t)\right\}$$

correspondant à ces valeurs ne possède aucune sous-suite convergente.

Remarque 10: Si nous plaçons dans $\mathcal{H}$ avec la norme m_2, au lieu de $C_B(\mathbb{R})$, les opérateurs π_n sont des projecteurs orthogonaux. Donc, $\|\pi_n\| = 1$.

$$m_2(Tf - T\pi_n f) \leq \sup_{j\geq n} \frac{1}{\lambda_j} m_2(f).$$

T est compact sur tous les sous-espaces E fermés de $\mathcal{H}$ dont lénsemble des exposants $\Lambda_E = (\cup_{f\in E} \Lambda_f)$ est soit fini, soit de la forme

$\{\lambda_j, \ j \in N : \ |\lambda_j| \longrightarrow \infty, \text{quand } j \longrightarrow \infty\}$.

D'après la remarque précédente, cette propriété caractérise complètement les sous-espaces E de $\mathcal{H}$ sur lesquels T est compact.

Par conséquent; le résultat indiqué au début de cette remarque parait d'un interêt indépendant de celui de la proposition 29. Le problème que nous avons posé: chercher les sous-espaces de $C_B(\mathbb{R})$ sur lesquels T est compact, n'est que partiellement élucidé.

Fonctions Presque-Périodiques avec Paramètres

Introduction:

Dans l'étude des systèmes différentiels interviennent naturellement des fonctions de type $f(t,x)$, presque-périodiques en t, pour chaque x fixé. Une propriété importante pour les développements ultérieurs est que si $x(t)$ est presque-périodique, alors la fonction définie par $t \longrightarrow f(t,x(t))$ le soit aussi. Cette propriété est fausse en général.

Example $f(t,x) = \exp(itx)$.

Elle est vérifiée néanmoins sous l'hypothèse de presque periodicité en t uniformément en x. La notion de presque-périodicité peut être formulée, de manière équivalente, en utilisant les autres caractérisations des fonctions presque-périodi ques, ainsi qu'il ressort des résultats que nous rappelons ci-dessous, et pour lesquels on renvoie à [18] et [6].

Définition 30 *Soit E un espace de Banach, muni d'une norme notée $\|.\|$, D un ouvert de E. Soit $f \in C(\mathbb{R}\times D, E)$; f est dite presque-périodique en t uniformément par rapport à x dans D, si pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout compact K dans D, il existe un nombre réel $l(\varepsilon, K) > 0$, tel que: chaque intervalle I de longueur $l(\varepsilon, K)$ contient un nombre réel τ pour lequel on a:*

$$\sup_{(t,x)\in\mathbb{R}\times K} \|f(t+\tau,x) - f(t,x)\|_E < \varepsilon.$$

Rappelons les résultats importants suivants que nous utiliserons dans la suite de ce travail.

Téorème 31 *([19]) Soit $f \in C(\mathbb{R}\times D, E)$, une fonction presque-périodique en t uniformément par rapport à x dans D. Soit K un compact dans D. Alors $f(t,x)$ est relativement compact et uniformément continue sur $\mathbb{R}\times K$.*

Théorème 32 *([19]) Soit $f \in C(\mathbb{R}\times D, E)$, une fonction presque-périodique en t uniformément par rapport à x dans E. Alors, de toute suite de réels $\{\sigma_n\}$, on peut extraire une sous suite $\{\sigma_n'\}$ et il existe une fonction continue $g(t,x)$ telle que*

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \|f(t+\sigma_n',x) - g(t,x)\| = 0,$$

uniformément sur $\mathbb{R}\times K$, où K est un compact de E. De plus $g(t,x)$ est aussi presque-périodique en t.

Les deux théorèmes suivants donnent la caractérisation de Bochner pour les fonctions paramétrées.

Théorème 33 *Soit $f \in C(\mathbb{R} \times D, E)$ et, supposons que de toute suite de réels $\{\sigma_n\}$, on puisse extraire une sous suite $\{\sigma'_n\}$ telle que $f(t + \sigma'_n, x)$ converge uniformément sur $\mathbb{R} \times K$, où K est un compact de D. Alors $f(t, x)$ est presque-périodique en t uniformément par rapport à x dans D.*

Théorème 34 *[27] Soit $f \in C(\mathbb{R} \times D, E)$, une fonction presque-périodique en t uniformément par rapport à x dans D. Soit K un compact dans D. Alors pour toute suite $((t_n), (\sigma_n))$, il existe une sous-suite extraite $\left((t'_n), (\sigma'_n)\right)$ telle que*

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \lim_{k \longrightarrow \infty} f(t + t'_n + \sigma'_k, x) = \lim_{n \longrightarrow \infty} f(t + t'_n + \sigma'_n, x),$$

uniformément sur $\mathbb{R} \times K$. La réciproque est encore vraie.

Le théorème suivant traduit une propriété de complétude

Théorème 35 *[27] Soit $f_k \in C(\mathbb{R} \times E, E)$, une suite de fonctions presque-périodiques en t, uniformément par rapport à x dans E. Supposons que la suite $\{f_k(t, x)\}_1^\infty$ converge uniformément sur $\mathbb{R} \times K$ vers une fonction $f(t, x)$, où K est un compact dans E. Alors $f(t, x)$ est presque-périodique en t uniformément par rapport à x dans E.*

Le résultat essentiel de cette partie est le suivant, il a été annoncé dans l'introduction.

Théorème 36 *[39] Soit $f \in C(\mathbb{R} \times K, E)$, une fonction presque-périodique en t uniformément par rapport à x dans E, et $\xi(t)$ une fonction presque-périodique telle que $\xi(\mathbb{R}) \subset K$, K est un compact dans E. Alors $t \longrightarrow f(t, \xi(t))$ est une fonction presque-périodique.*

Chapitre 2. Fonctions Pseudo Presque-Périodiques

Introduction

Dans [40], C. Zhang a introduit une extension de la notion de fonctions presque -périodiques, celles dites pseudo presque-périodiques (abbrev. comme fonctions p.p.p).

L'extension connue des fonctions presque-périodiques est la classe des fonctions asymptotiquement presque -périodiques (qui a été introduite par Frechet [19]), ce sont les fonctions de type $f = g + \varepsilon$ avec g presque-périodique et ε continue et

de plus $\varepsilon(t) \to 0$ quand $t \to \infty$.
La définition de fonctions pseudo presque-périodiques donnée dans [40] est comme suit: toute fonction f qui peut s'écrire comme suit $f = g + \varphi$ avec g presque-périodique et φ est continue, bornée et $M(\|\varphi\|) = 0$. $M(\cdot)$ est la valeur moyenne "asymptotique" , définie par:

$$M(\psi) = \lim_{r\to\infty} \frac{1}{2r}\int_{-r}^{r} \psi(s)ds.$$

ous allons maintenant faire une extension de cette notion en une notion plus générale, en considérant la même expression mais avec la perturbation ergodique n'est ni continue ni bornée

Notons par

$$\widetilde{\mathcal{P}}\mathcal{AP}_0(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{array}{l} \varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \\ \text{Lebesgue measurable, telle que} \lim\limits_{r\to\infty} \frac{1}{2r}\int_{-r}^{r} |\varphi(s)|\, ds = 0 \end{array} \right\}$$

et par

$$\widetilde{\mathcal{P}}\mathcal{AP}_0(\Omega \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^n) = \left\{ \begin{array}{l} \varphi : \Omega \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^n, \\ \text{telle que } \varphi(x, .) \in \widetilde{\mathcal{P}}\mathcal{AP}_0(\mathbb{R}), \text{ for each } x \in \Omega \text{ and} \\ \lim\limits_{r\to\infty} \frac{1}{2r}\int_{-r}^{r} \|\varphi(x,s)\|\, ds = 0 \text{ uniformément en } x \in \Omega, \\ \text{où } \Omega \subset \mathbb{R}^n \end{array} \right\}$$

où Ω est un sous ensemble de $\mathbb{R}^n$.

Définition 37 *Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (respectivement $\Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$) est dite pseudo presque-périodique (pseudo presque-périodique en $t \in \mathbb{R}$, uniformément par rapport à $x \in \Omega$) si $f = g + \varphi$ où $g \in \mathcal{AP}(\mathbb{R})$ $(\mathcal{AP}(\Omega \times \mathbb{R}))$ et $\varphi \in \widetilde{\mathcal{P}}\mathcal{AP}_0(\mathbb{R})$ $(\widetilde{\mathcal{P}}\mathcal{AP}_0(\Omega \times \mathbb{R}))$.*

g et φ sont appelées la composante presque-périodique et la perturbation ergodique, respectivement, de la fonction f.

Remarque 11: Notons que g et φ sont déterminées de façon unique. En effet, comme

$$N(\varphi) = \lim_{r\to\infty} \frac{1}{2r}\int_{-r}^{r} |\varphi(s)|\, ds$$

est une norme sur $\mathcal{AP}(\mathbb{R})$, alors si $f \in \widetilde{\mathcal{P}}\mathcal{AP}(\mathbb{R})$, $f = g_1 + \varphi_1 = g_2 + \varphi_2$ on a: $N(g_1 - g_2) = 0$, ce qui implique que $g_1 = g_2$, ainsi, $\varphi_1 = \varphi_2$. Notons par $\mathcal{PAP}(\mathbb{R})$

:(resp. $\tilde{P}AP(\Omega\times\mathbb{R})$) l'ensemble de telles fonctions (resp. l'ensemble des fonctions pseudo presque-périodiques en t, uniformément par rapport à $x\in\Omega$).

Exemples:

$$f(t)=\sin t+\sin\pi t+\frac{1}{\sqrt{|t|}},\qquad F(x,t)=f(t)\cos x.$$

$$f(t)=\sin t+\sin\pi t+t\left|\sin\pi t\right|^{t^N}\ \text{ for } N>6.$$
$$f(x,t)=\cos x(\sin t+\sin\pi t+t\left|\sin\pi t\right|^{t^N})\ \text{for } N>6.$$

Montrons que $\varphi(t)=t\left|\sin\pi t\right|^{t^N}$, est à moyenne nulle , mais non bornée.

- $\varphi(t)\to\infty$ aux points $t=\frac{1}{2}+k$, quand $|k|\to\infty$.
- Montrons que

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{r}\int_0^r\|\varphi(s)\|\,ds=0,$$

Considérons

$$\begin{aligned}\int_k^{k+1}\varphi(t)dt &= \int_k^{k+1}t\left|\sin\pi t\right|^{t^N}dt\le 2(k+1)\int_0^{\frac{1}{2}}\left|\sin\pi t\right|^{(k+t)^N}dt\\ &\le 2(k+1)\int_0^{\frac{1}{2}}\left|\sin\pi t\right|^{k^N}dt.\end{aligned}$$

On sait que

$$\pi\int_0^a(\sin\pi t)^A\cos\pi t dt=\frac{1}{A+1}(\sin\pi a)^{A+1}\qquad\text{with } a<\tfrac{1}{2},$$

ce qui implique que

$$\int_0^a(\sin\pi t)^A dt\le\frac{1}{\pi(A+1)}\frac{(\sin\pi a)^{A+1}}{\cos\pi a}.$$

Dáutre part, nous avons

$$\frac{(\sin\pi a)^{A+1}}{\cos\pi a}=\frac{\exp\dfrac{A+1}{2}\log\sin^2\pi a}{\cos\pi a}\le\frac{\exp\dfrac{A+1}{2}(\sin^2\pi a-1)}{\cos\pi a}.$$

Commençons par étudier la fonction,

$$\frac{\exp-\left(\dfrac{A+1}{2}\right)u^2}{u}\qquad u=\cos\pi a$$

Si on pose $B = \frac{A+1}{2}$ (sous quelle condition on a línégalité suivante $\frac{\exp -Bu^2}{u} < 1$).

Considérons $\varphi(v) = \frac{\exp -v^2}{v}$, alors,

$$\frac{\exp -Bu^2}{u} = \varphi\left(\sqrt{B}u\right)\sqrt{B}, \ \frac{\exp -v^2}{v} < 1 \Longleftrightarrow \varphi\left(\sqrt{B}u\right) < \frac{1}{\sqrt{B}}.$$

Comme φ est décroissante, alors, $\varphi(v) = \frac{1}{\sqrt{B}}$, pour $v = v_B$

$$\varphi\left(\sqrt{B}u\right) < \frac{1}{\sqrt{B}} \Longleftrightarrow \sqrt{B}u > v_B \Longleftrightarrow u > \frac{v_B}{\sqrt{B}}.$$

Calculons la valeut de v_B

$$\frac{\exp -v^2}{v} = \tfrac{1}{\sqrt{B}}$$

on a:

$$1 + v^2 < \exp v^2 = \tfrac{\sqrt{B}}{v}$$

ceci implique que

$$v + v^3 < \sqrt{B} \Longrightarrow v_B < B^{1/6}$$

on a

$$u > \tfrac{B^{1/6}}{B^2} = B^{-1/3}.$$

Donc

$$B = \tfrac{A+1}{2}; \qquad A = k^N.$$

Ceci implique que

$$u > \left(\tfrac{k^N+1}{2}\right)^{-1/3}.$$

D'autre part,

$$u = \cos \pi a \Longrightarrow a < \tfrac{1}{\pi} \arccos\left[\left(\tfrac{k^N+1}{2}\right)^{-1/3}\right].$$

Alors, on a:

$$\int_0^a (\sin \pi u)^A \, du \leq \tfrac{1}{\pi(A+1)}, \qquad \text{pour } a < \tfrac{1}{\pi} \arccos\left[\left(\tfrac{A+1}{2}\right)^{-1/3}\right].$$

Ainsi, on a:

$$\int_0^{\frac{1}{\pi}\arccos\left[\left(\frac{k^N+1}{2}\right)^{-1/3}\right]} (\sin \pi u)^{k^N}\, du \leq \frac{1}{\pi(k^N+1)},$$

et

$$\int_{\frac{1}{\pi}\arccos\left[\left(\frac{k^N+1}{2}\right)^{-1/3}\right]}^{\frac{1}{2}} (\sin \pi u)^{k^N}\, du \leq \left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\arccos\left[\left(\frac{k^N+1}{2}\right)^{-1/3}\right]\right\}$$

mais,

$$\sin(\tfrac{\pi}{2} - \arccos\alpha) = \alpha \simeq \tfrac{\pi}{2} - \arccos\alpha, \qquad \text{quand } \alpha \to 0.$$

alors,

$$\int_{\frac{1}{\pi}\arccos\left[\left(\frac{k^N+1}{2}\right)^{-1/3}\right]}^{\frac{1}{2}} (\sin \pi u)^{k^N}\, du \leq \frac{1}{2\pi}\left(\frac{k^N+1}{2}\right)^{-1/3}.$$

En conclusion:

$$\int_k^{k+1} \varphi(t)dt \leq 2(k+1)\left[\frac{1}{\pi(k^N+1)} + \frac{1}{2\pi}\left(\frac{k^N+1}{2}\right)^{-1/3}\right].$$

Dans le cas $1 - \frac{N}{3} < -1$ $(N > 6)$, la serie de terme génral $\int_k^{k+1} \varphi(t)dt$ converge, par conséquent $\frac{1}{r}\int_0^r \varphi(t)dt \to 0$, quand $r \to +\infty$. Ce qui achève la démonstration.

Propriétés

Remarque 12: De la même façon que dans le cas presque- périodique, on peut définir la moyenne d'une fonction pseudo presque-périodique, ses coéfficients de Fourier, ses exposants de Fourier, mais on ne peut rien dire vis à vis de la décomposition en série de Fourier.

Lemme 38 : *Si* $f \in \widetilde{\mathcal{P}}\mathcal{AP}(\mathbb{R})$, *alors*

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{2r}\int_{-r}^{r} f(s)ds = M(f)$$

existe et est finie c'est la valeur moyenne de f. *De plus* $M(f) = M(g)$.

Preuve : En effet

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{2r}\int_{-r}^{r} f(s)ds = \lim_{r\to\infty}\frac{1}{2r}\int_{-r}^{r} g(s)ds + \lim_{r\to\infty}\frac{1}{2r}\int_{-r}^{r}\varphi(s)ds$$

comme $g \in \mathcal{AP}$ alors

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{2r}\int_{-r}^{r} g(s)ds$$

existe et est finie [6].

De plus. nous avon $-|\varphi(s)| \leq \varphi(s) \leq |\varphi(s)|$. Alors

$$-\lim_{r\to\infty}\frac{1}{2r}\int_{-r}^{r}|\varphi(s)|\,ds \leq \lim_{r\to\infty}\frac{1}{2r}\int_{-r}^{r}\varphi(s)ds \leq \lim r \to \infty\frac{1}{2r}\int_{-r}^{r}|\varphi(s)|\,ds.$$

Ainsi

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{2r}\int_{-r}^{r}\varphi(s)ds = 0 = M(\varphi) \text{ et } M(f) = M(g).$$

Il est connu [6] que la valeur limite

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{2r}\int_{-r}^{r} f(s)\exp(-i\lambda s)ds = a(\lambda, f)$$

existe pour toute fonction presque-périodique et pour tout nombre réel λ; et il existe un ensemble au plus dénombrable de nombres réels Λ, telle que $a(f,\lambda) = 0$ si $\lambda \notin \Lambda$.
Ainsi si $f = g + \varphi$ est un élément de $\tilde{\mathcal{P}}\mathcal{AP}(\mathbb{R})$ alors $a(f,\lambda) = a(g,\lambda)$. ■

Lemme 39: *Si $f \in \tilde{\mathcal{P}}\mathcal{AP}(\mathbb{R})$, et si g est la composante presque-périodique, alors on a $g(\mathbb{R}) \subset \overline{f(\mathbb{R})}$ de plus si φ est continue et bornée alors on a*

$$\|f\| \geq \|g\| \geq \inf_{t\in\mathbb{R}}|g(t)| \geq \inf_{t\in\mathbb{R}}|f(t)|.$$

Preuve: Supposons que $g(\mathbb{R}) \subsetneq \overline{f(\mathbb{R})}$, alors il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ telle que

$$\inf_{s\in\mathbb{R}}|g(t_0) - f(s)| > \varepsilon.$$

Comme g est continue en t_0, il existe $\delta > 0$ tel que pour $|t| < \delta$ implique que

$$\sup_{s\in\mathbb{R}}|R_{t_0}g(t) - R_{t_0}f(s)| > \varepsilon \tag{2.1}$$

$R_{t_0}g \in \mathcal{AP}$ car $\mathcal{AP}$ est invariant par translation .

En utilisant la définition de Bohr [15] de la presque -périodicité, alors, pour $\varepsilon > 0$ il existe $l(\frac{\varepsilon}{2}) > 0$ tel que tout intervalle de longueur $l(\frac{\varepsilon}{2}) > 0$ contient un nombre τ tel que
$$|R_\tau R_{t_0} g - R_{t_0} g| \leq \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.2}$$

Si $t \in [-\delta, +\delta]$ alors $t + \tau \in [-\delta + \tau, \tau + \delta]$.

Par conséquent

$$\begin{aligned}
|R_{t_0}\varphi(t+\tau)| &= |R_{t_0} f(t+\tau) - R_{t_0} g(t+\tau)| \\
&\geq |R_{t_0} f(t+\tau) - R_{t_0} g(t)| - |R_{t_0} g(t) - R_{t_0} g(t+\tau)| \\
&\geq \inf_{s\in\mathbb{R}} |R_{t_0} f(s) - R_{t_0} g(t)| - \|R_\tau R_{t_0} g - R_{t_0} g\| \geq \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

En vertu de (2.1) et (2.2).

Ce qui donne que
$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{2r} \int_{-r}^{r} |R_{t_0}\varphi(s)|\, ds \geq \delta \frac{\varepsilon}{l_\varepsilon} > 0,$$
ce qui est en contradiction avec la définition de φ. ■

Proposition 40 *Si* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $(\mathbb{R}\times\Omega \longrightarrow \mathbb{R})$, $f = g + \varphi$, *où* $g \in \mathcal{AP}(\mathbb{R})(\mathcal{AP}(\Omega \times \mathbb{R}))$ *et* $\varphi \in \widetilde{\mathcal{P}}\mathcal{AP}_0(\mathbb{R})(\widetilde{\mathcal{P}}\mathcal{AP}_0(\Omega \times \mathbb{R}))$, *alors*

i) Si $\lim_{|t|\to\infty} \varphi(t)$ existe, on a: $\lim_{|t|\to+\infty} \varphi(t) = 0$.

ii) Si $f \geq 0$, alors $g \geq 0$.

Preuve: i) Supposons que la propriété n'est pas vraie, alors il existe une constante $\alpha > 0$, et $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi(t) > \alpha$ pour $t \geq t_0$, ce qui donne
$$\frac{1}{r}\int_0^r |\varphi(s)|\, ds = \frac{1}{r}\left[\int_0^{t_0} |\varphi(s)|\, ds + \int_{t_0}^{r} |\varphi(s)|\, ds\right] \geq \frac{1}{r}\alpha(r - t_0).$$

Par passage à la limite quand $r \to \infty$, on obtient $\lim_{r\to\infty} \frac{1}{2r}\int_{-r}^{r} |\varphi(s)|\, ds \geq \alpha$, ce qui contredit le fait que $\varphi \in \widetilde{\mathcal{P}}\mathcal{AP}_0(\mathbb{R})$.

ii) Pour la démonstration de la deuxième étape nous aurons besoin du lemme suivant.

Lemme 41 *Supposons* $g \in \mathcal{AP}(\mathbb{R})$ *est telle que: pour tout* $\varepsilon > 0$,
$$\frac{meas\,\{t : g(t) > -\varepsilon,\ t \in [-r, +r]\}}{2r} \longrightarrow 1, \text{ quand r} \longrightarrow +\infty.$$

Alors, $g \geq 0$.

Preuve: Nous allons procéder par l'absurde. Supposons que la conclusion n'est pas vraie. Ce qui implique que $g(x_0) < 0$ pour un certain x_0. Choisissons $\varepsilon > 0$, $\varepsilon < -g(x_0)$.

Par continuity de g, il existe $\delta > 0$ tel que: $|x - x_0| \leq \delta \Longrightarrow g(x) < -\varepsilon$. En vertu de la characterisation de Bohr pour les fonctions presque-périodiques (1), il existe $l > 0$, tel que tout intervalle I de longueur l, on peut trouver une presque période τ

$$|g(x + \tau) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Choisissons une suite τ_k de presque-périodes, $\tau_k \in [kl, (k + 1)l[$ nous avons:

$$g(x + \tau_k) < -\frac{\varepsilon}{2}, \text{ pour } x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \text{ et tout } k \in N.$$

Posons $M = |x_0| + \delta$.

Nous avons

$$meas\left\{x \in [-kl - M, kl + M] : g(t) < -\frac{\varepsilon}{2},\right\} \geq 2k\delta.$$

Ainsi,

$$\frac{meas\left\{x \in [-kl - M, kl + M] : g(t) < -\frac{\varepsilon}{2},\right\}}{2kl + 2M} \geq \frac{2k\delta}{2kl + 2M}.$$

Le second membre ne tend pas vers zéro quand $k \longrightarrow +\infty$. Ce qui contredit l'hypothèse faite dans le lemme. Ainsi $g \geq 0$.

Maintenant, nous allons donner la preuve de la deuxième étape de la proposition 40.

Supposons que $f \geq 0$, nous voulons montrer que $g \geq 0$. Nous avons $f = g + \varphi$, avec $\lim_{r\to\infty} \frac{1}{2r}\int_{-r}^{r} |\varphi(s)|\, ds = 0$ (Mais, nous n'avons pas supposé que $\varphi(t) \longrightarrow 0$ quand $t \to \pm\infty$).

$$\exists\, t_n \to +\infty,\ g(t + t_n) \to g(t). \forall t.$$

$$\forall \varepsilon > 0,\ \forall r > 0;\ meas\ \{t \in [-r, +r] :\ \varphi(t) > \varepsilon\} \to 0, \text{ quand } r \to \infty.$$

Ce qui donne que

$$\frac{meas\ \{t :\ g(t) > -\varepsilon,\ t \in [-r, +r]\}}{2r} \to 1, \text{ quand } r+ \to \infty.$$

Ceci montre que $g \geq 0$, $\forall t$. Ce qui achève la preuve de la proposition 40.

Remarque 13: Il existe des fonctions φ telles que $\varphi \in \tilde{P}\mathcal{AP}_0(\mathbb{R})$, mais $\lim_{t\to-\infty} \varphi(t)$ n'existe pas. Considerons, par exemple,

$$\varphi(t) = \begin{cases} \sqrt{n} & n \leq t \leq n + \dfrac{1}{n} \\ 0 & t \text{ ailleurs.} \end{cases}$$

Il est clair que $\lim_{|t|\to+\infty} \varphi(t)$ n'existe pas, alors que

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{2r} \int_{-r}^{r} |\varphi(s)|\, ds = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{k}}{kn} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} = 0.$$

Thórème 42 *$\tilde{P}\mathcal{AP}(\mathbb{R})$ est invariante par translation, et contient les fonctions constantes. De plus $\tilde{P}\mathcal{AP}(\mathbb{R})/\tilde{P}\mathcal{AP}_0(\mathbb{R}) = \mathcal{AP}(\mathbb{R})$.*

Pour $H = (h_1, h_2, \ldots\ldots\ldots, h_n) \in C(\mathbb{R})^n$, supposons que $H(t) \in \Omega$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. On définit $H : \mathbb{R} \longrightarrow \Omega \times \mathbb{R}$ par $H(t) = (h_1(t), h_2(t), \ldots\ldots, h_n(t), t)$.

Pour $F = (f_1, f_2, \ldots, f_n) \in \tilde{P}\mathcal{AP}(\mathbb{R})^n$ soit $G = (g_1, g_2, \ldots, g_n)$ et $\Phi = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$ où g_i et φ_i sont la composante presque-périodique et la perturbation ergodique, respectivement de f_i, $i = 1, 2, \ldots\ldots n$.

Théorème 43 *Pour $i = 1, 2, \ldots\ldots n$, soit $\Omega_i \subset \mathbf{C}$ un fermé $\Omega = \prod_1^n \Omega_i \subset \mathbf{C}^n$. Soit $f \in \tilde{P}\mathcal{AP}(\Omega \times \mathbb{R})$ satisfaisant $|f(x,t) - f(y,t)| \leq L \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \quad x, y \in \Omega, t \in \mathbb{R}$, où $L > 0$. Si $F \in \tilde{P}\mathcal{AP}(\mathbb{R})^n$ et $F(t) \in \Omega$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ alors $f \circ (F \times i) \in \tilde{P}\mathcal{AP}(\Omega \times \mathbb{R})$.*

Referencias

[1] **E. Ait Dads**: *Détermination des comportements presque-périodiques dans certains systèmes à retard. (Thèse de 3^{me} cycle.* Université de Pau. Septembre (1982)).

[2] **E. Ait Dads and O. Arino**: *A nonlinear delay differential equation whose solutions are asymptotically sums of periodic functions.* Funkcialaj Ekvacioj, 32, (1989), 81-89.

[3] **E. Ait Dads, O. Arino and K. Ezzinbi**: *Positive almost periodic solution of some nonlinear delay integral equations*, submitted to J.M.A.A.

[4] **E. Ait Dads O. Arino et K. Ezzinbi**: *Periodic and Almost Periodic solution for some non linear delay integral equation in a Hilbert space*, to appear in D.E.D.S.

[5] **O. Arino and P. Seguier**: *About the behavior at infinity of solutions of:* $\frac{dx(t)}{dt} = f(t-1, x(t-1)) - f(t, x(t))$, J.M.A.A., Vol. 96 (1983), 420-436.

[6] **L. Amerio and G. Prouse**: *Almost periodic functions and differential equations*. Van, Nostrand-Reinhold co., (1971).

[7] **J. Bass**: Cours de Mathématiques tome III (1971)

[8] **J. P. Bertrandias**: *Espace de fonctions bornées et continues en moyenne asymptôtique d'ordre p*. Bull. Soc. Math. de France, (1966).

[9] **A. S. Besicovitch**: *Almost periodic functions*. Dover publications, New York, (1948).

[10] **A. S. Besicovitch**: *Almost periodic functions*. Cambridge University Press, (1932).

[11] **A. S. Besicovitch**: *A generalised almost-periodic function*. Proc. Math. Soc. London, 2^{eme} série, t.25, (1952).

[12] **A. S. Besicovitch and H. Bohr**: *Almost periodicity and general trigonometric series*. Acta. Math, t.57, (1931), 203-292.

[13] **S. Bochner**: *Beutrage zur theorie der fastperiodische functionen I. functionen einer variablen*. Math. Ann. 96. (1927).

[14] **S. Bochner**: *Fastperiodishe läsungen der Wellen-Gleichung*. Acta. Math. Vol.62, (1934).

[15] **P. Bohr**: *Almost periodic functions* (1968).

[16] **H. Bohr**: *Fastperiodishen Funktionen*. Springer (1932).

[17] **R. L. Cooke**: *Almost periodic functions* (1981), (Monograph (1984)).

[18] **C. Corduneanu**: *Almost periodic functions*, Interscience publishers, New York, London, (1968).

[19] **C. Corduneanu**: "*Almost -Periodic Functions* ", 2nd edition, Chelsea , New York, (1989).

[20] **C. Dafermos**: *Almost periodic processes and almost periodic solutions of evolution equations* in " dynamical systems Proc. Univ. Florida Inter. Symp." (A.R. BEDMARCK and L. CESARI, Eds) Academic-Press, New- York. (1977). 43-57.

[21] **J. Dieudonné**: *Fondements de l'Analyse Moderne*, Tome I fascicule XX-VIII, Gauthier Villars (1969).

[22] **K. Ezzinbi and A. Hachimi**: *Existence of a positive almost periodic solution through the use of the Hilbert projective metric for a class of functional equations*. To appear in N.L.A.T.M.A.

[23] **J. Favard**: *Leçons sur les Fonctions Presque-Périodiques*. Gauthier Villars, Paris, (1933).

[24] **A. Fink**: *Almost periodic differential equations*. Lectures notes, 377,Springer-Verlag (1974).

[25] **A. Fink and J. Gatica**: *Positive almost periodic solutions of some delay integral equations*. J.D.E, 83, (1991), 166-178.

[26] **J. K. Hale** : *Ordinary Differential Equations*. Wiley-Inter Science, A Division of John Wiley & Sons, New York, London, Sydney, Toronto. (1969).

[27] **E. Hanebaly**: *Etude des solutions périodiques et presque-périodiques d'équations différentielles non linéaires dont les solutions sont à valeurs dans un espace de Banach réel*. Thèse de doctorat d'état Rabat (1988).

[28] **A. Haraux**: *Asymptotic behaviour of trajectories for some non autonomous almost periodic processes*, preprint de l' Université Pierre et Marie Curie (1982).

[29] **Y. Hino**: *Stability and existence of almost periodic solutions of functional differential equations with infinite retardation*. Tohoku Math. Journal.

[30] **Z. Hitoshi and H. Ishii**: *On the existence of almost periodic complete trajectories for contractive almost periodic processes*. J.D.E.(43) (1982), 66-72.

[31] **B. M. Levitan & V. V. Zhikov**: *Almost periodic functions and differential equations*. Cambridge University press (1983).

[32] **W. Maak** : Fastperiodische Funktionen. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York (1967).

[33] **K. Sawano** : *Exponential asymptotic stability for functional differential equations with infinite retardations*. Tohoku Mathematical J. 31 (1979) 363-382.

[34] **G. Seifert**: *Almost periodic solutions for delay differential equations with infinite delays*. J.D.E.(41) (1981) 410-425.

[35] **W. Stepanov**: *Ueber einige verallgemeinerungen der fastperiodischen functionen*. Math. Ann., 95, (1926), 473-498.

[36] **R. Torrejón**: *Positive almost periodic solutions of a nonlinear integral equation from the theory of epidemics*. J.M.A.A, 156, (1991), 510-534.

[37] **R. Torrejón**: *Positive almost periodic solutions of state-dependent delay nonlinear integral equation*, Nonlinear Analysis, T.M.A. Vol.20, (1993), 1383-1416.

[38] **K. Yoshida** : *Functional Analysis*, Fourth edition Springer Verlag (1974).

[39] **S. Zaidman**: "*Solutions presque-périodiques des équations différentielles abstraites* ", Enseign. Math. 24.(1978) ,87-110.

[40] **C. Zhang**: "*Pseudo almost-Periodic Solutions of Some Differential Equations*", J.M.A.A .181, (1994), 62-76.

[41] **L. Zhensheng**: *Theory of linear systems*, Ann. of Diff. Eqs 6 (2) (1990).