

Coniques et Quadriques

Marcel Berger

Institut des Hautes Études Scientifiques (IHES)

35 Route des Chartres 91440

Bures sur Yvette

France

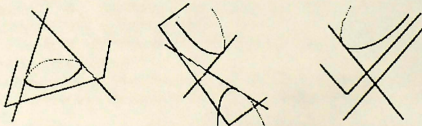
I.- Coniques

0.- Introduction

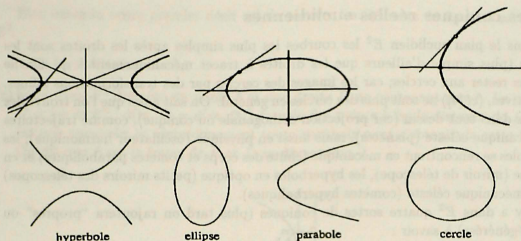
Dans ce texte nous poursuivons un double but, et ce, de façon simultanée :

- (i) énoncer les propriétés essentielles des coniques et les plus beaux et profonds résultats sur elles;
- (ii) expliquer pourquoi et comment les mathématiciens, en étudiant (i) au cours de leur histoire, ont été naturellement et nécessairement à la définition doublement abstraite mais finale donnée dans l'encadré ci-dessous. Doublement abstraite en effet, d'abord par l'introduction du plan projectif, c'est à dire en fait d'éléments, de points à l'infini, ensuite par l'introduction des nombres complexes (éléments, points "imaginaires"). Ces montées successives dans l'abstraction sont l'une des caractéristiques de la pensée mathématique.

Donnons auparavant la définition historique, et que traduit l'éthymologie, des coniques. Ce sont toutes les courbes planes que l'on peut obtenir comme sections des cônes de révolution de l'espace euclidien E^3 . Voici les dessins dans l'espace :



Ce qui donne dans des plans :



Et voici la définition qui apparaîtra, au fil du texte, comme la seule maintenant satisfaisante.

Une conique est une courbe du second degré dans le plan projectif complexe, c'est à dire dans l'espace des triples (x, y, z) de trois nombres complexes non tous nuls et considérés comme identifiés si $(x', y', z') = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$, λ complexe non nul, qui vérifient $P(x, y, z) = 0$ où P est un polynôme homogène et du second degré en les trois variables x, y, z . Ou encore, de façon intrinsèque, la projection dans $\mathbb{C}P^2 = (C^3/O)/R$, du noyau $q^{-1}(0)$ d'une forme quadratique non nulle q sur C^3 .

Lecteur, ne vous laissez pas décourager par cet énoncé; oubliez le temporairement si vous en avez envie.

Concernant enfin le fond du texte, nous avons dû faire un choix dans le (i), car depuis leur introduction par les Grecs vers le 4^{ème} siècle avant Jesus Christ, la somme de propriétés et de résultats concernant les coniques, même en étant sévère pour la profondeur et la beauté, est très grande.

Enfin dans un paragraphe nécessairement très bref vu la place qui nous est impartie dans ce livre, nous parlerons des quadriques, c'est à dire des objets qui généralisent les coniques en dimensions d'espace supérieures à 2 : pour commencer 3 puis ensuite d'quelconque.

Pour ce qui est des références, il faut insister que [7] est remarquable et presque complète pour tout ce qu'il y a dans notre texte. Elle a l'inconvénient de ne pas être présente dans plusieurs bibliothèques. Il en est de même de [9], qui en outre est d'une densité extrême. On trouvera un exposé moderne et détaillé dans la réunion

Coniques et Quadriques

Marcel Berger

Institut des Hautes Études Scientifiques (IHES)

35 Route des Chartres 91440

Bures sur Yvette

France

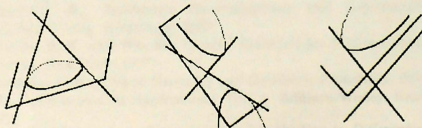
I.- Coniques

0.- Introduction

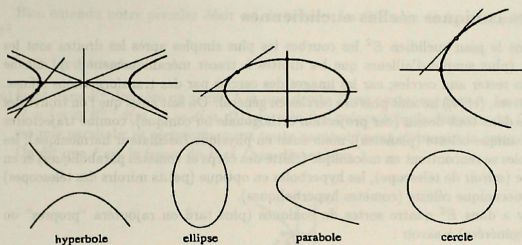
Dans ce texte nous poursuivons un double but, et ce, de façon simultanée :

- (i) énoncer les propriétés essentielles des coniques et les plus beaux et profonds résultats sur elles;
- (ii) expliquer pourquoi et comment les mathématiciens, en étudiant (i) au cours de leur histoire, ont été naturellement et nécessairement à la définition doublement abstraite mais finale donnée dans l'encadré ci-dessous. Doublement abstraite en effet, d'abord par l'introduction du plan projectif, c'est à dire en fait d'éléments, de points à l'infini, ensuite par l'introduction des nombres complexes (éléments, points "imaginaires"). Ces montées successives dans l'abstraction sont l'une des caractéristiques de la pensée mathématique.

Donnons auparavant la définition historique, et que traduit l'éthymologie, des **coniques**. Ce sont toutes les courbes planes que l'on peut obtenir comme sections des cônes de révolution de l'espace euclidien E^3 . Voici les dessins dans l'espace :



Ce qui donne dans des plans :



Et voici la définition qui apparaîtra, au fil du texte, comme la seule maintenant satisfaisante.

Une conique est une courbe du second degré dans le plan projectif complexe, c'est à dire dans l'espace des triples (x, y, z) de trois nombres complexes non tous nuls et considérés comme identifiés si $(x', y', z') = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$, λ complexe non nul, qui vérifient $P(x, y, z) = 0$ où P est un polynôme homogène et du second degré en les trois variables x, y, z . Ou encore, de façon intrinsèque, la projection dans $\mathbf{CP}^2 = (C^3/O)/R$, du noyau $q^{-1}(0)$ d'une forme quadratique non nulle q sur C^3 .

Lecteur, ne vous laissez pas décourager par cet énoncé; oubliez le temporairement si vous en avez envie.

Concernant enfin le fond du texte, nous avons dû faire un choix dans le (i), car depuis leur introduction par les Grecs vers le 4^{ème} siècle avant Jesus Christ, la somme de propriétés et de résultats concernant les coniques, même en étant sévère pour la profondeur et la beauté, est très grande.

Enfin dans un paragraphe nécessairement très bref vu la place qui nous est impartie dans ce livre, nous parlerons des quadriques, c'est à dire des objets qui généralisent les coniques en dimensions d'espace supérieures à 2 : pour commencer 3 puis ensuite d'quelconque.

Pour ce qui est des références, il faut insister que [7] est remarquable et presque complète pour tout ce qu'il y a dans notre texte. Elle a l'inconvénient de ne pas être présente dans plusieurs bibliothèques. Il en est de même de [9], qui en outre est d'une densité extrême. On trouvera un exposé moderne et détaillé dans la réunion

des chapitres 13 à 17 de [4].

1. Les coniques réelles euclidiennes

Dans le plan euclidien E^2 les courbes les plus simples après les droites sont les cercles (plus simple d'ailleurs que les droites à tracer mécaniquement !). On ne peut en rester aux cercles; car les images des cercles par des transformations affines, projectives, (cf [4]) ne sont plus des cercles en général. On sait aussi que l'on trouve des ellipses dans tout dessin (car projection orthogonale ou oscille), comme trajectoires en mécanique céleste (planètes), mais aussi en physique (oscillateur harmonique); les paraboles se rencontrent en mécanique (chute des corps et comètes paraboliques) et en optique (miroir de télescope), les hyperboles en optique (petits miroirs des télescopes) et en mécanique céleste (comètes hyperboliques).

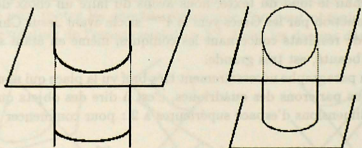
Il y a dans E^2 quatre sortes de coniques (plus tard on rajoutera "propres" ou non-dégénérées) à savoir :

- les cercles, on notera k leur ensemble
- les ellipses, on notera e leur ensemble
- les paraboles, on notera p leur ensemble
- les hyperboles, on notera h leur ensemble

La réunion des ensembles précédents est notée $ks = k \cup e \cup p \cup h$.

Les Grecs savaient plus ou moins (souvent demi-hyperbole seulement) que la réunion de ces quatre types était exactement l'ensemble de toutes les sections par des plans ne contenant par leur sommet des cônes de révolution de l'espace euclidien E^3 comme le montre les figures de l'introduction.

Ainsi, quitte à sortir du plan pour aller dans l'espace, les droites, un cercle et un plan suffisent pour trouver toutes les coniques. Noter que pour les ellipses e il y a deux façons encore plus simples de les trouver : soit projeter un cercle sur plan, soit couper un cylindre de révolution par un plan non parallèle à l'axe :

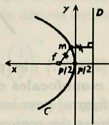


2.- Les coniques sans sortir de E^2

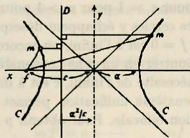
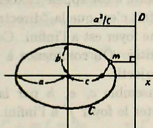
Bien entendu notre premier désir est de trouver les éléments de ks sans sortir de E^2 .

Voici les méthodes

- (a) Soient dans E^2 données un point f et une droite D ne contenant pas f . La courbe $P = \{m \in E^2 : d(m, f) = d(m, D)\}$ formée des points à égale distance de D et f est une parabole; et réciproquement toute parabole peut s'obtenir de cette façon. On dit que f est le **foyer** de P et D sa **directrice**.

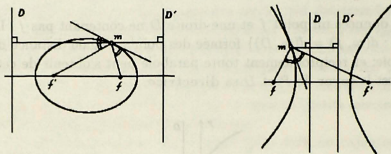


- (b) Mêmes données f, D que dans (a) mais en outre un réel $e \in]0, 1[$. Alors la courbe $E = \{m \in E^2 : d(m, f) = e \cdot d(m, D)\}$ est une ellipse de E^2 et réciproquement toute ellipse peut s'obtenir de cette façon. On dit que f est un **foyer** de E et D la **directrice associée**; en effet il existe un autre couple (f', D') donnant lieu à la même ellipse (pour le même e) parce que les ellipses sont toujours un centre de symétrie. On dit que f et f' sont les foyers de E .



- (c) Mêmes données que dans (b) mais ici $e > 1$. On obtient alors toutes les hyperboles. Mêmes définitions des foyers et directrices.
- (d) Soient f, f' deux points distincts de E^2 et a un réel non nul tel que $2a > d(f, f')$. Alors l'ensemble $E = \{m \in E^2 : d(m, f) + d(m, f') = 2a\}$ est une ellipse, de foyers f et f' . En outre toute ellipse peut s'obtenir ainsi.

- (e) Mêmes données que dans (d) mais ici $2a < d(f, f')$. Alors $H = \{m \in E^2 : |d(m, f) - d(m, f')| = 2a\}$ est une hyperbole, de foyers f, f' . En outre toute hyperbole peut s'obtenir de cette façon. Noter que $\{m \in E^2 : d(m, f) - d(m, f') = 2a\}$ est une demi-hyperbole.



Les Grecs connaissaient (voir [4] ou [7]) les propriétés précédentes ; on réfère à celles notées (a), (b), (e) comme **monofocales** et à (d), (e) comme **bifocales**. La propriété d'angles égaux (voir les figures) pour les tangentes avec les rayons issus des foyers explique les propriétés optiques des coniques et l'utilisation signalée plus bas dans le chapitre sur les quadriques, section 1.

3.- Remarques

Le lecteur doit commencer à être quelque peu énervé par cette séparation de k s en quatre parts les c, e, p, h et ressentir un désir d'unification (sans sortir de E^2). Actuellement deux unifications partielles sont immédiates :

La première c'est que $p \cup e \cup b$ sont obtenables par la même définition avec la même définition monofocale en prenant pour e toutes les valeurs réelles positives : < 1 pour $e, = 1$ pour $p, > 1$ pour h . La constante e est appelé l'excentricité. Mais les cercles y échappent désespérément : en fait c'est que la "directrice" du centre $f = 0$ est à l'infini, ou encore leur deuxième foyer est à l'infini. Ceci peut se démontrer en un sens convenable par des limites. On commence à toucher ici la nécessité de l'infini, c'est à dire du plan projectif.

Une deuxième unification permet de mettre ensemble c, e, h par la même définition bifocale. Pour obtenir p il faut ici rejeter le foyer f' à l'infini.

4.- Equivalence élémentaire, résultats variés : avant Descartes

Les Grecs savaient (mais dans le langage qui remplaçait pour eux notre langage algébrique moderne ! (voir [7]) que les cercles, les ellipses et les hyperboles pouvaient être définis par l'équation

$$c \cup e : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \quad , \quad h : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (1)$$

et les paraboles par l'équation

$$p : y^2 = 2px. \quad (2)$$

L'équation des ellipses montrent facilement que ce sont les oscillateurs harmoniques de la physique; $x = a \cos \omega t$, $y = b \sin \omega t$. Pour le mouvement des planètes, des comètes, il suffit de voir (c'est facile) que, en coordonnées polaires, si e est l'excentricité, toute conique (le cercle s'obtenant pour $e = 0$!) s'écrit

$$\rho = \frac{p}{1 + e \cos \theta} \quad p > 0.$$

Il suffit alors de savoir que la Loi de Newton, calculée en coordonnées polaires, impose à l'équation $\rho = \rho(\theta)$ pour la dérivée seconde de $1/\rho$ la relation

$$\frac{1}{\rho} + \left(\frac{1}{\rho}\right)'' = \text{constante.}$$

Voici quelques remarques, démonstrations géométriques et calculs plus ou moins faciles permettant de démontrer plus ou moins rapidement tout ou partie des équivalences entre les différentes définitions des coniques.

Pour obtenir les propriétés monofocales on prend des coordonnées (x, y) où la directrice D est parallèle à l'axe Oy et le foyer f l'origine; alors la relation $x^2 + y^2 = e^2(y - c)^2$ devient, après un changement $x = x + d$, l'une des équations (1).

Pour les définitions bifocales, le calcul nécessite un petit truc; si le lecteur prend $f = (c, 0)$, $f' = (-c, 0)$ et essaie de se débarasser des radicaux dans l'équation

$$\sqrt{(x - c)^2 + y^2} + \sqrt{(x + c)^2 + y^2} = 2a,$$

il risque bien de tourner en rond. Le point de départ consiste à calculer mf et mf' en remarquant que, si $m = (x, y)$ alors

$$mf'^2 + mf^2 = 4cx = (mf' + mf)(mf' - mf) = 2a(mf' - mf)$$

donc

$$mf' + mf = 2a \quad , \quad mf' - mf = \frac{2cx}{a} \quad , \quad mf' = a + \frac{cx}{a} \quad , \quad mf = a - \frac{cx}{a},$$

d'où

$$mf'^2 + mf^2 = 2x^2 + 2y^2 + 2c^2 = 2a^2 + 2\frac{c^2x^2}{a^2}$$

d'où l'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} - 1 = 0.$$

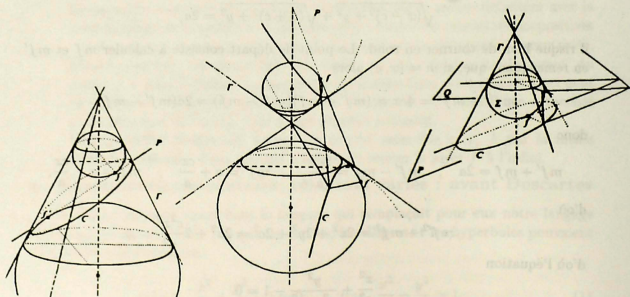
Calcul analogue pour l'hyperbole. Le calcul ci dessus fournit aussi rapidement, pour l'équation en coordonnées polaires, l'équation

$$\rho = \frac{\rho}{1 + e \cos \theta}.$$

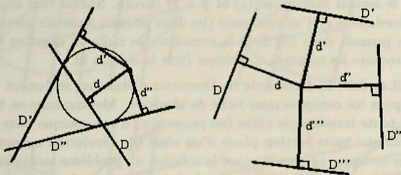
Donc ceci démontre bien ce qui a été dit plus haut sur le mouvement des planètes, car $1/\rho$ étant linéaire en $\cos \theta$, on a bien $1/\rho + (1/\rho)''$ constant.

Si l'on sait (le calcul ci dessus l'a montré) qu'une conique, dont l'excentricité est différente de 1 possède un centre de symétrie, dont du coup un deuxième couple (foyer, directrice), on trouve de suite la définition bifocale en remarquant que la somme (ou la différence) des distances d'un point quelconque à deux droites parallèles du plan est constante : voir les figures de la fin du 2.

Il fallut attendre le dix-neuvième siècle, semble-t-il, pour montrer élémentairement et élégamment que les sections planes des cônes vérifient les définitions mono- et bifocales, précisément sans utiliser les équations des coniques mais au contraire par un méthode purement géométrique. Ceci fut fait par deux belges Quetelet et Dandelin. L'idée est qu'un cône de révolution où l'on a inscrit une sphère S , tangent le long d'un cercle d'un plan P , peut être définie comme le lieu des points dont la distance tangentielle à S est proportionnelle à sa distance à P (le rapport étant $\sin \alpha$, si α est l'angle au sommet du cône). La démonstration est laissée au lecteur en exercice sur le dessin. Il peut faire bien attention à ce que, s'il est évident que les points du cône vérifient cette propriété de distance, il est un peu plus délicat de voir qu'il n'y a qu'eux. Pour la définition bifocale on utilisera que le cône est le lieu des points dont la somme ou la différence des distances tangentielles à deux sphères qui lui sont inscrites est une constante (convenable). Voir [4], 17.3 pour plus de détails.



Les Grecs savaient d'autres choses plus difficiles, par exemple que le lieu des points dont les distances d, d', d'' à trois droites données D, D', D'' vérifient $d^2 = k d' d''$ est toujours une conique. Mais il n'étaient jamais parvenus à résoudre le "lieu à quatre droites", c'est à dire démontrer que le lieu des points qui vérifient $dd' = k d'' d'''$ (pour les distances d, d', d'', d''' à quatre droites données D, D', D'', D''') est une conique. Pas plus que leurs successeurs !, Voir [7], p 20-21.



5.- L'arrivée de Descartes et la naissance de la géométrie algébrique

L'idée de base de Descartes est que ce qui est commun au éléments de $ks = c \cup e \cup h \cup p$ c'est d'avoir une équation de second degré

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \quad \text{ou} \quad y^2 = 2px.$$

Remarquons qu'une équation du second degré en x, y

$$ax^2 + 2b'xy + a'y^2 + 2b'x + 2by + a'' = 0, \tag{*}$$

le reste quelque soit le système de coordonnées affine du plan R^2 . Descartes a montré que toute équation telle que (*) peut, dans un système convenable de coordonnées orthogonales de E^2 s'écrire (en langage moderne c'est simplement le théorème de la diagonalisation des formes quadratiques et des translations d'axes) :

$$ax^2 + a'y^2 + a'' = 0 \quad \text{ou} \quad ax^2 + 2by = 0.$$

Donc toute équation (*) représente un élément de ks ou bien les cas apparemment aberrant suivants :

- { l'ensemble vide si a, a', a'' même signe, aucun nul
- { un point si a, a' même signe, non nuls, et $a'' = 0$
- { deux droites distinctes si a, a' de signes différents et $a'' = 0$
- { ce que l'on appelle une droite "double" (2 droites confondues) si $a' = a'' = 0, a \neq 0$.

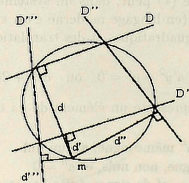
On a supposé bien sûr que (*) est vraiment du second degré (a, b'', a' non nuls tous les trois).

Ceci nous conduit à réaliser (ce qui est phénomène classique) que cette unification demande un prix (en fait un double prix) à payer pour elle. Si l'on exclut le point et le vide, il reste qu'il faut inclure les paires de droites et les droites doubles. On verra en section 9 que c'est une nécessité pratique. On pourra noter d'ailleurs que les deux cas s'obtiennent géométriquement, le premier dans le (a) du 2 lorsque $f \in D$, le second avec le cas (c) et $f \in D$ encore. Si l'on veut éliminer les cas aberrants du vide et d'un seul point (les deux peuvent s'obtenir géométriquement aussi en prenant dans (d) du 2 la constante $2a$ nulle ou négative et $f = f'$) il faut introduire les nombres complexes (voir la section 8).

Comme il se doit, la découverte de Descartes n'était pas seulement une nouvelle appellation pour les coniques mais riche de résultats. Mentionnons-en trois : le premier est que toute transformée affine (ou projective) d'une conique reste une conique. Le second est que toute section plane d'un cône (de révolution ou non) du second degré est une conique. Le troisième est la solution du problème mentionné à la fin du 4. En effet la distance d'un point à une droite est (en coordonnées quelconques) de la forme $|px + qy + z|$. Donc le lieu à quatre droites est défini par une équation de la forme :

$$|px + qy + z| |p'x + q'y + z'| = k |p''x + q''y + z''| |p'''x + q'''y + z'''|.$$

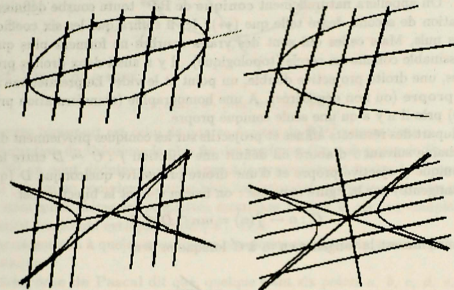
D'où deux coniques (au sens large ci-dessus). Deux notes plaisantes. D'abord Descartes écrit que ce lieu, en vain cherché par ses prédécesseurs, est une conique. En fait il y en a deux (à cause des valeurs absolues à faire disparaître). Ensuite même pour le cercle le lecteur pourra voir qu'il est difficile de montrer élémentairement cette propriété des points m d'un cercle passant par quatre points (car évidemment les quatres (s'il existent !) $D \cap D'', D \cap D''', D' \cap D'', D' \cap D'''$ vérifient toujours $dd' = k d''d'''$ (pour quel k ?).



Cette étude de Descartes est le berceau de la géométrie algébrique (voir [7], p 74).

6.- Propriétés affines : nécessité de l'infini

De bien des façons (le lecteur y trouvera matière à exercice(s) utile(s)) on montre que quelle que soit la direction de droite les milieux des sections d'une conique C par des droites parallèles à cette direction décrivent tout ou partie d'une droite (appelée **diamètre** de cette direction). Il y a une exception : laquelle?



Le cas de la parabole (qui n'a pas de centre) est gênant : tous les diamètres sont parallèles. Il y a aussi l'exception des parallèles aux asymptotes de l'hyperbole. Le fait est que certaines droites coupent une conique en un seul point et ne sont pas tangentes (auquel cas on dit que le point est compté deux fois). Il faut donc, pour avoir des énoncés sans exception, introduire des points à l'infini (la parabole en aura un seul car elle sera tangente à la droite de l'infini du plan, l'hyperbole deux, un pour chaque direction asymptotique).

Avant de passer au plan projectif \mathbf{RP}^2 (réel pour commencer) mentionnons un résultat naturel : les coniques (précisément les réunions de homothétiques) sont les seules courbes planes qui admettent une symétrie affine pour toute direction de droite du plan affine. Voir par exemple [4], 15.6.9.

7.- Théorie projective des coniques

Nous le faisons dans le plan projectif réel \mathbf{RP}^2 mais elle est analogue dans le plan projectif complexe \mathbf{CP}^2 (et avec moins d'exception en plus). Rappelons que, de façon non intrinsèque, \mathbf{RP}^2 est l'ensemble des triples (x, y, z) de trois réels non nuls tous les trois et où deux triplets (x, y, z) , (x', y', z') définissent le même point si, et seulement si, il existe un réel non nul λ tel que $x' = \lambda x$, $y' = \lambda y$, $z' = \lambda z$ (voir). On sait que le plan réel \mathbf{R}^2 se complète naturellement en \mathbf{RP}^2 dans lequel il se plonge par

$(x, y) \rightarrow (x, y, 1)$. Une conique d'équation

$$ax^2 + 2b''xy + a'y^2 + 2b'x + 2by + a'' = 0,$$

se prolonge en la conique

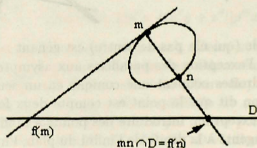
$$(**) \quad ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2byz + 2b'zx + 2b''xy = 0,$$

de \mathbf{RP}^2 . On appellera naturellement **conique de \mathbf{RP}^2** toute courbe définissable par une équation de second degré telle que (**). Ici il suffira que les six coefficients ne soient pas nuls, Mais celles qui sont des vraies courbes ne forment plus qu'un seul type, dessinable comme un cercle (topologique). Il y a aussi deux droites projectives distinctes, une droite projective double, un point et le vide. Le premier cas s'appelle conique **propre** (ou non dégénérée). A une homographie (transformation projective, bjective) près il n'y a qu'une seule conique propre.

La plupart des résultats affines et projectifs sur les coniques proviennent du double fait en chaîne suivant : d'abord on définit une bijection $f : C \rightarrow D$ entre les points d'une conique projective propre et d'une droite projective quelconque D (qui ne lui est pas tangente) par la figure suivante : on fixe $m \in C$ et la bijection est

$$C : n \mapsto f(n) = mn \cap D \in D$$

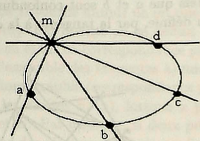
où la droite mn est la tangente en m à C lorsque $m = n$:



Le fait essentiel est que ceci fournit une paramétrisation de C par les points de D (le cas le plus simple étant $(s, t) \rightarrow (s^2, st, t^2)$ qui paramétrise la conique $xz = y^2$) mais surtout que deux paramétrisations de ce type $f : C \rightarrow D$, $g : C \rightarrow E$ (où E est une deuxième droite projective) sont toujours telles que la bijection $g^{-1}f : E \rightarrow D$, est une homographie.

Une conséquence capitale de ce qui précède est que tout invariant projectif de la droite projective se transporte aux coniques. En particulier (cf.) à quatre points a, b, c, d d'une conique C est associé leur **birapport** noté $[a, b, c, d]_C$. Il est défini, pour une $f : C \rightarrow D$ quelconque, comme

$$[a, b, c, d]_C \mapsto [f(a), f(b), f(c), f(d)]_D$$



Noter (cf.) que l'on a aussi

$$[a, b, c, d]_C \mapsto [ma, mb, mc, md]$$

où le dernier birapport est celui de quatre droites de $\mathbb{R}P^2$ passant par m .

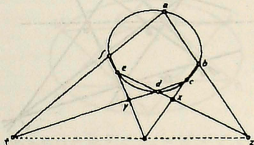
A l'exception du théorème le plus fin des coniques (les polygones de Poncelet, voir section 10) on peut déduire de ce qui précède pratiquement toutes les propriétés des coniques (réelles ou complexes), aussi bien les propriétés projectives que les propriétés affines, mais aussi même les propriétés métriques de 2, 3, 4, ceci en complexifiant et introduisant les points cycliques, voir [4], 17.4.

Bornons-nous ici à quelques exemples classiques et importants, ainsi qu'à quelques commentaires.

- (i) **Le théorème de Pascal** dit que, quelque soient six points a, b, c, d, e, f d'une conique, les trois points $ab \cap de, bc \cap ef, cd \cap fa$ sont alignés (admirer combien le fait, d'être dans un espace projectif n'introduit pas d'exception telles que "si ab et de ne sont pas parallèles"). Par contre faire attention, si par exemple $a = b$, à interpréter la droite aa comme la tangente à C en a . La démonstration est rapide. Si l'on pose $x = bc \cap ed, y = cd \cap ef, z = ab \cap de, t = af \cap dc$, on a

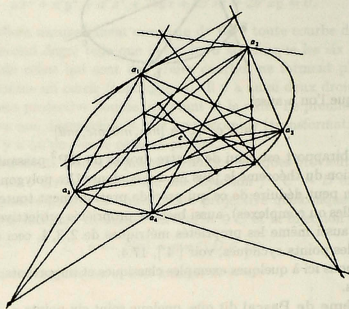
$$[z, x, d, e] = [ba, bc, bd, be][fa, fc, fd, fe] = [t, c, d, y] = [a, c, d, e]_C$$

donc zt, xc, ey sont concourantes.



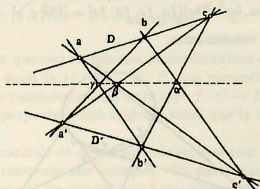
Le théorème de Pascal permet une génération projective linéaire point par point de la conique passant par les cinq points donnés a, b, c, d, e (cf [4], 16.7.3). Il suffit de faire tourner une droite autour de z d'où f après des intersections qui sont forcées

par le théorème de Pascal. Noter aussi que le théorème de Pascal reste vrai, lorsque deux sommets tels que a et b sont confondus, si l'on convient de remplacer la droite aa , non définie, par la tangente à la conique au point a .



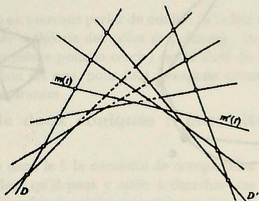
Construction du centre de la conique passant par $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$.

Le théorème de Pascal est la généralisation du théorème de Pappus décrit par la figure ci-dessous :



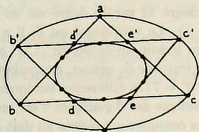
Le théorème de Pappus est donc l'analogue du théorème de Pascal pour une conique dégénérée en deux droites. Il joue un rôle essentiel dans la théorie axiomatique des plans projectifs; voir [4], 2.5.5, [8], [3].

- (ii) **Génération linéaire des coniques** : si m, n sont deux points \mathbf{RP}^2 et f une homographie entre les droites passant par m et celles passant par n alors le point $D \cap f(D)$ décrit, lorsque D tourne autour de m , une conique (passant par m et n et propre si $f(mn) = mn$). Par dualité on en déduit que si m et n décrivent deux droites D et E de \mathbf{RP}^2 en étant en correspondance projective, alors mn enveloppe (c'est à dire constitue l'ensemble des tangentes à) une conique tangente à D et E . Autrement dit si f est homographie (correspondance projective) entre deux droites D et E de \mathbf{RP}^2 alors les droites $xf(x)$, lorsque x parcourt D , enveloppent une conique tangente à D et E . Par exemple, si deux points parcourent deux droites données du plan \mathbf{E}^2 avec des vitesses proportionnelles alors la droite qui les joint enveloppe une parabole.



La figure ci-dessus semble "être dans l'espace". Il y a pour cela une bonne raison, qui sera expliquée dans la section II.2 !

- (iii) **Le théorème de Poncelet pour les triangles** : donnons-nous deux coniques C et C' et cherchons un triangle inscrit dans l'une et circonscrit à l'autre. La réponse est surprenante : ou il n'y en a aucun, ou il y en a autant que de points sur C . La démonstration est enfantine :



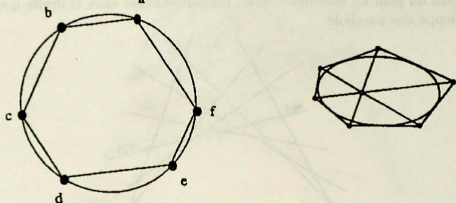
on a

$$[b, d, e, c] = [b, b', c', c]_C = [d', b', c', e'].$$

Nous verrons en section 10 que ce résultat est vrai, mais extrêmement plus difficile, pour les polygones à un nombre quelconque de cotés.

Notes

1. Le théorème de Pascal n'est jamais facile à démontrer (ni non plus très difficile). Pascal dit qu'il se ramène au cas des cercles grâce à la "définition grecque", mais ne dit pas comment faire pour un cercle (et c'est plutôt plus difficile dans \mathbf{E}^2 que \mathbf{RP}^2). Sauf si l'on sait que l'on peut, par une transformation projective conservant un cercle faire en sorte que à la fois ab , de et bc , ef soient parallèles. Alors (exercice pour le lecteur) cd et fa sont parallèles ! Pour des précisions sur l'histoire du théorème de Pascal voir [7], p 33.



Etre tangente à une droite est facilement vérifiée être une condition du second degré. On s'attend donc à ce que, en général, par quatre points "en position générale" passent deux coniques tangentes à une droite donnée. Cela est vrai et résulte aussi du théorème de Desargues, voir [4], II, page 298.

Le degré de la condition "être tangente à une conique donnée" est déjà plus délicat à résoudre. Si l'on exprime naïvement que l'équation du 4^{ème} degré obtenue pour trouver les points communs a une racine double, c'est à dire que son discriminant est nul, on trouve le degré 12 car ce degré est en général, pour un polynôme de degré n , égal à $n(n-1)$. Le vrai degré est 6; il a plusieurs façon de le voir, que nous laissons au lecteur le soin de découvrir. Ceci est dû à Bischoff en 1866.

Maintenant il est donc légitime de penser, en appliquant la théorie de l'intersection, due a Bezout, qu'il y a $6^5 = 7776$ différentes coniques tangentes à 5 coniques données "au hasard". Ce "problème des 5 coniques" est très célèbre. Il semble que ce soit le seul problème sur les coniques qui résista au delà de 1900; en particulier c'est une partie implicite du 15^{ème} problème de Hilbert.

Remarquons d'abord que ce genre d'itération : $6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6 = 6^5$ est déjà absurde lorsqu'on cherche les coniques tangentes à 5 droites : il y en a une (par dualité) et non $2^5 = 32$! la raison profonde, quoiqu'enfantine, qui fait échouer ces calculs naïfs d'intersection

est que toutes les droites doubles ($x^2 = 0$) sont toujours tangentes à toute conique. Il faut donc les ôter; et ce n'est pas facile (cette remarque date de Cremona en 1864). Cependant dès 1864 Chasles réussit le tour de force de trouver le vrai nombre des coniques tangentes à 5 coniques, à savoir 3264. De nombreuses démonstrations de ce résultat, plus ou moins rigoureuses, s'étagèrent jusqu'en 1938.

Historiquement ce problème est capital, car il fut le premier à exiger une théorie assez générale de l'intersection des variétés algébriques. Celle-ci n'a acquis sa forme définitive que dans les années 1960; voir par exemple [26].

(ii) La deuxième idée est d'étudier les coniques qui représentent les points d'une droite projective de \mathbf{CP}^5 (considéré comme espace des formes quadratiques). Pratiquement.

2. Faute de temps nous ne pouvons parler de dualité (à la fois dans \mathbf{RP}^2 et par rapport à une conique donnée : théorie des pôles et polaires). Voyez [4] pour des détails. Un exemple (difficile même pour le cercle) est le dual du théorème de Pascal : le théorème de Brianchon dit que, pour tout hexagone circonscrit à une conique, les diagonales sont concourantes.

8. Intersection de deux coniques : nécessité de la complexification

Nous avons déjà vu dans le 5 la nécessité de complexifier. Nous verrons plus bas (section 10) le désir ardent qu'il peut y avoir à chercher une transformation projective qui transforme une paire de coniques intérieure l'une à l'autre en deux cercles concentriques. En fait c'est impossible en général. Pour rendre ceci "visible" il faut complexifier : c'est la seule façon de comprendre les paires de coniques, mêmes réelles; bien sûr il faut revenir au réel après avoir oeuvré dans le complexe.

Comme suggéré dans l'encadré de l'introduction, nous prenons maintenant comme espace de base le plan projectif complexe \mathbf{CP}^2 (voir exergue) et y étudions les ensembles de triples (x, y, z) (à un scalaire près) qui annulent une équation du second degré, disons une forme quadratique q (non identiquement nulle) :

$$q(x, y, z) = ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2byz + 2b' + 2b'' + y = 0 \quad (***)$$

Le gain de simplification est énorme : il n'y a que trois coniques possibles : les propres (cf. section 7), les paires de droites distinctes et les droites doubles, car on se ramène, par une homographie de \mathbf{CP}^2 toujours aux trois équations

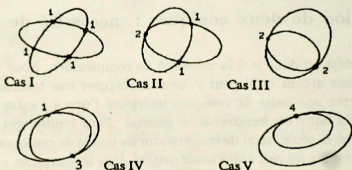
$$x^2 + y^2 + z^2 = 0, \quad x^2 + y^2 = 0, \quad x^2 = 0.$$

En outre il y a un "Nullstellensatz" : à un scalaire près il n'y a qu'une forme quadratique donnant naissance à une conique donnée comme ensemble de points; tandis que, pour les réels, $x^2 + y^2$ et $x^2 + 2y^2$ représentent toutes deux la conique dégénérée en le point associé au triple $(0, 0, 1)$. A propos du Nullstellensatz général de la géométrie algébrique, on pourra consulter [4], 14.1.6.

Une droite coupe une conique propre en deux points distincts, sauf les tangentes à cette conique. Une courbe algébrique ayant cette propriété est une conique, ce qui est faux en réel : $x^4 + y^4 = 1$ dans \mathbf{R}^2 ! Noter que, du point de vue réel, une conique propre de \mathbf{CP}^2 , étant en bijection \mathbf{C}^8 avec une droite projective (cf. section 7) est du point de vue géométrie réelle une sphère \mathbf{S}^2 (cf [4], 14.3.6.).

Mais surtout il n'y a que cinq types morphologiques de paires de coniques propres. On les trouve en cherchant leurs points communs : le nombre (compte tenu des **multiplicités**) est toujours 4 (c'est le théorème de Bezout pour les coniques et il peut s'obtenir dans le cas présent de façon élémentaire en paramétrisant l'une des coniques par (s^2, st, t^2) et en reportant ceci dans l'équation de la seconde : on obtient ainsi une équation du 4^{ème} degré en le paramètre choisi. Pour le théorème de Bezout général, voir [11].

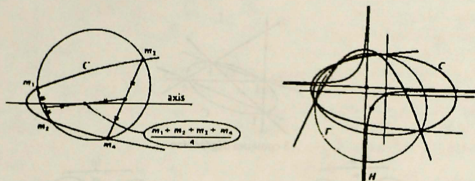
Les cinq cas sont ceux des figures ci-dessous (où à côté de chaque point on a écrit sa multiplicité) :



Le cas qui correspond aux cercles concentriques (une fois \mathbf{E}^2 plongé dans \mathbf{RP}^2 puis celui-ci dans \mathbf{CP}^2) est le cas III dit des coniques **bitangentes**. Les deux points sont alors les points à l'infini $(1, \sqrt{-1}, 0)$ et $(-1, \sqrt{-1}, 0)$ (appelés "**points cycliques**" de \mathbf{E}^2). En application cette classification montre que l'on peut toujours transformer projectivement deux coniques quelconques de \mathbf{RP}^2 ayant 0 ou 2 points communs en deux cercles, le cas de cercles concentriques correspondant au cas III : voir une application ci-dessous en section 10.

Le cas IV est celui où les deux coniques sont **osculatrices** en un de leur deux points communs. Dans le cas V ont qu'elles sont **suroscultrices** en leur point commun. La classification morphologique des paires de coniques dans \mathbf{RP}^2 , est traitée dans [19].

Avec ce genre de considération utilisant les **points cycliques** on obtient de jolis théorèmes euclidiens, tels que : par quatre points de \mathbf{E}^2 passent deux paraboles, d'axes orthogonaux, en outre ces axes passent par le centre de gravité ces quatre points (voir [4], 17.5 pour les détails).



Maintenant il faut prendre garde que deux paires de coniques de même type morphologiques ne sont pas en général isomorphes au sens de l'espace projectifs.

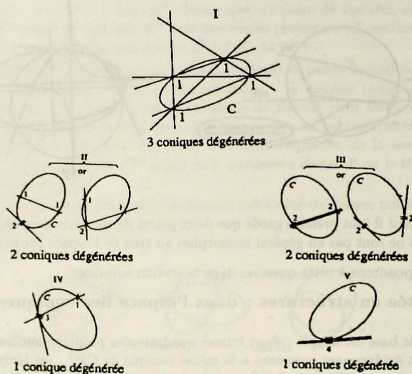
Nous répondrons à cette question dans la section suivante.

9.- Montée en structures : dans l'espace des coniques

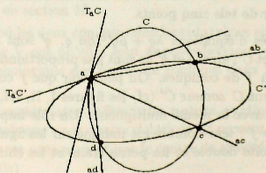
L'idée de base est simple : deux formes quadratiques proportionnelles q et λq sur \mathbb{C}^3 donnent évidemment naissance à la même conique de $\mathbb{C}P^2$, (et réciproquement, c'est le premier exemple de *Nullstellensatz* (comme appliqué dans la section précédente et facile à démontrer directement ici). Donc en fait l'espace des coniques est en bijection avec l'espace projectif complexe $\mathbb{C}P^5$, regarder l'équation (***) de la section 8. Mentionnons brièvement quelques conséquences de cette philosophie.

- (i) La première est qu'une conique est, en un sens à préciser, déterminée par cinq conditions. La condition la plus simple, car linéaire, est de passer par un point donné. On soupçonne donc que par cinq points (non alignés trois à trois) passe une conique : le théorème de Pascal le démontre effectivement et permet toutes les constructions géométriques explicites, comme il a été précisé dans la section 7. Au lecteur en exercice de trouver d'autres démonstrations de cette unicité de la conique passant par de tels cinq points.

Ce sont les coniques d'équations $\lambda q + \mu q'$ (où q, q' sont les équations de deux coniques différentes C et C' ; ainsi q et q' ne sont pas proportionnelles). Un tel ensemble est appelé un **faisceau** f de coniques. On peut voir que f coïncide avec l'ensemble des coniques qui coupent C comme C' (cf. les figures I, II, III, IV, V) c'est à dire au mêmes points de C et avec la même multiplicité. Un rôle important est joué par les coniques dégénérées de f : leur nombre est indiqué sur les figures ci-dessous, un trait double indique une droite double et les petits traits et les chiffres la multiplicité des points.



Nous pouvons maintenant donner la classification à une homographie près des paires de coniques propres distinctes, classification désirée à la fin de la section 8. Elle nous a été enseignée par Jacques Tits. Pour le type I, si a, b, c, d désignent les quatre points communs distincts à C et C' , alors les deux birapports $[a, b, c, d]_C$ et $[a, b, c, d]_{C'}$, sont nécessairement des invariants projectifs. On peut les calculer avec l'aide des seules tangentes $T_a C, T_a C'$ aux coniques respectives C, C' et les trois droites ab, ac, ad . Réciproquement si deux paires de coniques se coupent en quatre points distincts et si les deux birapports ci-dessus sont égaux respectivement deux à deux, alors il existe une homographie transformant une paire en l'autre.



A l'opposé pour les types IV et V il n'y a **aucun** invariant et deux paires du même types sont toujours projectivement "les mêmes". Pour les types II et III, il y a **un** seul invariant. Il est moins évident de découvrir géométriquement sur le seul ensemble constitué par C et C' . Par contre, cet invariant n'est autre que le birapport qui est, sur la droite projective que définit dans \mathbf{CP}^5 le réseau construit avec C , C' et les deux coniques dégénérées du faisceau. On peut alors trouver plus facilement la définition géométrique de cet invariant : quand C et C' sont transformées projectivement en deux cercles du plan euclidien \mathbf{E}^2 , alors dans le cas du type II on obtient deux cercles tangents et l'invariant cherché est le rapport de leurs rayons; tandis que dans le type III on obtient deux cercles concentriques et l'invariant cherché est le caré du rapport de leurs rayons !

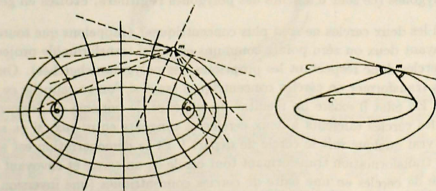
Il y a d'ailleurs une bonne raison, que nous rencontrerons dans la prochaine section, pour que deux paires de cercles concentriques ne soient pas projectivement isomorphes; c'est l'existence ou non, pour telle paire, de polygones à n côtés (n fixé) inscrits dans l'un et circonscrit à l'autre !

Les faisceaux de coniques donnent lieu à de nombreux résultats; on pourra consulter entre autres le chapitre 17 de [4]. Leurs duaux, les faisceaux tangentiels sont importants. Le plus connu d'entre eux est celui des coniques **homofocales** de \mathbf{E}^2 , c'est à dire que la constante a dans les équations 2 (d) et 2 (e) prend toutes les valeurs possibles.

Les équations sont donc

$$\frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda} - 1 = 0 \tag{*}$$

et de nombreux problèmes de mathématiques appliquées utilisent les coordonnées qui associent à (x, y) le couple (λ, μ) des deux valeurs de λ , dans (*) pour lesquelles l'ellipse (resp. l'hyperbole) de la famille (*) passe par (x, y) . Une propriété classique (théorème de Graves) est que si un fil de longueur constante est tendu autour d'une ellipse, le point de tension décrit une ellipse homofocale.



Cette propriété est équivalente au fait que la tangente au point décrivant la deuxième ellipse est bissectrice des deux tangentes issues de ce point à la première. Cette propriété implique la conséquence spectaculaire suivante : si l'on trace à l'intérieur d'une ellipse la trajectoire d'un rayon lumineux (ou d'une boule de billard) cette trajectoire restera toujours tangente à une ellipse fixe (ou une hyperbole si l'on part entre les foyers).

Cela veut dire, en langage de dynamique, que ces trajectoires ne seront jamais partout denses. Alors que pour un convexe pris au hasard P . Gruber vient de montrer qu'il y a toujours densité (pour presque toutes les trajectoires) : voir [14].

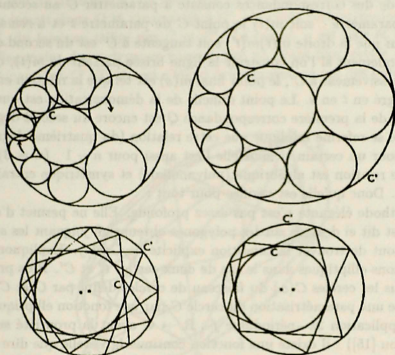
Ou encore, les ellipses ont une **famille continue** de courbes **caustiques**; la question reste ouverte, à l'heure actuelle de savoir si seules les ellipses ont cette propriété. Voir aussi la section II.3. Pour ce qui arrive si la trajectoire se referme, voir ce qui suit.

10.- Le plus beau et le plus fin théorème sur les coniques : les polygones de Poncelet

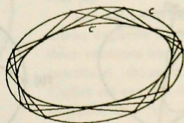
Nous continuons ici le (iii) de la section 7, où nous avons découvert avec étonnement un résultat du genre "tout ou rien" : deux coniques données, où n'admettent aucun triangle à la fois inscrit dans l'un et circonscrit à l'autre, ou en admettent un (et ce pour un sommet quelconque de départ). Qu'en est-il pour les polygones quelconque de côtés? Il y a un cas où le résultat est évident.

C'est celui de deux cercles concentriques; la raison profonde est qu'il y a un groupe du plan qui est transitif sur un cercle, conserve le deuxième cercle et qui transforme droites en droites, à savoir le groupe des rotations autour du centre commun. Si donc il existe un polygone circonscrit au deuxième cercle, inscrit dans le premier, on peut choisir l'un des sommets où l'on veut sur le premier cercle et obtenir ainsi une infinité de tels polygones (ce sont d'ailleurs des polygones **réguliers**, **étoilés** en général).

Mais si les deux cercles ne sont plus concentriques? (rappelons que toute paire de coniques ayant deux ou zéro points communs est ainsi transformable projectivement en deux cercles donc respectant les propriétés des polygones cherchés). On pourrait espérer les transformer en cercles concentriques (sauf si l'on se rappelle ce qui a été dit au 8). En effet il existe un résultat de ce genre, le porisme de Steiner : quand on enfle des cercles tangents à deux cercles et tangents entre eux, si ça se referme cela reste vrai quelque soit le cercle de départ ! Et la démonstration est simple : il existe une transformation transformant tout cercle en un cercle et envoyant une paire quelconque de cercles en une paire de cercles concentriques (une inversion, voir [4], tome I, page 315-316).



Malheureusement l'inversion n'est pas une transformation projective. Et d'ailleurs, comme on l'a vu plus haut, deux cercles concentriques sont des coniques **bitangentes** en les deux points cycliques. Le théorème dû à Poncelet est cependant *vrai* : s'il existe un polygone à n côtés inscrit dans une conique C et circonscrit à une conique C' , il en existe une infinité, un sommet pouvant être choisi n'importe où sur C (cas où C' est intérieur à C) :



La démonstration de ce résultat est toujours difficile ; on n'en connaît aucune démonstration à la fois élémentaire, simple et naturelle. Donnons d'abord la plus simple, celle basée sur les correspondances algébriques (2, 2) ; puis celle qui est la plus profonde et permet de résoudre le difficile problème de la condition explicite sur les équations de C et C' pour qu'il existe un polygone à n côtés inscrit dans C et circonscrit à C' (même pour deux cercles, c'est compliqué pour trois, surtout pour 4

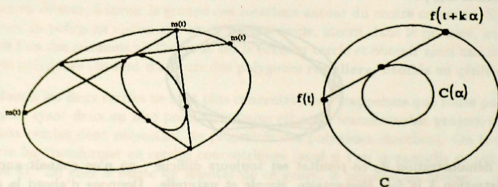
et pour $n = 5$ quasiment inextricable).

La méthode des correspondances consiste à paramétrer C au second degré avec mettons un paramètre : soit $m(t)$ le point C de paramètre t et à remarquer que la condition pour que la droite $m(t)m(t')$ soit tangente à C' est du second degré en t en t' . Plus généralement si l'on construit la ligne brisée partant de $m(t)$, qui a n côtés tangents successivement à C' , le point final $m(s)$ est tel que la relation entre t et s est du second degré en t en s . Le point difficile de la démonstration est que cette itérée $Q \circ Q \circ \dots \circ Q$ de la première correspondance Q est encore du second degré. Dire que la ligne brisée se referme implique que cette relation (du quatrième degré alors en t) est vérifiée pour un certain t ; mais elle l'est aussi pour $n - 1$ ($n = 3$) valeurs. Le fait que cette relation est algébrique (polynomiale) et symétrique entraîne qu'elle se réduit à zéro. Donc qu'elle est vérifiée pour tout t .

Cette méthode élégante n'est pas assez profonde. Elle ne permet d'abord pas de voir ce qui est dit et dessous sur les polygones obtenus en joignant les sommets de k en k , ni surtout de trouver la condition explicite de Cayley. Expliquons celle basée sur les fonctions elliptiques dans le cas de deux cercles C et C' . Plus précisément on considère tous les cercles $C(\alpha)$ du faisceau de cercles défini par C et C' (voir 9(ii)). Alors il existe une paramétrisation du cercle C par une fonction elliptique réelle, c'est à dire une application 2π -périodique $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$ ayant la propriété suivante (pour ceci voir [1] ou [15]) : il existe une fonction continue $k(\alpha)$ telle que dire que la droite $f(t)f(t')$ est tangente au cercle $C(\alpha)$ (et avec l'orientation convenable) est équivalente à $t' = t + k(\alpha)$.

Si donc pour un t , il y a un polygone à n côtés inscrit dans C et circonscrit à $C(\alpha)$, c'est dire que $f(t + n \cdot k(\alpha)) = f(t)$, donc que $n \cdot k(\alpha)$ est égal à un multiple de 2π parce que f est 2π -périodique. Mais alors ceci reste vrai pour tout t !

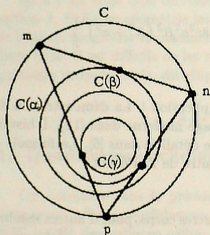
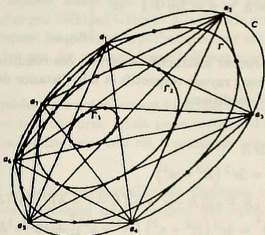
Ceci a été fait tout au début de l'histoire des fonctions elliptiques réelles.



En fait cette paramétrisation du cercle C n'est pas du tout mystérieuse : c'est celle donnée par le temps mis entre deux points du cercle pour le mouvement d'un pendule pesant simple, lancé assez vite pour faire le tour du cercle. Le lecteur pourra chercher les résultats correspondant au cas d'un mouvement de pendule plus ordinaire. Pour

ce qui précède, voir [1], [15].

Ensuite on voit de suite que si l'on joint de k en k (l'entier k étant fixé) les sommets d'un polygone inscrit dans C et circonscrit à C' , ses côtés restent toujours tangents à un cercle C_k du faisceau défini par C et C' . Le cas où n est pair et $k = n/2$ est celui où les diagonales des polygones passent par un point fixe, cercle dégénéré du faisceau défini par C et C' . Tout ceci s'étend évidemment au cas des paires générales de coniques.



On remarquera aussi que si $C(\alpha)$ et $C(\beta)$ sont deux cercles différents du faisceau considéré, alors la droite mp du dessin enveloppe un troisième cercle $C(\gamma)$ de ce même faisceau quand m décrit C . Ceci en fait était le lemme de départ de Chasles, voir [6].

Dès 1853 Cayley réussissait à obtenir la condition explicite ci-dessous pour les équations de deux coniques donnant naissance à des polygones inscrits et circonscrits à n côtés. La méthode de Cayley est exposée de façon détaillée et en langage moderne dans [12]. L'idée de départ est d'associer à une paire de coniques C et C' , non pas une fonction

elliptique au sens numérique, mais une courbe elliptique complexe. Il y a alors un lien direct entre la fermeture d'une ligne polygonale à n côtés zizaguant entre C et C' et les points d'ordre n pour l'addition classique sur cette courbe elliptique.

Voici comment écrire une telle condition. Soient q et r des formes quadratiques définissant les coniques C et C' . Alors la conditions sur q et r pour qu'il existe un polygone à n côtés inscrit dans C et circonscrit à C' s'obtient ainsi. On considère le

déterminant de la forme quadratique $q + \lambda r$ et développe en série entière sa racine carrée :

$$[\det(q + \lambda r)]^{1/2} = a_0 + a_1 \lambda + a_2 \lambda^2 + \dots + a_k \lambda^k + \dots$$

Cette racine carrée d'un polynôme de degré 3 en λ ne surprendra pas dans un endroit où interviennent les fonctions elliptiques !

Les conditions cherchées sont les déterminants

$$\begin{vmatrix} a_2 & \dots & a_{m+1} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m+1} & \dots & a_{2m} \end{vmatrix} = 0, \text{ si } n = 2m + 1 \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} a_3 & \dots & a_{m+1} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m+1} & \dots & a_{2m} \end{vmatrix} = 0, \text{ si } n = 2m$$

Le lecteur pourra trouver instructif de vérifier ces conditions pour le cas de deux cercles; si R et r sont leurs rayons respectifs et d la distance de leurs centres, dès 1827 Steiner avait donné les conditions

$$n = 3 \quad R^2 - a^2 = 2rR$$

$$n = 4 \quad (R^2 - a^2)^2 = 2r^2 (R^2 + a^2)$$

$$n = 5 \quad r(R - a) = (R + a)[(R - r + a)(R - r - a)]^{1/2} + (R + a)[(R - r - a)2R]^{1/2}$$

$$n = 6 \quad 3(R^2 - a^2)^4 = 4r^2 (R^2 + a^2) (R^2 - a^2)^2 + 16r^4 a^2 R^2$$

$$n = 8 \quad 8r^2 (R^2 - a^2)^2 - r^2 (R^2 + a^2)$$

$$\times \left\{ (R^2 + a^2) \left[(R^2 - a^2)^4 + 4r^4 a^2 R^2 \right] - 8r^2 a^2 R^2 (R^2 - a^2)^2 \right\}$$

$$= \left[(R^2 - a^2)^4 - 4r^4 a^2 R^2 \right]^2.$$

Pour $n = 5, 6, 8$ Steiner ne donnait aucune explication ! La démonstration des formules de Cayley est donnée en détail et en langage moderne dans [12]. L'histoire du théorème de Poncelet a fait l'objet d'une analyse détaillée dans [6]. La formule de Steiner est fautive pour $n = 8$, voir un article à paraître de F. Pécaut.

II.- Notes

On peut évidemment définir les coniques sur d'autres corps, pour d'autres nombres que les réels ou les complexes. Sur les corps finis, cela donne lieu à des problèmes de théorie des nombres et de combinatoire. L'intuition géométrique est alors à manier avec précaution. En voici quelques exemples pour illustrer cette remarque.

On montre (ce n'est pas évident) que sur un corps fini toute conique n'est jamais vide. Si le corps a q éléments et q est pair, alors une conique a au plus $q + 1$ points (car toujours isomorphe à une droite projective). Si q est pair, toutes les tangentes passent par un même point !

C'est ici l'endroit de remarquer que les trois mots "ellipse", "parabole", "hyperbole" ont, depuis les grecs; envahi la pensée humaine. Ceci en calquant, avec plus ou moins de bonheur, différentes caractéristiques distinguant les trois coniques les unes des autres. Mentionnons, de façon certainement non exhaustive, quelque un de ces contextes.

En littérature on a des figures de styles : hyperbole et ellipse. Le mot parabole intervient lui de façon plus générale. En physique, on peut faire une comparaison entre les états gazeux, liquide, solide avec l'hyperbole, la parabole, l'ellipse. Cette comparaison a été étendue par Mikhael Gromov à la théorie des groupes discrets : les groupes finis sont elliptiques, les groupes hyperboliques ont été inventés et étudiés par lui dans [23]. Comme les gaz, les groupes hyperboliques sont expansifs et répandus partout.

De même que les liquides sont actuellement bien mal connus, de même les groupes paraboliques son encore mal compris. Mais pour certains d'entre eux, ajouter une seule relation suffit à les rendre finis; ceci est à comparer avec la sursaturation dans les liquides.

Dans les équations aux dérivées partielles, on distingue trois types d'équations: elliptiques, paraboliques, (équation de la chaleur par exemple), et hyperboliques (équation des ondes par exemple).

Qu'il y ait trois type de comètes provient évidemment de ce qui a été dit dans la section 4. Enfin en géométrie les espaces à courbure constante, qui sont les références de base en géométrie riemannienne, sont les espaces hyperboliques, les espaces euclidiens (dont il est difficile de les relier aux paraboles) et les espaces sphériques et leurs quotients projectif réels, dit elliptiques.

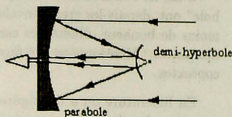
II.- Quadriques

1.- Quadriques euclidiennes

On considère sans le préciser, par manque de place, des quadriques réelles ou complexes; affines, euclidiennes ou projectives. Il s'agit dans les espaces E^3 , R^3 , RP^3 , CP^3 des surfaces définies par une équation vraiment du second degré. Dans l'espace euclidien E^3 elles se rencontrent naturellement comme les surfaces les plus simples après les plans et les sphères.

Par exemple on sait que la terre est en, première approximation, un ellipsoïde de révolution; que les corps solides ont une ellipsoïde d'inertie et que leur mouvement peut s'interpréter géométriquement en faisant rouler un ellipsoïde de centre fixe sur un plan, voir [2] chapitre 6, section 29. Les paraboloides de révolution sont les miroirs

de télescopes (ainsi que les hyperboloïdes de révolution pour le petit miroir) tandis que les paraboloïdes hyperboliques sont fondamentaux en architecture, ainsi d'ailleurs que les hyperboloïdes (de révolution) car ils contiennent une infinité de droites. Les ellipsoïdes jouent un rôle essentiel en algorithmique et en optimisation, voir [13] ainsi qu'en théorie des espaces normés (voir par exemple [21]). Les quadriques essentielles (propres) de E^3 sont :



I.- Les ellipsoïdes

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \quad (\text{de révolution si } a = b)$$

II.- Les paraboloïdes elliptiques

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 2z = 0 \quad (\text{de révolution si } a = b)$$

III.- Les paraboloïdes hyperboliques

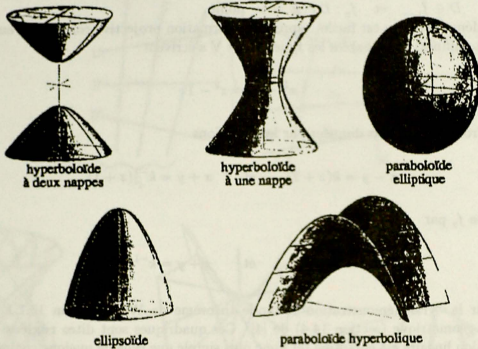
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 2z = 0$$

IV.- Les hyperboloïdes à deux nappes

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0 \quad (\text{de révolution si } a = b)$$

V.- Les hyperboloïdes à une nappe

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \quad (\text{de révolution si } a = b)$$



Les définitions métriques analogues à celles de 1.2 existent mais sont peu enthousiasmantes. Pour trouver une quadrique de E^3 à trois axes inégaux (i.e. non de révolution) il faut se donner un point f , une droite D , une direction de plans P et une constante e . Alors on obtient pratiquement toutes les quadriques de E^3 comme ensemble des points m vérifiant $d(m, f) = e \cdot d(m, p(m))$ où $p(m)$ est le point de D obtenu en coupant D par le plan passant par m et parallèle à P . La génération analogue à la bifocale (et même son extension de celle de Graves, voir section 1.9) est due à Staude, (vers 1850 seulement !) voir ci-dessous section 3. Les quadriques réglées, elles, peuvent s'obtenir plus simplement comme ensemble de points dont le rapport des distances à deux droites données est constant.

2.- Quadriques Projectives réelles et complexes

Dans l'espace projectif réel RP^3 de dimension 3 les cinq types ci-dessus (quadriques propres) se réduisent à deux : topologiquement ce sont, soit des sphères (cas I, II, IV) soit des tores (cas III, V) .

Et la différence est simple : les types III et V contiennent des droites, appelées génératrices (même dans R^3). Il est facile de voir que ses génératrices forment deux familles f_1 et f_2 ; avec les propriétés d'interaction ci-dessous :

$$\forall D, D' \in f_1 \quad \text{et} \quad D \cup D' = D \cap D' = \phi$$

$$\forall E, E' \in f_2 \quad \text{et} \quad E \cup E' = E \cap E' = \phi$$

$$\forall D \in f_1 \quad \text{et} \quad f_2 : D \cap E = 1 \text{ point.}$$

La démonstration est facile : après transformation projective convenable en coordonnées (affines) convenables les types III et V s'écrivent

$$x^2 - y^2 = z^2 - 1$$

et les droites de f_1 sont données par les équations

$$x - y = k(z + 1) \quad \text{et} \quad x + y = k^{-1}(z + 1)$$

celles de f_2 par

$$x - y = k(z + 1) \quad \text{et} \quad x + y = k^{-1}(z - 1)$$

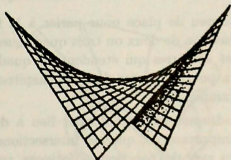
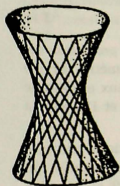
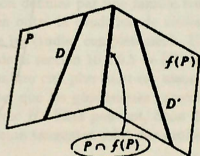
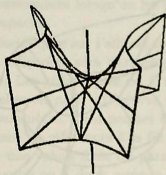
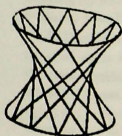
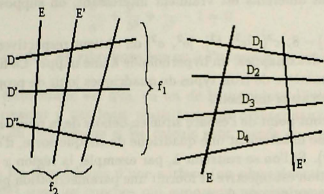
Pour la "vraie démonstration", voir le théorème de Witt (section 13.7.1) et sa lecture géométrique (section 14.4) de [4]. Ces quadriques sont dites **réglées**. Leur génération linéaire est enfantine (et donc plus simple que celle de quelque conique que ce soit). On se donne trois droites D, D', D'' de l'espace non dans un même plan deux à deux. Alors l'ensemble des droites E qui rencontrent à la fois D, D', D'' est une quadrique réglée; et elles s'obtiennent toutes ainsi. On montre facilement ceci :

$$\forall D_i \in f_1 \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad \text{et} \quad \forall E \in f_2 \text{ le birapport}$$

$$[D_1 \cap E, D_2 \cap E, D_3 \cap E, D_4 \cap E] \text{ ne dépend que des } D_i \text{ et non de } E.$$

D'où aussi ceci : soient deux droites D et D' non dans un même plan, $f : D \rightarrow D'$ une homographie. Alors la droite $m \cdot f(m)$ décrit une quadrique réglée. Ou encore ceci : soient D, D' deux droites non dans un même plan, et une homographie f entre les plans passant par D et ceux passant par D' . Alors la droite $P \cap f(P)$ décrit une quadrique réglée. Un cas particulier affine est celui-ci : si deux points décrivent deux droites D, D' non dans un même plan avec des vitesses proportionnelles, la droite qui les joint décrit un paraboloïde hyperbolique. C'est la forme de tout toit d'une maison à murs non rectangulaires ! C'est aussi l'explication de la figure de la section 1.7.(ii); il faut seulement ajouter que le contour apparent d'un paraboloïde hyperbolique est une parabole.

Si on est dans l'espace projectif complexe \mathbb{CP}^3 de dimension 3, alors il n'y a plus qu'une quadrique propre; elle est toujours réglée, puisque l'équation peut toujours se ramener à $x^2 - y^2 = z^2 - 1$. C'est ainsi que les géomètres du 19^{ème} siècle parlèrent abondamment des "génératrices des sphères"; voir par exemple [27].



3.- Quadriques homofocales

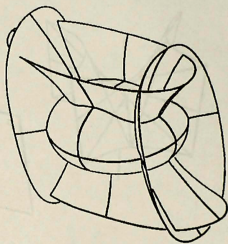
On appelle famille de quadriques homofocales de E^3 la famille à un paramètre réel λ formée des quadriques d'équations.

$$\frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda} + \frac{z^2}{c^2 + \lambda} - 1 = 0 \quad (*)$$

équation qui généralise l'équation (*) de la section 9 du chapitre "coniques". Seul le cas où a, b, c sont différents est vraiment intéressant; on supposera désormais que $a > b > c$.

Selon que $\lambda \in]-8, c^2[$, $]c^2, b^2[$, $]b^2, a^2[$ on obtient respectivement un ellipsoïde, un hyperboloïde à deux nappes, un hyperboloïde à une nappe. La figure que forme ces 3 familles à un paramètre de trois types de quadriques jouit de propriétés nombreuses et remarquables; en voici un choix.

D'abord pour tout point de l'espace situé en dehors de la réunion des trois plans de coordonnées il passe exactement une quadrique de chaque sorte, d'où une application $(x, y, z) \rightarrow (\lambda, \mu, \nu)$. Si l'on se restreint à, par exemple, la région $x > 0, y > 0, z > 0$ alors cette application est bijective et fournit une paramétrisation par des coordonnées dite **homofocales**, de chacun des 8 quadrants de l'espace.



Maintenant il nous reste peu de place pour parler à la fois des propriétés des quadriques telles que l'intersection de deux ou trois quadriques, la géométrie sur une quadrique donnée, etc ... et des êtres qui étendent les quadriques aux espaces de dimension n quelconque. On pourra trouver dans les chapitres 13, 14 et 15 de [4] la deuxième partie de ce programme.

Les intersections de quadriques peuvent donner lieu à des questions très subtiles. Un point de départ important est que ces intersections sont des courbes qui se paramètrent naturellement avec des fonctions elliptiques, voir [1], [10] et [15]. Une référence récente est [22]. Voir aussi la fin de ce texte.

Nous avons choisi, pour terminer de parler d'une configuration de l'espace euclidien E^3 , celle dite des quadriques homofocales. Car, comme on va le voir, elle est commune à des problèmes très variés.

Ces coordonnées permettent assez systématiquement d'étudier les questions relatives soit d'ensemble de la famille, soit à une quadrique fixée, le cas d'un ellipsoïde E

tel que

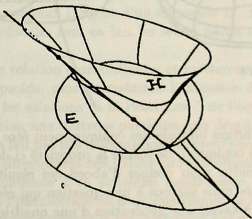
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$$

Par exemple d'étudier les vibrations sur ou à l'intérieur de cet ellipsoïde; voir par exemple [20].

Une propriété élémentaire est que, en un de leurs points d'intersection, les trois quadriques qui y passent y ont leurs plans tangents orthogonaux deux à deux. Sa démonstration est un peu longue si les calculs sont menés en coordonnées (x, y, z) sans astuce.

Rappelons que les géodésiques d'une surface (ou plus généralement d'un espace métrique raisonnable) sont les courbes qui supportent nécessairement les plus courts chemins d'un point à un autre. Mais les géodésiques, définies par cette propriété de minimalité locale, restent intéressantes lorsqu'on les prolonge indéfiniment, ce qui est toujours possible s'il y a compacité.

Si l'on veut étudier les géodésiques sur l'ellipsoïde E , on fera donc λ dans le triple (λ, μ, ν) et la surface de cet ellipsoïde sera paramétrée par (μ, ν) . On appelle aussi ces coordonnées **elliptiques**. Les géodésiques de E sont définies par une famille très simple d'équations différentielles en $\mu(t)$, $\nu(t)$ (avec en outre la condition de vitesse égale à 1) dépendant d'un paramètre. Cela permet de les étudier complètement. Un texte récent est [18], voir aussi les références à la fin de la section 10.4.9.5 de [3]. En voici quelques propriétés. A une valeur fixée du paramètre cité plus haut est associé un hyperboloïde H à une nappe ou à deux nappes tel que les géodésiques associés oscillent entre les deux courbes d'intersection de E avec H . Elles peuvent, dans \mathbf{E}^3 , être géométriquement définies par la condition que leurs tangentes soient des droites de \mathbf{E}^3 constamment tangentes à H .



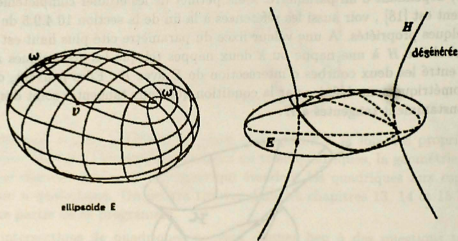
Les figures ci-dessus correspondent où H a une nappe; le lecteur pourra s'exercer à dessiner le cas où H a deux nappes. Ce cas intermédiaire est celui où H est réduit

à l'hyperbole

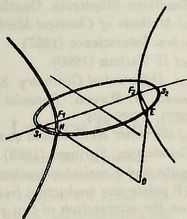
$$\frac{x^2}{a^2 - b^2} + \frac{z^2}{b^2 - c^2} - 1 = 0, \quad y = 0$$

du plan $y = 0$. L'intersection $H \cap E$ se compose de 4 points a, a', b, b' . Ils sont appelés les **ombilics** de E car ce sont les points où la surface E de \mathbf{E}^3 a ses deux rayons de courbures principaux égaux (voir [5]). Mais ici ils ont l'extraordinaire propriété de focalisation suivante (qui n'est autre que la limite de celle d'oscillation dite plus haut): toute géodésique issue de a passe par a' (resp. b, b').

Les courbes des intersections $E \cap H$ sont toutes des **lignes de courbure** de E (et de H aussi d'ailleurs), c'est à dire les courbes dont la tangente donne toujours une direction de courbure principale (voir plus haut). Il s'agit là d'une définition valable pour toute surface (voir [5], par exemple). Avec les coordonnées elliptiques, on montre facilement que toutes ces lignes de courbure sont définies comme lieu des points dont la somme des distances à deux ombilics est constante (comparer avec la section 2 des coniques). Noter que c'est aussi la différence qui est constante si l'on change un ombilic en son antipodal !



De même que la définition bifocale des coniques peut être étendue en le théorème de Graves (section 9 des coniques), de même la propriété ci-dessus $d(a, v) + d(b, v) = \text{constante}$ peut être étendue pour donner d'abord des résultats du type de Graves sur une quadrique donnée mais surtout à une question qui résistera très longtemps à l'ardeur des géomètres, à savoir une génération d'une quadrique entière avec un seul fil tendu. Le cas $d(f, x) + d(f', x) = \text{constante}$ dans \mathbf{E}^3 ne donne en effet que des ellipsoïdes de révolution. Il fallut attendre Staude, vers la fin du 19^{ème} siècle, pour trouver cette génération. La plus simple est celle de la figure ci-dessous :



L'hyperbole est celle ci-dessus

$$\frac{x^2}{a^2 - b^2} - \frac{z^2}{b^2 - c^2} - 1 = 0 \quad , \quad y = 0,$$

et l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \quad , \quad z = 0.$$

Mais Staude étendit ce résultat "à la Graves" : on tend le fil entre un ellipsoïde et un hyperboloïde à une nappe qui lui est homofocal : le point là où ce tend le fil décrit un ellipsoïde.

Une propriété des ellipsoïdes homofocaux, qui généralise celle des ellipses citées à la fin de la section 9 des coniques, est encore une propriété de caustique : un rayon lumineux qui se propage à l'intérieur de l'ellipsoïde E , en se réfléchissant sur la surface intérieure avec la symétrie qui s'impose par rapport au plan tangent au point de réflexion, reste toujours tangent d'un ellipsoïde E' , homofocal et intérieur à E . Les quadriques homofocales sont en fait les seules paires de surfaces à avoir cette propriété, cf . [24].

Tout récemment une relation extraordinaire et inattendue a été découverte entre les géodésiques de l'ellipsoïde, plus précisément l'extension évidente des quadriques homofocales aux E^n , et les solutions "à la Peter Lax" de l'équation KdV (Korteweg de Vries) qui est l'équation aux dérivées partielles que décrit le mouvement de l'eau dans un canal. Le lien se fait par des déformations isospectrales de matrices. Plusieurs autres problèmes y sont directement liés : celui du mouvement d'un point qui se meut sur une sphère sous l'influence d'un potentiel quadratique, celui dû à H. Knörrer qui généralise le fait que l'intersection de deux quadriques de CP^3 est paramétrée par une fonction elliptique et qui concerne la variété formée des sous espaces de dimension $n - 1$ de l'intersection de deux quadriques de CP^{2n+1} . Pour tout ce qui précède on consultera [18], [25].

References

- [1] P. Appel, E. Lacour. *Fonctions Elliptiques*. Gauthier-Villars (1922).
- [2] V. Arnold. *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Springer (1978).
- [3] E. Artin. *Geometric Algebra*. Interscience (1957).
- [4] M. Berger. *Géométrie I et II*. Nathan (1990).
- [5] M. Berger, B. Gostiaux. *Differential Geometry*. Springer (1988).
- [6] H. Bos, C. Kers, F. Oorst, D. Raven. *Poncelet's Closure Theorem*. *Expositiones Mathematicae* 5 (1987), p 289-364.
- [7] J. Coolidge. *A history of the conic sections and quadric surfaces*. Dover (1968).
- [8] P. Dembowski. *Finite Geometries*. Springer (1968).
- [9] F. Dingeldey. *Kegelschnitte und Kegelschnittssysteme*. *Encyklopädie der Math. Wissenschaften*, iii, C. 1. (Il existe une traduction française).
- [10] R. Donagi. *Group law on the intersection of two quadrics*. *Ann. Sc. Nor. Sup.* Pisa, ser. IV, 7 (1980).
- [11] W. Fulton. *Algebraic Curves*. Benjamin (1969).
- [12] P. Griffiths, J. Harris. *On Cayley's Explicit Solution to Poncelet's Porism*. *L'enseignement mathématique*, t. X XIV, p 31-40.
- [13] M. Grötschel, L. Lovasz, A. Schrijver. *Geometric Algorithms and Combinatorial Optimization*. Springer (1988).
- [14] P. Gruber. *Convex billiards*. *Geometriae Dedicata* (1990).
- [15] G. H. Halphen. *Traité des fonctions elliptiques*, t. I et t. II. Gauthier-Villars (1886) et (1888).
- [16] S. Kleiman. *Chasles's Enumerative Theory of Conics*. A Historical Introduction. *Studies in Mathematics* n° 20. MMA (1980).
- [17] W. Klingenberg. *Riemannian Geometry*, de Gruyter (1982).
- [18] H. Knörrer. *Geodesics on the Ellipsoid*. *Invent. math.* 59 (1980), 119-143.
- [19] H. Levy. *Projective and Related Geometries*. McMillan, (1964).
- [20] Morse-Feshbach. *Methods of Theoretical Physics*. McGraw Hill, (1953).
- [21] G. Pisier. *The volume of Convex Bodies and Banach Space Geometry*. Cambridge University Press (1989).
- [22] A. N. Tjurin. *On intersections of quadrics*. *Russian Math. Surveys* 30 (1975), 51-105.
- [23] M. Gromov. *Hyperbolic groups*. In "Essays in group theory". Ed. S. M. Gersten, M.S.R.I. Pub. 8, Springer (1987), 75-263.
- [24] M. Berger. *Sur les caustiques de surfaces en dimension 3*. *C.R. Acad. Sci. Paris*, (1990) ou *Bull. Soc. Math. France*, 123 (1995), 107-116.
- [25] J. Moser. *Geometry of quadrics and spectral theory*. In Chern symposium 1979. Springer (1980).
- [26] W. Fulton. *Intersection theory*. Springer (1984).
- [27] G. Darboux. *Principes de géométrie analytique*. Paris (1946).