Acerca de una Definición Débil de Números Normales

D. M. PELLEGRINO

Universidade Federal da Paraíba
Departamento de Matemática e Estatística
Caixa Postal 10044
Cep 58.109.970
Campina Grande-PB-Brasil
E-mail: dmp@dme.ufpb.br

ABSTRACT. Un número real, representado en la base g(número natural diferente de 1) por $b_1 b_2 ... b_m, a_1 a_2 ... a_n ...$ se dice que es casi g-normal, si la sucesión (a_j) contiene, como subsucesión, cada posible sucesión de dígitos $0, 1, ..., g-1$. Esta es una definición primaria acerca del concepto de número g-normal, introducido por E. Borel en 1909. Damos un método simple para obtener números casi g-normales.

1. INTRODUCCION

Un número real w está representado en la base g (g natural, diferente de 1) si

$$w_g = \sum_{i=1}^{m} b_i g^i + \sum_{j=1}^{\infty} a_j g^{-j}, a_j, b_i \in \{0, ..., g-1\} \ \forall j \in I\!N \ , \forall i \in \{1, ..., m\}.$$

Esta representación es única si establecemos que $a_n < g-1$ para una cantidad infinita de índices n. Los números a_i se llaman dígitos.

A lo largo del texto siempre consideraremos que esta representación es única. El número w_g también se representa como $b_1 ... b_m, a_1 a_2 ...$. Usaremos la notación

$[w_g] = \sum_{j=1}^{m} b_j g^j$ donde denominaremos $[w_g]$ como la parte entera de w, representada en la base g.

Un número real $w_g = [w_g] + \sum_{j=1}^{m} a_j g^{-j}$ se llama g−simple normal si

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S(w_g, a, n)}{n} = \frac{1}{g} \quad \forall a \in \{0, ..., g-1\},$$

donde $S(w_g, a, n)$ denota la cantidad de índices i, $1 \leq i \leq n$, tales que $a_i = a$.

Decimos que $w_g = [w_g] + \sum_{j=1}^{m} a_j g^{-j}$ es g−normal si w_g es g−simple normal y si

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S(w_g, B_k, n)}{n} = \frac{1}{g^k},$$

para cada bloque de k dígitos $B_k = c_1 c_2 ... c_k$ y para cada entero positivo k, donde

$$S(w_g, B_k, n) = \#\{i;\ 1 \leq i \leq n - k + 1,\ a_{i+j-1} = c_j \quad \forall j,\ 1 \leq j \leq k\}.$$

En otras palabras $S(w_g, B_k, n)$ denota el número de ocurrencias del bloque B_k en los n primeros dígitos de w_g. Intuitivamente, un número g−normal es un número cuyos dígitos y sucesión finita de dígitos están, en algún sentido, bien distribuidos. Es conocido que casi todos los números en el sentido de la Medida de Lebesgue son números g−normales (ver [7]). Desafortunadamente, cada número g−simple normal está siempre construido ad hoc. No sabemos si números como $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ son números g−simples normales. En [1] podemos encontrar un estudio estadístico de la normalidad de tales números. No sabemos si existe algún número algebraico que sea normal respecto a alguna base g.

Un ejemplo canónico de un número 10−normal, debido a D. G. Champernowne [2] es

$$\alpha = 0,1234567891011121314151617181920 21...$$

Un número real $w_g = [w_g] + \sum_{j=1}^{m} a_j g^{-j}$, representado en la base g, tal que $(a_j)_{j=1}^{\infty}$ contiene, como una subsucesión finita, toda posible sucesión finita de dígitos, será llamado un número casi g−normal. Formalmente, w_g es casi g−normal si

$$(\forall k \in I\!N), (\forall c_1 ... c_k; c_j \in \{0, ..., g-1\} \forall j \in \{1, ..., k\}), \exists i \in I\!N; a_{i+j-1} = c_j, \forall j \in \{1, ..., k\}$$

Esta es una condición débil ante la condición requerida de números $g-$normales. Es claro que cada número $g-$normal es casi $g-$normal, mientras que lo recíproco no es cierto. Por supuesto, el número

$$\beta = 0,01002000300004\ldots \underbrace{00\ldots0}_{12 \text{ veces}} 12\ldots$$

es casi 10−normal, pero no es 10−normal. Existen números $g-$simples normales que no son casi $g-$normales. Un ejemplo de un número 10−simple normal que no es casi 10−normal es

$$\gamma = 0,0123456789012345678901234567890\ldots$$

Luego, el concepto de número casi $g-$normal no es tan débil comparado con el concepto de número $g-$simple normal.

Puesto que casi todos los números son $g-$normales, entonces casi todos los números son casi $g-$normales. En todo caso, este resultado puede ser fácilmente probado en forma independiente. En [5] hay una demostración simple y directa de este hecho. Nuestro propósito es mostrar un método simple de construir números casi $g-$normales.

2. RESULTADOS

Debido al artículo de H. Davenport y Paul Erdös [3], sabemos que si f es un polinomio cuyos valores, para $n = 1, 2, 3, \ldots$ son enteros, entonces $0, f(1)_{10} f(2)_{10} \ldots f(n)_{10}$ es 10−normal. Estos números son, a priori, números casi 10−normales. Demostraremos que para ciertas funciones, el número $0,[f(1)_g][f(2)_g]\ldots[f(n)_g]$ es casi $g-$normal.

Proposición 1. *Sea* $g \neq 1$ *un número natural. sea* $f\ :]0,\infty[\rightarrow]0,\infty[$ *una función estrictamente creciente, a partir de algún punto, continua, con primera derivada continua, tal que* $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$. *Además, supongamos que dado* $M > 0$, *existe* $x_M \in]0,\infty[$ *tal que*

$$x > x_M \Longrightarrow \frac{f(x)}{f'(x+\theta)} > M, \quad \forall\ \theta \in [0,1].$$

Entonces $w_g = 0,[f(1)_g][f(2)_g]\ldots$ *es un número casi* $g-$*normal.*

Demostración. Sea $x_1 \in]0,\infty[$, tal que f es estrictamente creciente para cada $x \geq x_1$. Sea $c_1 \ldots c_k$ una sucesión arbitraria finita de dígitos. Podemos suponer $c_1 \neq 0$. Si $c_1 = 0$, consideramos $1c_1 \ldots c_k$. Sea $M = g^{k+1}$.

Existe $x_M > x_1$ tal que

$$x > x_M \Longrightarrow \frac{f(x)}{f'(x+\theta)} > M, \quad \forall\, \theta \in [0,1].$$

Entonces

$$f(x) > g^{k+1} \cdot f'(x+\theta),\ \forall x > x_M,\ \forall\, \theta \in [0,1]. \tag{1}$$

Sea $c_1 c_2 \ldots c_k 00\ldots0$ una sucesión con r ceros tales que el número $c_1 c_2 \ldots c_k 00\ldots0$ es mayor que $f(x_M)$. Sea $x_3 > x_M$ tal que

$$f(x_3) = c_1 c_2 \ldots c_k 00\ldots0 = c_1 \cdot g^{r+k-1} + c_2 \cdot g^{r+k-2} + \ldots + c_k \cdot g^r. \tag{2}$$

Observe que esto es posible puesto que $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

Si x_3 es un entero positivo, la sucesión arbitraria $c_1 c_2 \ldots c_k 00\ldots0$ aparece en $[f(x_3)_g]$ y, a priori, la sucesión $c_1 c_2 \ldots c_k$ ocurre en $[f(x_3)_g]$.

Si x_3 no es un entero, por el Teorema del Valor Medio, existe $\theta \in [0,1]$ tal que

$$f(x_3+1) = f(x_3) + f'(x_3+\theta). \tag{3}$$

Luego, por (1), (2) y (3) concluimos que

$$\begin{aligned} f(x_3+1) &< f(x_3) + \frac{f(x_3)}{g^{k+1}} \\ &= (c_1 \cdot g^{r+k-1} + c_2 \cdot g^{r+k-2} + \ldots + c_k \cdot g^r) + (c_1 \cdot g^{r-2} + \ldots + c_k \cdot g^{r-k-1}) \end{aligned}$$

Sea l el entero tal que $x_3 < l < x_3 + 1$. Entonces $f(x_3) < f(l) < f(x_3+1)$. Así, tenemos

$$c_1 g^{r+k-1} + c_2 g^{r+k-2} + .. + c_k g^r < f(l) < c_1 g^{r+k-1} + c_2 g^{r+k-2} + .. + c_k g^r + \sum_{i=1}^{k} c_i g^{r-i-1}$$

y entonces

$$f(l) = c_1 \cdot g^{r+k-1} + c_2 \cdot g^{r+k-2} + \ldots + c_k \cdot g^r + \sum_{j=2}^{\infty} d_j \cdot g^{r-j},\ \text{con } d_j \in \{0,1,\ldots,g-1\}.$$

Así, la sucesión de dígitos $c_1 \ldots c_k$ ocurre en $[f(l)_g]$, con lo cual concluimos la demostración. ■

Es fácil observar que cada polinomio satisface las hipótesis de la proposición. Pero esto no es sorpresa debido al resultado de Davenport y Erdös. Si f es un polinomio entero que es positivo para $x \geq 1$, entonces $0{,}f(1)_{10} f(2)_{10} f(3)_{10} \ldots$ es un número trascendental (ver [4]). ¿Deberían los otros números creados mediante esta proposición ser también números trascendentales?

Funciones tales como $f(x) = x^{\alpha} + \sum_{i=1}^{n} \beta_i \cdot x^{\alpha_i}$, $\alpha > \alpha_i > 0$, donde α, α_i y β_i son números reales, $f(x) = a^{(x^{\gamma})}$ con a y γ números reales tales que $0 < \gamma < 1$ y $a > 1$, satisfacen las hipótesis de la proposición (si $\gamma = 1$ entonces $g(x) = 10^{x^{\gamma}}$ no satisface nuestras hipótesis y aún más, $0{,}g(1)_{10}g(2)_{10}\ldots$ no es casi 10−normal). Es posible que en alguno (o todos) los casos, el número $0,[f(1)_g][f(2)_g]\ldots[f(n)_g]$ sea g−normal, pero no lo sabemos (excepto para los polinomios). Trivial, pero importante como ejemplo, es considerar la función $h(x) = log_a x$, $(a > 1)$. Es obvio que

$$\varsigma_g = 0, [h(1)_g][h(2)_g]\ldots$$

es un número casi g−normal (aún sin necesidad de la proposición), pero podemos, con un pequeño esfuerzo, observar que este número tampoco es g−simple normal.

Por cierto, si $g = 10$ y $a = 10$,

$$\varsigma_{10} = 0, \underbrace{0\ldots0}_{9 \text{ veces}} \underbrace{1\ldots1}_{90 \text{ veces}} \ldots \underbrace{9\ldots9}_{10^{10}-10^{9} \text{ veces}} \ldots \underbrace{10\ldots10}_{10^{11}-10^{10} \text{ veces}}$$

y podemos ver que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{S(\varsigma_{10}, 1, n)}{n} \neq \dfrac{1}{10}$ y, además, este límite no existe. Por tanto, concluimos que alguno de nuestros ejemplos no son números g−normales. Es posible también probar que si f y g satisfacen las hipótesis de la proposición, entonces $f+g$ y $f \cdot g$ también la satisfacen.

Referencias

[1] **Beyer, W. A., Metropolis, N., and Neerdgaard, J. R.**, *Statistical study of digits of some square roots of integers in various bases,* Math. Comp. 24, 455-473 (1970).

[2] **Champernowne, D. G.**, *The construction of decimals in the scale of ten,* J. London Math. Soc., 8, 254-260 (1933).

[3] **Davenport, H., and Erdös, P.**, *Note on normal decimals,* Canad. J. Math. 4, 58-63 (1960).

[4] **Gelfond, A. O.**, *Transcendental & Algebraic Numbers,* Dover Publications, Inc. New York (1960).

[5] **Hardy, G. H., and Wright, E. M.**, *An Introduction to the Theory of Numbers,* Fourth Edition, Oxford University Press, London (1975).

[6] **Pellegrino, D. M.**, *Produto de Medidas e Tópicos em Representações g-ádicas de Números Reais, Dissertação de Mestrado,* IMECC-UNICAMP (1998).

[7] **Rényi, A.**, *Foundations of Probability,* Holden Day, Inc (1970).