

## OPERADORES PSEUDODIFERENCIAIS: ORIGEM E UTILIDADE

Fernando Cardoso

Universidade Federal de Pernambuco,  
Departamento de Matemática,  
CEP. 50540-740- Recife-Pe, Brazil  
e-mail: fernando@dmat.ufpe.br

*Operadores Pseudodiferenciais*, OpPsD, são extensões naturais dos operadores diferenciais, OpD; eles possuem muitas propriedades importantes em comum com os OpD porém eles não tem, em geral, a propriedade local. Um operador  $P$  atuando em funções (ou distribuições)  $u(x)$  é chamado *local* se o valor de  $Pu$  no ponto  $x$ , depende apenas dos valores de  $u$  na vizinhança deste ponto (i.e  $p$  faz decrescer o suporte de  $u$ ; os únicos operadores locais são, de acordo com Peetre, os OpD). Apesar dos OpPsD não possuírem, em geral, esta propriedade ( OpPsD são pseudolocais i.e eles fazem decrescer o suporte singular de uma função ou distribuição), eles tem muitas propriedades em comum com os OpD.

A investigação sobre os OpPsD teve suas origens com o estudo de uma classe de operadores integrais, chamados *Operadores Singulares Integrais*, OpSI. Neste particular, os trabalhos de Giraud, Mikhlin, Calderon e Zygmund devem ser mencionados. O OpSI mais simples possível é a *transformada de Hilbert*,  $H$ , que transforma uma função suficientemente regular  $u(x)$ , de uma variável, na função

$$Hu(x) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x' - x} u(x') dx', \quad (1)$$

onde o *valor principal de Cauchy* deve ser tomado na integral. Mais geralmente, OpSI transformam funções  $u(x)$  em funções

$$Gu(x) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k(x, x')}{x - x'} u(x') dx', \quad (2)$$

onde  $k$  deve satisfazer certas condições de regularidade. O tratamento dos OpSI é um tanto delicado, devido a singularidade do núcleo  $k$ . Uma importante e decisiva ilustração da utilidade dos OpSI é o teorema de Calderón sobre unicidade local do problema de Cauchy.

Alguns anos atrás foi observado que os OpSI podem ser considerados como representações particulares de operadores de uma certa classe, que podem ser representados de uma maneira mais conveniente para a sua investigação. Esta sugestão foi feita por Lax em 1963; foi seqüenciada por Kohn e Nirenberg que introduziram uma representação mais adequada para estes operadores, que eles chamaram OpPsD e para os quais desenvolveram uma teoria apropriada para o estudo de problemas elíticos. Em particular, eles mostraram que a classe dos OpPsD forma uma álgebra. Esta maneira de considerar os OpPsD foi utilizada por Friedrichs e Lax no tratamento de problemas de contorno para OpD. Um pouco mais tarde, em 1967, Hörmander considerou uma classe mais ampla de OpPsD e fez extensivo uso dela no tratamento de problemas hipoelíticos. Mais recentemente, em 1973, Beals e Fefferman definiram uma classe mais sofisticada de OpPsD que lhes possibilitou provar a suficiência da propriedade ( $P$ ) de Nirenberg e Treves para a resolubilidade local de equações diferenciais parciais de tipo principal com coeficientes  $C^\infty$  e também uma forma "sharp" da desigualdade de Gårding. Na Seção 2 mostraremos que os OpPsD são bastante úteis para a obtenção de microlocalizações (i.e localizações no fibrado cotangente), necessárias no estudo da teoria local (resolubilidade local, propagação de singularidades, estimativas subelíticas, etc.) das equações diferenciais parciais de tipo principal e, também, de características múltiplas (via o teorema de Weierstrass-Malgrange). Neste sentido, são significativas as contribuições de Hörmander, Nirenberg, Treves e Egorov et al.

No decorrer do tempo, classes mais amplas de OpPsD desempenharam um papel cada vez mais relevante nas pesquisas. É importante acrescentar todavia que muitos operadores que aparecem no estudo das equações diferenciais, não são pseudolocais e, portanto, não são OpPsD. Por exemplo, o problema de Cauchy para equação das ondas

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0, \quad u|_{t=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = f, \quad (3)$$

possua uma "solução fundamental"  $P$  (aplicando os dados de Cauchy,  $u$  e  $\frac{\partial u}{\partial t}$ , para  $t = 0$ , na solução  $u$ , no tempo  $t$ ) da seguinte forma

$$\begin{aligned}
 P(\{0\}, f)(x, t) &= u(x, t) \\
 &= O_s(2\pi)^{-n} \int \int \{e^{i((x-y, \xi) + t|\xi|)} - e^{i((x-y, \xi) - t|\xi|)}\} (2i|\xi|)^{-1} \\
 &\quad f(y) dy d\xi
 \end{aligned}$$

onde " $O_s$ " significa que os valores são determinados no sentido de integrais oscilatórias quando  $f$  é uma distribuição em  $\mathbb{R}^n$ . O operador  $P$  não é pseudolocal. Em 1968, Hörmander introduziu uma classe (que inclui os OpPsD) de operadores, chamados Operadores Integrais de Fourier, não mais pseudolocais, a fim de estudar problemas hiperbólicos, como (3) acima.

A idéia de Lax utilizava séries de Fourier; a de Kohn e Nirenberg é baseada na transformada de Fourier. Uma boa motivação para a última é a construção de parametrizes para operadores elíticos (ver Seção 1). De lá se depreende que os OpPsD desempenham para os OpD com coeficientes variáveis o mesmo e relevante papel que a transformada de Fourier desempenha no estudo dos OpD com coeficientes constantes.

Finalmente uma nota histórica: a designação de um operador  $f\left(\frac{d}{dx}\right)$  a uma função  $f(\xi)$  já tinha sido feita por Lagrange e Cauchy e foi extensivamente usada por Heaviside no tratamento de problemas de transmissão eletromagnética. A idéia de fazer corresponder um operador  $G = g(x, D_x)$  a uma função  $g(x; \xi)$  de ambas variáveis,  $x$  e  $\xi$ , surgiu em ligação com a Mecânica Quântica, em 1926. Naquele tempo não existia uma teoria matemática para esses operadores. Um ano mais tarde H. Weyl propôs uma definição para os operadores porém, então, estes já não eram de importância vital para os propósitos da Mecânica Quântica. Seria desejável que o interesse matemático atual por esse assunto fizesse ressurgir o interesse dos físicos pelo mesmo.

## 1 Parametrizes de operadores elíticos

A fim de motivar a construção que faremos adiante consideremos a seguinte equação

$$P(D)u = f, \quad (1.1)$$

onde  $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  e  $P = P(D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha$  é um OpD linear com coeficiente constantes,  $a_\alpha \in C$ . Usamos a notação habitual:

$$\begin{aligned} D &= (D_1, \dots, D_n), \\ D_j &= -\sqrt{-1} \partial / \partial x^j \quad (j = 1, \dots, n), \quad \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n), \\ D^\alpha &= D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n. \end{aligned}$$

$P(\xi)$  é um polinômio com coeficientes complexos em  $n$  variáveis (reais)  $\xi_1, \dots, \xi_n$ . Podemos reduzir o problema (1.1) ao problema de *divisão*

$$P(\xi)\hat{u} = \hat{f} \quad (1.2)$$

onde  $\hat{u}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot \xi} u(x) dx$ ,  $(x \cdot \xi = x^1 \xi_1 + \dots + x^n \xi_n, dx = dx^1 \dots dx^n)$  denota a transformada de Fourier; tirando então partido da fórmula de Inversão de Fourier, obtemos (formalmente)

$$u(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{ix \cdot \xi} \frac{\hat{f}(\xi)}{P(\xi)} d\xi, \quad (1.3)$$

que devia ser a solução de (1.1).

A grande obstrução ao que fizemos é que, em geral, a integral (1.3) não tem sentido, devido aos zeros de  $P(\xi)$ . Há casos porém, onde uma pequena modificação dos argumentos acima, conduz a uma solução aproximada de (1.1). O mais importante de todos é quando o operador  $P$  é *elítico*, i.e:

$$Pm(\xi) \neq 0 \text{ se } 0 \neq \xi \in \mathbb{R}_n, \quad (1.4)$$

onde  $P_m(\xi) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha \xi^\alpha$ , é o *símbolo principal* de  $P$ .

São consequências imediatas de (1.4):

$$\text{O conjunto dos zeros de } P(\xi) \text{ em } \mathbb{R}_n, \text{ é compacto.} \quad (1.5)$$

$$|P(\xi)| > 1 \text{ para valores de } |\xi| \text{ suficientemente grandes.} \quad (1.6)$$

Assumindo então que  $P$  é *elítico*, seja  $\rho > 0$ , tal que os zeros de  $P(\xi)$  estejam contidos na bola centrada na origem e de raio  $\rho$ . Podemos então considerar a integral

$$v(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{ix \cdot \xi} \frac{\hat{f}(\xi)}{P(\xi)} \chi(\xi) d\xi, \quad (1.7)$$

onde  $\chi \in C^\infty(\mathbb{R}_n)$ ,  $\chi(\xi) = 0$  se  $|\xi| < \rho$ ,  $\chi(\xi) = 1$  se  $|\xi| > \rho'$   $> \rho$ . É fácil verificar que  $v$  não difere *substancialmente* de uma solução de (1.1). Com efeito,

$$P(D)v(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{ix \cdot \xi} \hat{f}(\xi) \chi(\xi) d\xi = f(x) - Sf(x), \quad (1.8)$$

onde

$$Sf(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{ix \cdot \xi} \hat{f}(\xi) \{1 - \chi(\xi)\} d\xi.$$

A função  $\chi(\xi)/P(\xi)$  pertence a  $C^\infty(\mathbb{R}^n)$  e, por causa de (1.6), é limitada. Consequentemente, define uma distribuição temperada em  $\mathbb{R}^n$  que é a transformada de Fourier de uma distribuição temperada  $k_x$ , em  $\mathbb{R}^n$ . Portanto,

$$v = k * j \quad (\text{convolução}). \quad (1.9)$$

Por outro lado,

$$Sf = h * f \quad (1.10)$$

onde  $h$  é a transformada inversa de Fourier de  $1 - \chi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ . Pelo teorema de Paley-Wiener-Schwartz,  $h$  pode ser estendida a  $C^n$  como uma função inteira de tipo exponencial. Sua restrição a  $\mathbb{R}^n$  pertence a  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , o espaço de Schwartz das funções  $C^\infty(\mathbb{R}^n)$  rapidamente decrescente no infinito. Fórmulas (1.9) e (1.10) têm sentido, mesmo que  $f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ : espaço das distribuições de suporte compacto. Em qualquer caso,  $Sf \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  (e pode ser estendida a  $C^n$  como uma função inteira de tipo exponencial). Podemos reescrever (1.8) da seguinte maneira

$$P(D)k = \delta - h, \quad \delta \quad \text{a distribuição de Dirac}, \quad (1.11)$$

ou de forma equivalente (denotando por  $K$  o operador de convolução  $k*$ ):

$$P(D)K = I - S: \quad I \quad \text{o operador identidade}, \quad (1.12)$$

onde  $S$  é um operador contínuo de  $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$  em  $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ . Uma distribuição como  $k$  (ou um operador como  $K$ ) é chamada (chamado) uma parametriz de  $P(D)$ . Apesar de não ser uma solução fundamental, i.e uma solução de

$$P(D)E = \delta, \quad (1.13)$$

$k$  é quase tão útil quanto uma solução fundamental. Aliás, não é difícil obter, neste caso, uma solução fundamental, a partir de  $k$ . Com efeito, podemos mostrar (e.g. utilizando o teorema de Cauchy-Kovalevskaja) que a equação

$$P(D)\omega = h \quad (1.14)$$

possue sempre uma solução  $\omega$  que é uma função inteira em  $\mathbb{C}^n$ . Então  $E = k + \omega$  satisfaz (1.13). Uma solução exata de (1.1) é então  $u = E * f$ .

O nosso interesse agora, é investigar se podemos estender alguns dos argumentos precedentes ao caso em que  $P$  é um OpD linear, elítico, com coeficientes variáveis. Começaremos definindo o que isso significa. Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , um aberto e

$$P(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha(x) D^\alpha \quad (1.15)$$

onde  $c_\alpha = c_\alpha(x) \in C^\infty(\Omega)$ , a valores complexos. O símbolo principal de  $P(x, D)$  é o polinômio em  $\xi$ , com coeficientes em  $C^\infty(\Omega)$ ,

$$P_m(x, \xi) = \sum_{|\alpha|=m} c_\alpha(x) \xi^\alpha. \quad (1.16)$$

Dizemos que o operador  $P(x, D)$  é elítico se:

$$P_m(x, \xi) \neq 0 \quad \forall x \in \Omega \quad \text{e} \quad 0 \neq \xi \in \mathbb{R}^n. \quad (1.17)$$

Assumindo que  $P(x, D)$  é elítico, tentaremos construir uma solução aproximada da equação

$$P(x, D)u = f, \quad (1.18)$$

modificando a formula (1.7), de tal sorte que

$$p(x, D)v = f - Sf, \quad (1.19)$$

onde, como antes,

$$s : \mathcal{E}'(\Omega) \longrightarrow C^\infty(\Omega) \quad (1.20)$$

é uma aplicação linear contínua.

Tentaremos a seguinte generalização de (1.7)

$$v(x) = Kf(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{ix \cdot \xi} k(x, \xi) \hat{f}(\xi) d\xi. \quad (1.21)$$

Faremos, de início, uma determinação formal do símbolo  $k(x, \xi)$  de forma a obter

$$P(x, D)K = I, \quad (1.22)$$

e, em seguida, modificaremos (1.21) de tal forma que a integral tenha sentido. Esta modificação conduzirá a uma solução, não da Eq. (1.22), porém de

$$P(x, D)K = I - S \quad (1.23)$$

onde  $S$  satisfaz (1.20).

Temos:

$$P(x, D)v(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{ix \cdot \xi} P(x, D_x + \xi) k(x, \xi) \hat{f}(\xi) d\xi,$$

desde que  $P(x, D_x)(e^{ix \cdot \xi} \omega(x)) = e^{ix \cdot \xi} P(x, D_x + \xi) \omega(x)$ .

Devido a fórmula de inversão de Fourier é suficiente resolver a equação:

$$P(x, D_x + \xi) k(x, \xi) = 1. \quad (1.24)$$

Podemos escrever

$$P(x, D_x + \xi) = P_m(x, \xi) + \sum_{j=1}^m P_j(x, \xi, D_x),$$

onde  $P_j(x, \xi, D_x)$  é um operador diferencial relativamente a  $x$  (em  $\Omega$ ), de ordem  $j$ , com coeficientes polinômios homogêneos relativamente a  $\xi$ , de grau  $m - j$ . A idéia é então escrever o símbolo  $k(x, \xi)$  como soma de funções de  $(x, \xi)$ , homogêneas relativamente a  $\xi$ . Devido ao uso da transformada de Fourier e o fato de que  $K$  atua sobre distribuições, o símbolo  $k(x, \xi)$  deve ser *temperado* em  $\xi$  e, portanto, os graus de homogeneidade das várias componentes deverão permanecer limitados. Poremos

$$k(x, \xi) \doteq \sum_{j=0}^{+\infty} k_j(x, \xi) \quad (1.25)$$

onde  $k_j(x, \xi)$  é homogêneo relativamente a  $\xi$ , de grau  $d_j \searrow -\infty$  (os  $d_j$  são inteiros negativos).

Determinaremos então os  $k_j$ , identificando os termos de mesmo grau de homogeneidade relativamente a  $\xi$ , nos dois membros de (1.24). Obtemos, assim,

$$Pm(x, \xi) k_0(x, \xi) = 1 \quad (1.26)$$

$$P_m(x, \xi)k_j(x, \xi) = - \sum_{\substack{j'=0 \\ j' \geq j-m}}^{j-1} P_{j-j'}(x, \xi, D_x)k_{j'}(x, \xi) \quad , \quad j > 0 \quad (1.27)$$

É portanto possível a sucessiva determinação dos  $k_j$ , uma vez que o membro direito de (1.27) depende somente de  $k_{j'}$ , com  $j' < j$ . De (1.26) segue que  $d_0 = -m$  e de (1.27) obtemos mais geralmente, que  $d_j = -(m+j)$ .

Existem entretanto duas obstruções ao argumento precedente. Primeiro, cada termo  $k_j(x, \xi)$  pode ser escrito como uma função racional cujo denominador é da forma  $P_m(x, \xi)^{r_j}$ , com  $r_j > 0$ . Conseqüentemente, os zeros de  $P_m(x, \xi)$  (que são pontos da forma  $(x, 0)$  desde que  $P(x, D)$  é elítico) causarão alguns problemas. Segundo, é a questão da convergência da série (1.25). Felizmente, podemos atacar simultaneamente as duas dificuldades, introduzindo uma seqüência de funções de "corte", da maneira seguinte: seja  $\chi(t) \in C^\infty(\mathbb{R})$ ,  $\chi(t) = 0$  se  $t < 1/2$ ,  $\chi(t) = 1$  se  $t > 1$  e defina

$$\chi_j(\xi) = \chi(\rho_j^{-1} |\xi|), \quad j = 0, 1, \dots \quad (1.28)$$

onde  $\rho_j$  é uma seqüência estritamente crescente de números positivos, tendendo para  $+\infty$ .

Seja

$$k(x, \xi) = \sum_{j=0}^{+\infty} \chi_j(\xi)k_j(x, \xi) \quad (1.29)$$

onde as  $k_j$  são definidas, como antes, por (1.26) e (1.27). Sabemos que cada  $k_j \in C^\infty(\Omega \times \mathbb{R}_n \setminus \{0\})$  é homogêneo de grau  $-(m+j)$  relativamente a  $\xi$ . Conseqüentemente, se  $K$  é um compacto arbitrário de  $\Omega$  e  $p, q$   $n$ -uplas quaisquer, existe uma constante  $C^j = C_{p,q}^j(K) > 0$  tal, que

$$|D_x^q D_\xi^p k_j(x, \xi)| < C^j (1 + |\xi|)^{-(m+j+|p|)}, \quad x \in K, \quad 0 \neq \xi \in \mathbb{R}_n. \quad (1.30)$$

Note que no suporte de  $\chi_j$ , temos  $|\xi| > \rho_j/2$ . Segue então facilmente que escolhendo os  $\rho_j$  de forma conveniente, podemos assegurar a convergência da série (1.29) em  $C^\infty(\Omega \times \mathbb{R}_n)$  com sua topologia natural e também a validade da estimativa

$$|D_x^q D_\xi^p k_j(x, \xi)| \leq C_{p,q}(K)(1 + |\xi|)^{-m-|p|}, \quad x \in K, \quad \xi \in \mathbb{R}_n. \quad (1.31)$$

Observe que  $k(x, \xi) \equiv 0$  se  $|\xi| < \rho_0/2$ .



A pergunta agora é se  $k(x, \xi)$  definida por (1.29), satisfaz (1.24). A resposta é evidentemente negativa, devido aos "erros" introduzidos pelas funções de corte  $\chi_j(\xi)$ . O que se obtém é o seguinte:

$$P(x, D_x + \xi)k(x, \xi) = 1 - S(x, \xi). \quad (1.32)$$

onde

$$S(x, \xi) = 1 - \chi_0(\xi) + \sum_{j=1}^{\infty} S_j(x, \xi) \quad (1.33)$$

e

$$S_j(x, \xi) = \sum_{\substack{i=1 \\ (i \leq m)}}^j (\chi_{j-1} - \chi_j) P_i(x, \xi, D_x) k_{j-i}(x, \xi). \quad (1.34)$$

O  $\xi$ -suporte de cada  $S_j(x, \xi)$  é compacto (está contido na bola  $|\xi| \leq \rho_j$ ). Desse fato e de propriedades da série (1.29) e da equação (1.32), prova-se que o operador  $S$  definido por

$$Sf(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{ix \cdot \xi} S(x, \xi) \hat{f}(\xi) d\xi \quad (1.35)$$

satisfaz (1.20). De (1.32) obtém-se imediatamente (1.23). O operador  $K$  é, portanto, uma parametriz de  $P(x, D)$ . Embora não seja uma solução fundamental (i.e uma solução de (1.22)) ele é quase tao útil quanto esta e, a partir dele, pode-se obter uma solução fundamental local (i.e quando se considera distribuições com suportes bastante pequenos).

Os operadores pseudodiferenciais ( classe de Kohn e Nirenberg) foram introduzidos como uma generalização dos operadores diferenciais e de operadores como  $K$  e  $S$ , acima. Eles podem ser representados da seguinte maneira

$$Au(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{ix \cdot \xi} a(x, \xi) \hat{u}(\xi) d\xi \quad (1.36)$$

(observe que se  $A$  é um OpD,  $P(x, D)$ , fórmula (1.36) é verdadeira com  $a(x, \xi) = P(x, \xi)$ , o símbolo total de  $P(x, D)$ ).

Parametrizes de operadores elíticos e OpD lineares têm muitas propriedades em comum. Assumindo que ambos estejam definidos num aberto  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , eles definem aplicações lineares contínuas de  $C_c^\infty(\Omega)$  em  $C^\infty(\Omega)$

e de  $\mathcal{E}'(\Omega)$  em  $\mathcal{D}'(\Omega)$ : eles são pseudolocais ( $A : \mathcal{E}'(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$  é dito *pseudolocal* se  $\forall u \in \mathcal{E}'(\Omega), \forall U \subset \Omega$ , aberto,  $u \in C^\infty(U) \implies Au \in C^\infty(U)$ ). Operadores diferenciais são também locais. Aliás, como já foi salientado, OpD são os únicos operadores locais (parametrizes de operadores elícticos de ordem  $> 0$  não possuem a propriedade local). Um aspecto comum a OpD e a parametrizes como  $K$  (e também a operadores como  $S$ ) é que os correspondentes símbolos  $a(x, \xi)$  podem ser representados por séries cujos termos são funções homogêneas de graus decrescentes relativamente a  $\xi$  (para valores grandes de  $|\xi|$ ). A série é finita no caso de OpD:  $P(x, \xi)$  é simplesmente um polinômio em  $\xi$ ; é infinita no caso da parametriz  $K$  (e também de  $S$ ). Desigualdades do tipo (1.31) desempenham um papel relevante na obtenção de muitas das propriedades dos OpPsD; elas são o ponto de partida para a definição e teoria dos OpPsD (pelo menos da classe de Kohn e Nirenberg). Classes mais gerais (e.g a classe de Hörmander e a classe de Beals e Fefferman) são definidas, a partir de generalizações de (1.31).

Portanto OpPsD em  $\Omega$  são (geralmente) definidos por (1.36) onde  $a(x, \xi) \in S^m(\Omega)$ :

**Definição 1.1** *Seja  $m$  um número real. Denota-se por  $S^m(\Omega)$  o subespaço vetorial de  $C^\infty(\Omega \times \mathbb{R}_n)$ , formado por funções  $a(x, \xi)$  que possuem a seguinte propriedade:*

$$\text{Quaisquer que sejam o compacto } \mathcal{K} \subset \Omega \text{ e } n\text{-uplas } p, q, \quad (1.37) \\ \text{existe uma constante } C = C_{p,q}(\mathcal{K}) > 0$$

tal que

$$|D_x^q D_\xi^p a(x, \xi)| \leq C(1 + |\xi|)^{m-|p|}, \quad \forall x \in \mathcal{K}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}_n. \quad (1.38)$$

Dizemos então que  $a(x, \xi)$  é um símbolo de ordem  $\leq m$  e que o operador  $A$ , definido por (1.36), é um OpPsD de ordem  $\leq m$  em  $\Omega$ . O ínfimo caso exista de todas as ordens  $m$  tais que (1.38) é válido, é então chamado a (verdadeira) ordem de  $A$ . Observe que quando  $A$  é um OpD a ordem (verdadeira) de  $A$ , definida acima, coincide com sua ordem como OpD. Não é óbvio, mas pode ser mostrado, que o símbolo  $h(\xi)$  da transformada de Hilbert  $H$  é  $h(\xi) = \xi/|\xi|$  i.e  $H$  é um operador de ordem zero.

## 2 Utilidade dos OpPsD no estudo da resolubilidade local dos OpD

Mostraremos como os OpPsD são úteis no estudo da *resolubilidade local* de uma equação diferencial parcial linear

$$P(x, D)u = f, \quad (2.1)$$

onde  $P(x, D)$  (ver 1.15) é um OpD de ordem  $m > 0$ , com *características reais simples* (também chamado de tipo principal), cujos coeficientes  $c_\alpha(x)$  são funções  $C^\infty$ , a valores complexos, definidas em um subconjunto aberto  $\Omega$  do espaço euclidiano  $\mathbb{R}^n$ . Diremos que a equação (2.1) é *localmente resolúvel* em  $x_0 \in \Omega$  se existe uma vizinhança  $U$  de  $x_0$  em  $\Omega$  tal que, dada qualquer função  $f$ ,  $C^\infty$  em  $\bar{U}$ , o fecho de  $U$ , existe uma distribuição  $u \in \mathcal{D}'(U)$  tal que (2.1) é verdade em  $U$ . Diremos que  $P(x, D)$  é de *tipo principal* se  $d_\xi P_m(x, \xi)$  não se anula em  $\Omega \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ , onde  $P_m(x, \xi)$  é o símbolo principal de  $P(x, D)$ . Como  $P_m(x, \xi)$  é um polinômio homogêneo de grau  $m$  em relação a  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ , segue-se da relação de Euler que o significado geométrico dessa condição é que para todo  $x \in \Omega$ , o cone  $C_P(x) = \{\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : P_m(x, \xi) = 0\}$  possui apenas zeros simples. Isto motiva a terminologia “característica reais simples” uma vez que  $C_P(x)$  é chamado o cone característico no ponto  $x \in \Omega$  e a união  $C_P = \cup_{x \in \Omega} C_P(x)$  é o conjunto característico de  $P(x, D)$ . É importante salientar que o ambiente adequado para estas noções é o *fibrado cotangente*  $T^*(\Omega)$  sobre  $\Omega$ . Com efeito,  $P_m(x, \xi)$  é uma função  $C^\infty$  em  $T^*(\Omega)$  e  $C_P$  é um subconjunto cônico de  $T^*(\Omega)$ .

Para iniciar o estudo da resolubilidade de (2.1), vamos localizar em  $T^*(\Omega)$  (note que  $T^*(\Omega)$  pode ser identificado a  $\Omega \times \mathbb{R}^n$ ). É aqui que entra de forma decisiva a teoria dos OpPsD.

Seja  $(x_0, \xi^0) \in T^*(\Omega)$ , o complemento da seção zero em  $T^*(\Omega)$ , que pode ser identificado a  $\Omega \times \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Suponha primeiramente que

$$P_m(x_0, \xi^0) \neq 0. \quad (2.2)$$

Podemos então achar uma função  $C^\infty$ ,  $g(x, \xi)$  em  $\dot{T}^*(\Omega)$ , positivamente homogênea de grau zero (i.e  $g(x, \rho\xi) = g(x, \xi)$ , para todo  $x \in \Omega$ ,  $\xi \neq 0$  e  $\rho > 0$ ), igual a  $um$  em alguma vizinhança de  $(x_0, \xi^0)$  e ademais com suporte inteiramente contido na região onde  $P_m(x, \xi) \neq 0$ . Isto significa que para uma constante adequada  $c_0 > 0$ , temos, no suporte de  $g(x, \xi)$  (cuja projeção

na base  $\Omega$ , assumimos compacta),

$$|P_m(x, \xi)| \geq C_0 |\xi|^m, \quad (2.3)$$

ou seja o operador  $P(x, D)$  é *elítico* numa vizinhança do suporte de  $g(x, \xi)$ . A teoria dos OpPsD (ver Secção 1) fornece um procedimento para resolver (aproximadamente) a equação "localizada"

$$P(x, D)v = g(x, D)f, \quad (2.4)$$

onde

$$g(x, D)f(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{ix \cdot \xi} g(x, \xi) \hat{f}(\xi) d\xi. \quad (2.5)$$

Suponha agora que

$$P_m(x_0, \xi_0) = 0. \quad (2.6)$$

É aqui que a hipótese de tipo principal vai nos ajudar. Sabemos que alguma  $\xi$ -derivada de  $P_m(x, \xi)$  não se anula em  $(x_0, \xi_0)$ . Assumimos que é a derivada em relação a  $\xi_n$ . Pelo Teorema da Função Implícita, podemos escrever

$$P_m(x, \xi) = Q(x, \xi)(\xi_n - \lambda(x, \xi')), \quad \xi' = (\xi_1, \dots, \xi_{n-1}), \quad (2.7)$$

numa vizinhança cônica aberta  $\mathcal{U}$  de  $(x_0, \xi^0)$  em  $\dot{T}^*(\Omega)$ . Ambos  $Q(x, \xi)$  e  $\lambda(x, \xi')$ , são funções  $C^\infty$  em  $\mathcal{U}$ ; podemos supor que  $Q(x, \xi)$  é homogênea em  $\xi$  de grau  $m - 1$ , e  $\lambda$  homogênea em  $\xi'$  de grau 1. Ademais, se escolhermos  $\mathcal{U}$  suficientemente "estrito" em torno de seu eixo (que é o raio através  $(x_0, \xi^0)$ ), podemos assumir que, para  $c_1 > 0$  suficientemente pequeno,

$$|Q(x, \xi)| \geq C_1 |\xi|^{m-1}, \quad \forall (x, \xi) \in \mathcal{U}. \quad (2.8)$$

Seja  $g(x, \xi)$  como antes, exceto que agora requeremos que seu suporte esteja em  $\mathcal{U}$ , e não na região onde (2.3) é válida. Não é difícil verificar que, módulo um OpPsD de ordem  $-\infty$ , temos

$$g(x, D)P(x, D) = g(x, D)Q(x, D)L(x, D), \quad (2.9)$$

onde

$$L(x, D) = D_n - \lambda(x, D') - c(x, D), \quad (2.10)$$

com  $c(x, D)$  um OpPsD (em  $\Omega$ ) de ordem (no máximo) zero. Pela técnica de inversão de OpPsD elítico (descrita na Secção 1), podemos resolver

aproximadamente a equação

$$Q(x, D)\omega = g_1(x, D)f, \quad (2.11)$$

e então resolver (aproximadamente)

$$L(x, D)v = g_2(x, D)\omega. \quad (2.12)$$

As funções  $g_1$  e  $g_2$  são exatamente como  $g$ , exceto que  $g_1 \equiv 1$  numa vizinhança em  $\dot{T}^*(\Omega)$  do suporte de  $g$ , ao passo que  $g_2 \equiv 1$  numa vizinhança do suporte de  $g_1$  (todos os suportes devem estar contidos em  $\mathcal{U}$ ). Combinando (2.11) e (2.12), obtemos uma solução aproximada da equação (2.4).

Se  $U$  é uma vizinhança suficientemente pequena de  $x_0$  em  $\Omega$ , podemos achar um recobrimento aberto de  $\dot{T}^*(U)$  consistindo de um número *finito* de conjuntos cônicos  $\mathcal{U}$  nos quais ou (2.3) é válido ou temos uma fatorização do tipo (2.7), com todas as propriedades indicadas, em particular (2.8). Podemos tomar a função "cut off"  $g(x, \xi)$  pertencente a uma partição da unidade subordinada a este recobrimento e definir  $u$  como a soma das soluções  $v$  das correspondentes equações (2.4). É fácil verificar que  $u$  é uma solução da equação:

$$P(x, D)u = f + Rf, \quad (2.13)$$

onde  $R$  é um OpPsD de ordem  $-1$  (por uma redefinição de  $U$  e  $f$ , tomamos agora  $f \in C_c^\infty(U)$ ). Ademais, após todos os cálculos, podemos expressar  $u$  na forma  $u = Kf$ , onde  $K$  é um operador linear limitado em  $L^2(U)$ . É conhecido que a norma de  $R$ , visto como operador limitado em  $L^2(U)$ , tende a zero como o diâmetro de  $U$ . Assim se este é suficientemente pequeno, o operador  $I + R$  é inversível, e obtemos uma solução exata de (2.1), escrevendo:

$$P(x, D)\{K(I + R)^{-1}f\} = f \quad (2.14)$$

Em suma, a teoria dos OpPsD, nos possibilitou reduzir a resolubilidade da Equação (2.1) a resolubilidade da equação pseudodiferencial de primeira ordem (2.12). Observe que não teríamos complicação maior se tivéssemos suposto que  $P(x, D)$  em (2.1) é, ele próprio, um OpPsD de tipo principal.

Uma redução adicional de importância crucial na resolubilidade de (2.12) é possível utilizando-se a Teoria dos Operadores Integrais de Fourier.

## Referências

- [1] **Beals, R. e Fefferman, (1973)**, *On local solvability of linear partial differential equations*, Ann. of Math., **97**, 482-498.
- [2] **Kohn, J.J. e Nirenberg, L. (1965)**, *An algebra of pseudodifferential operators*, Comm. Pure Appl. Math. Vol.17, pp. 269-305.
- [3] **Treves, F. (1971)**, *On the existence and regularity of solutions of linear partial differential equations*, A.M.S. Summer School on partial differential equations, Berkeley (California) .
- [4] **Treves, F. (1980)**, *Introduction to pseudodifferential and Fourier integral operators*, Vol.1, Plenum Press, N.Y.