Cubo Matemática Educacional 29
Vol. 1. JUNIO 1999

Acerca de un Problema de Enteros

WALTER MOSCOSO ZARATE

Universidad de la Frontera
Facultad de Ingeniería
Depto. de Matemática
Temuco - Chile
E-mail: wmoscoso@ufro.cl

A los legos, ocasionalmente, cuando intentamos abordar una demostración, se nos presenta una sensación de inseguridad al creer no contar con los conocimientos, herramientas y/o destrezas necesarias que consideramos apropiadas para realizarla en el ámbito temático en que se sitúa la proposición elegida, optando a menudo por desentendernos del problema.

En el siguiente contexto mostramos que tal reacción es más un error de apreciación que de poco conocimiento. Para ejemplificar esta idea abordaremos la solución de un problema propuesto en una revista titulada **The American Mathematical Monthly**. [1]

La naturaleza del problema parece ser de tipo netamente algebraico y es probable que exista una demostración rigurosa ceñida a este ambiente. Aquí mostramos, paso a paso, cómo diversos contenidos, aparentemente ajenos a la proposición, nos sugieren un camino y recursos necesarios, para hacer un análisis exhaustivo del contenido y concretar una demostración.

Proposición: *Sean* a, b, c, d *enteros positivos que satisfacen las dos relaciones*:

$$b^2 + 1 = a\,c \quad y \quad c^2 + 1 = b\,d$$

Probar que:

$$a = 3\,b - c \quad y \quad d = 3\,c - b$$

Solución:

En primera instancia reorganizamos los elementos hipotéticos de otra manera eliminando de ambos la unidad con el sólo fin de dejar los elementos literales. Este ajuste nos permite factorizar en la igualdad resultante, b en el primer miembro y c en el segundo, adoptando la igualdad una forma que nos recuerda la formulación de **la potencia de un punto exterior a una circunferencia.**

Como:

$$\begin{aligned} b^2 + 1 &= a\,c \\ c^2 + 1 &= b\,d \end{aligned}$$

Entonces:

$$b^2 - c^2 = a\,c - b\,d$$

de donde:

$$b^2 + b\,d = c^2 + a\,c$$

El siguiente análisis geométrico cubre dos aspectos, uno el de verificar tal factorización y el otro mostrar que esta descomposición no es única, hallando para el segundo aspecto una razón equivalente.

Por geometría, considerando mcd(b, c) = 1, escojamos A, B, C, D, E coplanarios:

Siendo A, B, C, D $\in \odot(O, R)$,
E $\in$ ext($\odot$(O, R)), tomando:

$BE = c \quad , \quad BA = a$
$ED = b \quad , \quad DC = d$

tenemos $EB \cdot EA = ED \cdot EC$
de donde $c\,(a + c) = b\,(b + d)$.

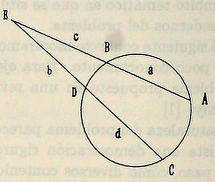

Fig. 1

Por Teorema del Coseno en $\Delta EDA \sim \Delta EBC$

$$\begin{aligned} DA^2 &= AE^2 + ED^2 - 2\,(AE)\,(ED)\cos\angle E \\ BC^2 &= EC^2 + BE^2 - 2\,(EC)\,(BE)\cos\angle E \end{aligned}$$

Deducimos que:

$$\begin{aligned} DA^2 &= (a+c)^2 + b^2 - 2\,b\,(a+c)\cos\angle E \\ BC^2 &= (b+d)^2 + c^2 - 2\,c\,(b+d)\cos\angle E \end{aligned}$$

$$\frac{DA}{ED} = \frac{BC}{BE} \Longrightarrow \frac{DA}{BC} = \frac{ED}{BE} = \frac{b}{c}$$

$$\frac{DA^2 - (a+c)^2 - b^2}{2\,b\,(a+c)} = \frac{BC^2 - (b+d)^2 - c^2}{2\,c\,(b+d)}$$

Así es que:

$$\frac{DA^2}{BC^2} = \frac{(a+c-b)^2}{(b+d-c)^2} \Longrightarrow \frac{b}{c} = \frac{a+c-b}{b+d-c}$$

Pero $\dfrac{b}{c} = \dfrac{a+c-b}{b+d-c} \Longrightarrow \dfrac{a+c-b}{b} = \dfrac{b+d-c}{c}$

Componiendo obtenemos: $\dfrac{a+c}{b} = \dfrac{b+d}{c}$

Significando este hecho que los racionales $\dfrac{a+c}{b+d}$ y $\dfrac{a+c-b}{b+d-c}$ son reducibles sobre Q^+.

Apoyados en la definición de un racional como cociente entre enteros positivos, asumimos una constante de proporcionalidad, objeto que nos permitirá escribir tanto a como d en una forma similar a la que deseamos probar.

Como $\dfrac{a+c-b}{b} = \dfrac{b+d-c}{c}$ podemos afirmar que $\exists\ u \in Q^+$ bajo el cual $a = u\,b - c$ satisface la ecuación $b^2 - c^2 = a\,c - b\,d$, y por consiguiente $\dfrac{u\,b-b}{b} = \dfrac{b+d-c}{c} \Longrightarrow u\,c = b+d.$

De donde $\qquad d = u\,c - b.$

Hasta aquí hemos cubierto el aspecto formal de nuestro objetivo, quedando por demostrar que tal constante es única y que admite valor 3. Para determinar un rango permisible de valores para la constante, volvemos a nuestra hipótesis y sustituimos en una de sus igualdades uno de los valores hallados.

Consideremos $a = u\,b - c \implies b^2 + 1 = (u\,b - c)\,c$

$$\implies b^2 + c^2 + 1 = u\,b\,c$$

$$\implies u = \frac{(b-c)^2 + 1 + 2\,b\,c}{b\,c}$$

$$\implies u = 2 + \frac{(b-c)^2 + 1}{b\,c}$$

Observamos así que $u > 2$.

Como $u \in \mathbb{Z}^+$, $\exists\, \lambda \in \mathbb{Z}^+$ tal que $\lambda = \dfrac{(b-c)^2 + 1}{b\,c}$

Recordemos que nuestro u debe ser entero positivo y no racional. Podemos considerar el excedente de u sobre 2 como un campo escalar de variables reales positivas b y c, a fin de determinar la naturaleza de sus extremos. Estamos interesados en los valores máximos que ella presente. Por simple inspección deducimos como cota inferior la unidad.

Así, a simple vista podemos determinar que $\lambda = 1$ cuando $b = c = 1$ y también que $\lambda = 1$ para $b = 2$ y $c = 1$.
Comparando λ con 1 podemos descartar $\lambda < 1$ pues asumimos $\lambda \in \mathbb{Z}^+$.

Como la determinación de los extremos relativos de un campo escalar $\lambda(b,c)$ está sujeta a la de hallar los valores estacionarios donde éstos se producen, debemos recordar que tales valores deben ser positivos y que pueden ser calculados equiparando el gradiente de λ con el vector nulo.

Intentamos hallar valores de b y c que maximicen λ para $b \neq c$.

Siendo $\nabla\lambda = (\lambda_b, \lambda_c)$ donde:

$$\lambda_b = \frac{2\,(b^2 - b\,c) - (b-c)^2 - 1}{b^2\,c}$$

$$\lambda_c = \frac{-2\,(b\,c - c^2) - (b-c)^2 - 1}{b\,c^2}$$

Los posibles puntos críticos deben quedar determinados por

$$\nabla\lambda = (0,0)$$

Según esto observamos que:

$$2\,(b^2 - b\,c) = -2\,(b\,c - c^2)$$

$$b^2 = c^2$$

Luego $b = -c$.

Como $c > 0 \implies b < 0$ en franca oposición a nuestro enunciado inicial.

Por tanto no hay puntos críticos con valores enteros positivos que maximicen λ.

Como λ no está acotada superiormente podemos asumir, en cierto modo, que para $b \neq c$ debe ocurrir:

$$\frac{(b-c)^2+1}{b\,c} \geq 1$$

Lo que nos lleva a:

$$b^2+c^2+1 \geq 3\,b\,c$$

Esta desigualdad tiene un atractivo especial, nos hace pensar en una posible desigualdad cuadrática, siempre y cuando podamos independizarnos de una de las dos variables.

Según la propiedad de tricotomía de los números reales, nos quedan por estudiar dos casos posibles, o $b > c$ o $b < c$. En cualquiera de ambos casos, podemos hacer la elección de un entero positivo $k = |b-c|$ tal que o $b = c+k$ o $c = b+k$, con el único objeto de hallar el conjunto solución de la desigualdad resultante al sustituir b o c en términos del parámetro k, asumiendo k valores entre 1 y $|b-c|$.

Supongamos $b > c$, $\exists\, k \in \{0, 1, 2, \ldots, b-c\}$ tal que $b = c+k$:

$$\begin{aligned}
3\,(c+k)\,c &\leq (c+k)^2+c^2+1\\
3\,c^2+3\,c\,k &\leq 2\,c^2+2\,c\,k+k^2+1\\
c^2+c\,k-k^2-1 &\leq 0\\
\left(c+\frac{k}{2}\right)^2 &\leq \frac{5\,k^2+4}{4}\\
\left|c+\frac{k}{2}\right| &\leq \frac{\sqrt{5\,k^2+4}}{2}
\end{aligned}$$

$$\boxed{0 \leq c \leq \frac{-k+\sqrt{5\,k^2+4}}{2}}$$

Razonando inductivamente, y como $k = 3$ conduce a un $c = 2$, esperamos que para ciertos k será:

$$c = \frac{-k+\sqrt{5\,k^2+4}}{2} \in \mathbb{Z}^+$$

Valor que sustituido en λ produce:

$$
\begin{aligned}
\lambda &= \frac{(b-c)^2+1}{b\,c} \\
&= \frac{k^2+1}{\left(\dfrac{-k+\sqrt{5k^2+4}}{2}+k\right)\dfrac{-k+\sqrt{5k^2+4}}{2}} \\
&= \frac{4\,(k^2+1)}{(k+\sqrt{5k^2+4})\,(-k+\sqrt{5k^2+4})} \\
&= \frac{4\,(k^2+1)}{5k^2+4-k^2} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

Como $u = 2+\lambda$ entonces $u = 3$, resultado con el cual hemos probado que:

$$a = 3\,b - c \qquad \text{y} \qquad d = 3\,c - b$$

Es interesante observar que este desarrollo no sólo nos permite demostrar la proposición sino que también nos permite inducir un formulismo para construir una tabla de cuatro columnas, cada una de las cuales encasilla a una de las posibles a, b, c, d que satisfacen la proposición.

Podemos establecer una cadena recursiva de valores para a, b, c y d según el esquema que se da a continuación. Esta tabla de valores se obtuvo de un modo poco riguroso, pero bastante efectivo, pues de ella observamos que la elección de a_j y de k_j como allí están señaladas no es única, verificando inmediatamente que también es posible que tomemos

$$a_{j+1} = 3a_j - b_j \quad \text{y} \quad k = k_{j+1} = a_j - b_j.$$

Cada fila de la tabla se calculó independientemente de los valores secuenciales de n, columna situada sólo con un fin referencial de fila. La búsqueda de a, b, c y d la realizamos pesquizando los valores de c, introduciendo en un programa computacional un algoritmo evaluador de $\dfrac{-k+\sqrt{5k^2+4}}{2}$, bajo una aritmética de redondeo a 5 decimales, definiendo el rango del iterador desde 1 hasta 32. Este cómputo nos entregó el siguiente resultado:

i	c_k'	k	c_k	k	c_k	k	c_k
1	$\boxed{1.00000}$	9	5.61187	17	10.53287	25	15.46873
2	1.44949	10	6.22497	18	11.14944	26	16.08608
3	$\boxed{2.00000}$	11	6.83896	19	11.76617	27	16.70348
4	2.58258	12	7.45362	20	12.38303	28	17.32092
5	3.17891	13	8.06880	**21**	$\boxed{13.00000}$	29	17.93840
6	3.78233	14	8.68439	22	13.61707	30	18.55592
7	4.38987	15	9.30030	23	14-23422	31	19.17348
8	$\boxed{5.00000}$	16	9.91647	24	14.85144	32	19.79106

Como habíamos definido $b = c + k$ esta selección también nos permitió pesquizar b generando $a = 3b - c$ y $d = 3c - b$ para $k = 1, 3, 8, 21$.

Llegamos a la forma $a_j = \dfrac{a^2_{j-1} + 1}{b_{j-1}}$ solamente observando que $b_j = a_{j-1}$ y que $c_j = b_{j-1}$. Como $b_j^2 + 1 = a_j c_j$, despejamos a_j y obtenemos el formulismo.

Eliminando los valores no enteros de c y reorganizando los datos tabulados podemos mostrar lo que sigue:

n	a_n	b_n	c_n	d_n	j
0	2	1	1	2	0
1	5	2	1	1	1
2	13	5	2	1	3
3	34	13	5	2	8
4	89	34	13	5	21
5	233	89	34	13	55
...	...	...	...	...	...
j	$\dfrac{a^2_{j-1}+1}{b_{j-1}}$	a_{j-1}	b_{j-1}	c_{j-1}	$\dfrac{c_j + \sqrt{5 * c_j^2 - 4}}{2}$
...	...	...	...	...	

Problema: Queda abierto, a la curiosidad del lector, determinar si la fórmula de recurrencia obtenida para a_n es una sucesión $\forall n \in \mathbb{N}$ y, si así fuese, analizar su convergencia o divergencia.

REFERENCIAS

[1] **The American Mathematical Monthly**, Vol 99, Number 3/ Marzo 1992. Propuesto por **Iván Vidav**, University of Ljubljana, Yugoslavia.