Sobre a teoria de grupos em música

H. Albuquerque[1]
Departamento de Matemática - F.T.U.C.
Apartado 3008
3000 Coimbra/Portugal
E-mail: lena@mat.uc.pt

J.P.P.Oliveira
Departamento de Comunicação e Arte
Universidade de Aveiro
3800 Aveiro/Portugal
E-mail: jppo@ua.pt

1 Introdução

Neste trabalho é nosso objetivo apresentar um modelo matemático para o espaço musical e assim relacionar o grupo diedral das simetrias de um dodecágono regular com o grupo canónico constituido pelas transposições e pelas inversões musicais. Conforme se sabe, este grupo desempenha um papel de grande importância na Análise Musical com particular enfáse na música do séc. XX.

Os teóricos da música e muitos compositores têm-se preocupado com a criação de modelos analíticos, que permitam a sistematização teórica de certas características estruturais e de certas relações entre os fenómenos sonoros, existentes nos vários sistemas de escrita musical. Assim, tem-se procurado conceber um sistema simbólico

[1]Financiado pelo CMUC-FCT

para analisar os diferentes tipos de estruturas musicais, sem assumir certos elementos como sendo centralizadores e limitadores das suas possibilidades e do seu âmbito, como era o caso, por exemplo, dos sistemas de análise utilizados para a música tonal, que se podem considerar demasiadamente restritivos. Este novo sistema, cujo campo de acção deverá ser mais generalizado, será baseado no modelo analítico numérico. O argumento a utilizar para esta escolha, consiste precisamente na necessidade de analisar todo o tipo de estruturas musicais, nomeadamente aquelas que se relacionam de uma forma direta com a música do nosso século, permitindo a construção analítica dos seus próprios elementos de referência. Será, portanto, importante apresentar um sistema teórico que permita uma descrição correta e clara dos processos e estruturas internas da música habitualmente chamada atonal, analisando com precisão qualquer conjunto de notas e operadores que sobre eles podem ser aplicados, atribuindo-lhes uma classificação.

Há vários anos que os números inteiros são utilizados como um processo de simbolização que permite responder à maior parte das solicitações analíticas das novas linguagens musicais. Uma das razões para tal é o fato de os números e as notas musicais do sistema temperado partilharem várias propriedades, das quais as mais importantes são o serem ordenados, e discretos. Ao longo deste trabalho representaremos simbolicamente as notas musicais por valores numéricos inteiros, escolhendo (arbitrariamente) o número 0 para representar o dó central do piano.

Este trabalho foi elaborado com base em [1] e [2].

2 Modelo Matemático para o conjunto dos sons musicais

Utilizando a estrutura de grupo aditivo do conjunto dos números inteiros podemos introduzir uma estrutura de grupo no conjunto M dos sons musicais do sistema temperado tal que a seguinte aplicação g definida por $g(\text{dó}^3) = 0$ (dó^3 designa a nota habitualmente designada por dó central), $g(\text{dó}^3\#) = 1, \ldots$ e assim sucessivamente de tal forma que se para uma nota n tivermos $g(n) = i$ a nota (n mais meio tom) terá imagem o inteiro $i+1$ e a nota (n menos meio tom) terá imagem o inteiro $i-1$, seja um isomorfismo de grupos.

Assim, obtém-se o seguinte esquema sequencial:

Poderemos então afirmar que o conjunto dos números inteiros é um modelo do conjunto dos sons musicais. Neste caso, a manipulação do modelo poderá representar a manipulação daquilo que é modelado, desde que envolva apenas as características estruturais que são comuns a ambos. Existem, seguramente, muitas propriedades inerentes ao funcionamento dos números que poderão não ter correspondência ou significado nas estruturas musicais, sucedendo o mesmo no sentido oposto.

Seguindo este modelo simbólico, podemos agora abordar um dos conceitos mais importante de toda a Teoria da Música: o intervalo. Ao concebermos um espaço musical específico é natural que, conjuntamente se pense numa série de relações texturais características desse espaço, tais como distâncias, movimentos de um ponto para outro, ou mesmo, medidas de diversos tipos. Pensando de uma forma abstrata, em dois pontos pertencentes ao espaço musical, chamar-se-á intervalo (simbolizado int) ao "espaço" que separa estes pontos.

Também ao conjunto I dos intervalos musicais pode-se fazer corresponder o conjunto dos inteiros através da aplicação h definida por, sendo m e n elementos de M e designando por $int(m,n)$ o intervalo musical entre m e n, definimos a aplicação h de I para Z como $h(int(m,n)) = g(n) - g(m)$. Esta aplicação será sobrejectiva mas não injectiva pois dois intervalos diferentes podem ter a mesma imagem.

Os músicos têm sido tradicionalmente treinados para uma classificação particular dos intervalos, derivada do modelo teórico do sistema tonal, conforme se segue:

Intervalos musicais:

0 = uníssono

1 = 2^a menor superior	-1 = 2^a menor inferior
2 = 2^a maior superior	-2 = 2^a maior inferior

3 = 3^a menor superior	-3 = 3^a menor inferior
4 = 3^a maior superior	-4 = 3^a maior inferior
5 = 4^a perfeita superior	-5 = 4^a perfeita inferior
6 = 4^a aumentada superior	-6 = 4^a aumentada inferior
7 = 5^a perfeita superior	-7 = 5^a perfeita inferior
8 = 6^a menor superior	-8 = 6^a menor inferior
9 = 6^a maior superior	-9 = 6^a maior inferior
10 = 7^a menor superior	-10 = 7^a menor inferior
11 = 7^a maior superior	-11 = 7^a maior inferior
12 = 8^a perfeita superior	-12 = 8^a perfeita inferior
13 = 9^a menor superior	-13 = 9^a menor inferior
etc.	etc.

Como consequência de tudo o que dissemos até aqui surgirão de uma forma natural outras correspondências, das quais destacaremos duas pela sua importância: a relação de ordem definida em M por xRy se x e y têm a mesma altura ou x é mais grave do que y que é a relação de ordem definida nos inteiros por xRy se $x \leq y$ e a relação de equivalência definida em M por xRy se x e y estão separadas por um número finito de oitavas que não é mais do que a relação de equivalência dos inteiros módulo 12. É de notar a grande importância que esta ultima relação tem desempenhado na música ao longo de todos os tempos, sendo cada classe de equivalência constituida por todas as notas que têm o mesmo nome. Analogamente também no conjunto dos intervalos musicais podemos definir a relação de equivalência mRn se os intervalos m e n diferem entre si por um múltiplo de 12 meios tons sendo esta relação de equivalência identificada naturalmente com a dos inteiros módulo 12. É de notar que também aqui o conjunto das classes de equivalência é o conjunto dos 12 intervalos.

Ou seja, a sucessão cromática de notas, estendendo-se conceitualmente para o agudo e para o grave, ad *infinitum*, poderá ser reduzida modularmente, tomando como base a relação de equivalência acima explicada, de forma a obter-se um sistema composto por 12 classes de equivalência, que correspondem, em abstrato, aos 12 meios-tons da escala cromática. Chamaremos a estas classes de equivalência, *classes de altura*, abreviado pc (do inglês *pitch-class*).

$$
\begin{aligned}
\text{Classe de Altura } 0 &= (\ldots -60, -48, -36, -24, -12, 0, 12, 24, 36, 48, 60\ldots)\\
\text{Classe de Altura } 1 &= (\ldots -59, -47, -35, -23, -11, 1, 13, 25, 37, 49, 61\ldots)\\
\text{Classe de Altura } 2 &= (\ldots -58, -46, -34, -22, -10, 2, 14, 26, 38, 50, 62\ldots)\\
\text{Classe de Altura } 3 &= (\ldots -57, -45, -33, -21, -9, 3, 15, 27, 39, 51, 63\ldots)\\
&\ldots\\
&\ldots\\
&\ldots\\
\text{Classe de Altura } 11 &= (\ldots -61, -49, -37, -25, -13, -1, 11, 23, 35, 47, 59\ldots)
\end{aligned}
$$

Concluindo, as transformações do espaço musical (conjunto dos sons musicais) são transformações no conjunto dos inteiros e as transformações no conjunto das 12 notas podem ser consideradas como transformações em Z_{12}.

3 Interpretação geométrica do espaço musical

Designemos por Θ o conjunto dos pontos do plano. Sabemos que uma transformação do plano é uma aplicação bijectiva de Θ em Θ.

As transformações do plano dividem-se em dois tipos: as que são isometrias e as que não são isometrias. Recordemos que uma isometria é uma transformação do plano que preserva o comprimento dos segmentos de reta isto é, se f é uma isometria $\overline{PQ} = \overline{f(P)f(Q)}$ para quaisquer pontos P e Q do plano.

Dois exemplos de isometrias do plano são as rotações e as simetrias axiais.

Uma *simetria axial de eixo* m (ou inversão de eixo m) designada por Γ_m, é uma transformação do plano definida por:

$\Gamma_m(P) = P$ se o ponto P pertence à reta m e $\Gamma_m(P) = Q$, com $Q \neq P$, se o ponto P não pertence à recta m, sendo m a mediatriz do segmento de recta $[PQ]$.

As simetrias axiais, trocam os semiplanos separados pelo eixo de simetria e fixam os pontos desta reta.

A *rotação de centro no ponto O*, amplitude α e sentido dado é a transformação do plano que aplica o ponto P no ponto Q tal que $\overline{OP} = \overline{OQ}$, a amplitude do ângulo $\sphericalangle\ POQ$ é igual a α e este ângulo é descrito no sentido dado. (Diremos que o sentido da rotação é negativo se o movimento se efetuar no sentido do movimento dos ponteiros de um relógio).

É evidente que podemos considerar composições destas transformações, obtendo novas transformações do plano. É de recordar que a composição de rotações com o mesmo centro é uma rotação e a composição de isometrias é uma isometria.

Dada uma figura geométrica uma *transformação de simetria* é uma isometria do plano que transforma a figura nela própria. Prova-se que o conjunto das simetrias de um subconjunto de pontos do plano forma um grupo para a composição de transformações, chamado o *grupo de simetria* desse subconjunto.

Consideremos um polígono regular de n lados. O grupo de simetria para esta figura geométrica está estudado e é um *grupo diedral* (D_n). Suponhamos que o polígono regular de n lados está centrado na origem de um referencial cartesiano definido no plano do polígono com um dos vértices situando-se no semi-eixo positivo dos XX. Designemos por ρ a rotação de centro em O, sentido negativo e amplitude $360°/n$ e designemos por σ a inversão de eixo XX. Prova-se que o grupo de simetria deste polígono é $\{\iota, \rho, \rho^2, \ldots, \rho^{(n-1)}, \rho, \rho\sigma, \rho^2\sigma, \ldots, \rho^{(n-1)}\sigma\}$.

Como O está no eixo dos XX e $\rho^k\sigma$ é uma simetria axial de eixo XX sendo $\rho^{(n-k)}\sigma = \rho^{-k}\sigma = (\sigma\rho^k)^{-1} = \sigma\rho^k$, podemos facilmente escrever a tabela deste grupo recordando ainda que $\rho^n = \iota = \sigma^2$.

Por exemplo, se considerarmos um polígono de 12 lados, numerando os seus vértices de 0 a 11 no sentido dos ponteiros do relógio, o grupo de simetria para este polígono é $\{\iota, \rho, \rho^2, \ldots, \rho^{11}, \sigma, \rho\sigma, \rho^2\sigma, \ldots, \rho^{11}\sigma\}$, sendo ρ a rotação de centro em O (centro da circunferência circunscrita ao polígono), sentido negativo e amplitude $30°$ e σ a simetria axial de eixo 0-6. É de notar que as transformações $\sigma, \rho\sigma, \rho^2\sigma, \ldots, \rho^{11}\sigma$ representam simetrias axiais cujo eixo de simetria passa pelo ponto O e pelo vértice i no caso $\rho^{2i}\sigma$ ou pelo ponto médio do segmento de recta que une o vértice i ao vértice $i+1$ no caso $\rho^{2i+1}\sigma$.

O grupo de simetria de um polígono regular de n lados não é cíclico. De fato ele é gerado pelos elementos ρ e σ, pois qualquer elemento do grupo é composição de potências destes dois elementos, mas contém um subconjunto que é um grupo cíclico constituído pelas rotações de centro no centro do polígono $(C_n =< \rho >)$.

(Será interessante recordar aqui aquele célebre teorema de Leonardo da Vinci que nos diz que um grupo finito de isometrias ou é um grupo cíclico C_n ou é um grupo diedral D_n, o qual tem como corolário imediato que o grupo de simetria de um polígono ou é cíclico ou diedral. Já agora acrescentemos também que para cada n inteiro positivo, prova-se que existe um polígono tendo como grupo de simetria

C_n e um polígono tendo como grupo de simetria D_n.)

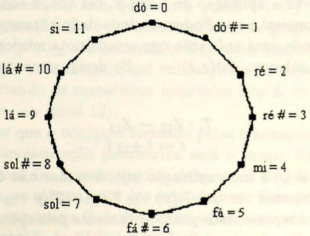
Seja Ω o conjunto dos pontos de um polígono regular de n lados e consideremos o conjunto $P(\Omega)$ formado por todos os subconjuntos de Ω e a relação R definida em $P(\Omega)$:

XRY se X é aplicado em Y por uma transformação de simetria obtemos uma relação de equivalência.

Os subconjuntos X e Y de Ω pertencem à mesma classe de equivalência (isto é, dizem-se equivalentes) se existe uma transformação de simetria que aplica X em Y e $[X] = \{f(X) \colon f$ é uma transformação de simetria de $\Omega\}$.

Consideremos seguidamente o subconjunto Ψ dos pontos do plano que são vértices de um polígono regular de n lados. Numerando os vértices de 0 a $(n-1)$, estabelecemos uma correspondência biunívoca f entre Z_n e o conjunto Ψ, a qual vai induzir em Ψ, uma lei de composição interna $* : f(x) * f(y) = f(x +_n y)$ isto é, para dois vértices M e Q do polígono temos $Q * M = P$ onde $P = \delta(Q)$, sendo δ a rotação de centro em O (ponto que é o centro da circunferência circunscrita ao polígono), sentido negativo e amplitude $\prec EOM$ sendo E o vértice 0 do polígono.

A estrutura de grupo de $(Z_n, +_n)$ induz uma estrutura de grupo em Ψ compatível com f (isto é, tal que f é um isomorfismo de grupos) muito útil pois possibilita-nos uma interpretação geométrica de Z_n, podendo as aplicações de Z_n em Z_n serem interpretadas como transformações do plano que aplicam o conjunto Ψ em Ψ. Logo recordando que Z_{12} não é mais do que o conjunto das 12 notas podemos dizer que as tranformações no espaço musical se podem interpretar geométricamente como transformações do plano que aplicam os vértices de um polígono regular de 12 lados neste mesmo conjunto sendo as 12 notas musicais os 12 vértices de um dodecágono regular como representa a seguinte figura.



O fato de ser possivel estabelecer uma correspondência entre os doze meios tons da escala cromática e os doze vértices de um dodecágono regular como acabamos de referir, permite analisar com precisão alguns processos de tranformação dos sons musicais que são habitualmente utilizados pelos compositores. Este método analítico reveste-se de particular importância pelo fato de alguns operadores que apresentaremos no próximo parágrafo serem fundamentais para a compreensão de diversos processos transformadores dos sons musicais, processos essses que foram utilizados em determinadas épocas da história da Música en alguns casos ainda são ferramentas imprescindíveis para a composição que é feita nos nossos dias.

4 Grupo Canónico de operadores no espaço musical e Transformações de Simetria

Debrucemo-nos então sobre Z_{12} na sua interpretação geométrica pelo conjunto de vértices de um dodecágono regular. É de notar que os seus subgrupos próprios, serão representados por polígonos regulares cujos vértices são subconjuntos de Ψ contendo o 0.

Sendo η uma transformação de simetria de um dodecágono regular, chamaremos η_{12} à restrição desta aplicação ao subconjunto Ψ constituido pelos vértices deste polígono.

No âmbito da estrutura "módulo 12", definida anteriormente, pode-se estabelecer um conjunto de operadores, que constituem a base de diversas transformações, aplicáveis a elementos pertencentes ao conjunto formado pelos doze meios-tons ou a seus subconjuntos. Iremos considerar os seguintes operadores, que, historicamente se tornaram mais importantes: a transposição, a inversão e a multiplicação.

Designemos por S o conjunto das 12 notas musicais.

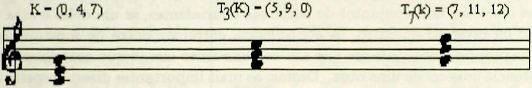
A transposição é uma aplicação de S em S, tal que, a cada nota musical s faz corresponder a nota musical $s+i$. Podemos ainda definir transposição de índice i de outra forma, como sendo uma aplicação que a cada nota musical s faz corresponder outra nota musical t tal que: $int(s,t) = i$. Se designarmos esta aplicação por T_i temos:

$$\begin{aligned} T_i : Z_{12} &\rightarrow Z_{12} \\ t &\mapsto t +_{12} i \end{aligned}$$

A aplicação $T_i (i \neq 0)$ é uma aplicação bijectiva mas não é um homomorfismo de grupos. De fato podemos ver que $T_i(p) +_{12} T_i(q) \neq T_i(p +_{12} q)$.

A aplicação T_i será representada geometricamente pela aplicação $(\rho^i)_{12}$. (Recordemos que como já definimos, ρ é a rotação de centro no centro do polígono, sentido negativo e amplitude 30^0.) Sendo Z_{12} o espaço musical das 12 notas esta aplicação transformará um subconjunto de notas em noutro subconjunto de notas mantendo os intervalos respectivos isto é, $int(m,n) = int(T_i(m), T_i(n))$.

Tomando, por exemplo, o conjunto $K = (0,4,7)$, correspondente ao acorde habitualmente chamado de dó maior, verifica-se que a sua transposição T_5 resulta no conjunto $(5,9,0)$ (acorde de fá maior), e T_7 resulta no conjunto $(7,11,2)$ (acorde de sol maior).



Fixando dois elementos u e v, pertencentes a S, a inversão $I_{u,v}(s)$ é a aplicação que a cada nota s faz corresponder a nota t, tal que:

$$int(v,t) = int(s,u)$$

Como tal dados dois elementos u e v de Z_{12} definimos a aplicação inversão $I_{u,v}$ como sendo a aplicação dada por:

$$\begin{aligned} I_{u,v} : Z_{12} &\to Z_{12} \\ t &\mapsto u +_{12} v -_{12} t \end{aligned}$$

Geometricamente esta aplicação será uma simetria axial cujo eixo de simetria é a reta que passa pelo centro da circunferência circunscrita ao polígono e pelo ponto médio do segmento de reta que une o ponto $U(= f(u))$ com $V(= f(v))$. Mais uma vez esta aplicação não é um homomorfismo de grupos mas é representada geometricamente por $(\rho^k\sigma)_{12}$ e considerando Z_{12} como sendo o espaço musical das 12 notas esta aplicação transformará um subconjunto de notas em noutro subconjunto de notas invertendo os respectivos intervalos isto é, se $int(m,n) = p$ então $int(I_{u,v}(m), I_{u,v}(n)) = -p \pmod{12}$.

Podemos afirmar que o conjunto formado pelas transposições e pelas inversões é um grupo, cuja representação geométrica será o grupo das transformações do plano que são restrições das transformações de simetria do polígono de 12 lados que estamos a considerar, ao subconjunto dos seus vértices. Este grupo atua no conjunto $P(Z_{12})$ constituindo um grupo G de transformações para este conjunto.

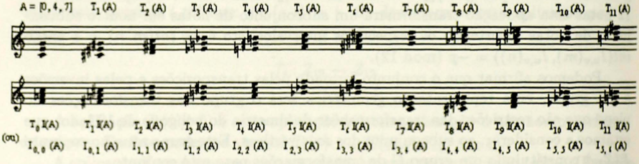
Dado um elemento X de $P(Z_{12})$ (isto é, X é um subconjunto de Z_{12}), a órbita deste elemento será o conjunto $O_X = \{Y \in P(Z_{12})$: existe um elemento f de G tal que $f(X) = Y\}$, e como já aqui referimos, dois subconjuntos de Z_{12} são equivalentes se pertencem à mesma órbita.

O cardinal do subgrupo de isotropia de um elemento X para esta ação chama-se grau de simetria de X. Como sabemos, o subgrupo de isotropia de X é dado pelo conjunto de elementos f de G tal que $f(X) = X$, sendo o número de elementos da órbita de X obtido, dividindo o cardinal de G, pelo grau de simetria do elemento X.

Como tal dentro do tipo de estrutura algébrica que usamos como modelo para os sons musicais, dois conjuntos de notas são equivalentes, se um deles é uma transposição ou inversão do outro. A equivalência entre conjuntos de sons diz respeito a certas propriedades musicais que são comuns entre eles, e que contribuem para a consistência musical de uma obra. Destas, as mais importantes dizem respeito ao seu conteúdo intervalar, que é idêntico, provocando uma semelhança auditiva entre eles. Ao determinarmos o grupo de operadores que forma um Grupo Canónico, estamos a definir qual o nível de equivalência possível entre conjuntos. No sistema que estamos a apresentar, os 24 operadores T_0, T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6, T_7, T_8, T_9, T_{10}, T_{11}, $I_{0,0}$, $I_{0,1}$, $I_{1,1}$, $I_{1,2}$, $I_{2,2}$, $I_{2,3}$, $I_{3,3}$, $I_{3,4}$, $I_{4,4}$, $I_{4,5}$, $I_{5,5}$, $I_{5,6}$, constituem um Grupo Canónico. Há outros sistemas que apenas consideram a transposição como operador canónico, e outros ainda, que incluem certas multiplicações, ou outras transformações.

Claro está, em qualquer contexto analítico, existem sempre razões que determinam quais os operadores pertencentes ao grupo canónico. Estas prendem-se com as características estruturais da música a ser analisada, e com a capacidade que o sistema proposto tem, para responder aos problemas analíticos levantados.

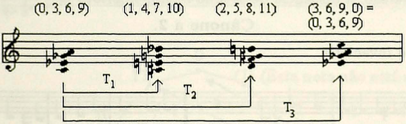
Apresenta-se seguidamente todos os conjuntos equivalentes ao conjunto [0, 4, 7], ou seja, que pertencem à mesma classe de equivalência, que no sistema musical tradicional é designada genericamente por "acordes perfeitos".



Embora cada conjunto tenha habitualmente 24 possibilidades de transformação, existem alguns que, devido à simetria do seu conteúdo intervalar, têm menos.

Por exemplo, o conjunto $[0, 3, 6, 9]$, tem apenas 3 possibilidades diferentes de transformação:

$T_0 = \{0, 3, 6, 9\}$	$T_0I = \{0, 3, 6, 9\}$
$T_1 = \{1, 4, 7, 10\}$	$T_1I = \{1, 4, 7, 10\}$
$T_2 = \{2, 5, 8, 11\}$	$T_2I = \{2, 5, 8, 11\}$
$T_3 = (3, 6, 9, 0) = \{0, 3, 6, 9\}$	$T_3I = (3, 6, 9, 0) = \{0, 3, 6, 9\}$
$T_4 = (4, 7, 10, 1) = \{1, 4, 7, 10\}$	$T_4I = (4, 7, 10, 1) = \{1, 4, 7, 10\}$
$T_5 = (5, 8, 11, 2) = \{2, 5, 8, 11\}$	$T_5I = (5, 8, 11, 2) = \{2, 5, 8, 11\}$
$T_6 = (6, 9, 0, 3) = \{0, 3, 6, 9\}$	$T_6I = (6, 9, 0, 3) = \{0, 3, 6, 9\}$
$T_7 = (7, 10, 1, 4) = \{1, 4, 7, 10\}$	$T_7I = (7, 10, 1, 4) = \{1, 4, 7, 10\}$
$T_8 = (8, 11, 2, 5) = \{2, 5, 8, 11\}$	$T_8I = (8, 11, 2, 5) = \{2, 5, 8, 11\}$
$T_9 = (9, 0, 3, 6) = \{0, 3, 6, 9\}$	$T_9I = (9, 0, 3, 6) = \{0, 3, 6, 9\}$
$T_{10} = (10, 1, 4, 7) = \{1, 4, 7, 10\}$	$T_{10}I = (10, 1, 4, 7) = \{1, 4, 7, 10\}$
$T_{11} = (11, 2, 5, 8) = \{2, 5, 8, 11\}$	$T_{11}I = (11, 2, 5, 8) = \{2, 5, 8, 11\}$



Existem outras transformações do plano que podem ser definidas à custa destas últimas. Por exemplo, fixando um elemento n de Z_{12} consideremos a aplicação definida por:

$$\begin{aligned} Mn : Z_{12} &\to Z_{12} \\ t &\mapsto t +_{12} t +_{12} \ldots +_{12} t \text{ (n vezes).} \end{aligned}$$

Naturalmente escrevemos também $M_n(t) = n \times t$ ou $M_n(t) = nt$.
A aplicação multiplicação M_n é um homomorfismo: $M_n(t) +_{12} M_n(s) = M_n(t +_{12} s)$. Determinemos para cada n o núcleo desta aplicação. Pela definição de núcleo podemos ver que ele é diferente de zero para todo o n diferente de 1 que tenha divisores comuns com 12 e podemos concluir que para $n = 1, 5, 7, 11$ a aplicação M_n é um

isomorfismo, sendo o conjunto $\{M_1, M_5, M_7, M_{11}\}$ um grupo para a composição de aplicações.

Pela definição de M_n podemos ver que para cada s em Z_{12}, $M_n(s) = T_s^{(n-1)}(s)$ e podemos interpretar geométricanente esta aplicação como sendo igual a $(\rho^s)_{12}^{n-1}$. Então geometricamente M_1 será ι_{12} e M_{11} será σ_{12}. M_7 será ι_{12} se s corresponde a um vértice par e será $(\rho^6\sigma)_{12}$ se s é representado por um vértice ímpar e M_5 será σ_{12} se s corresponde a um vértice par e será $(\rho^6)_{12}$ se s é representado por um vértice ímpar. Sendo assim, considerando o subconjunto dos números pares de Z_{12} (representado geometricamente pelos vértices do hexágono H_2) e o subconjunto dos números ímpares de Z_{12} (representado geometricamente pelos vértices do hexágono H_1) podemos ver que a restrição de M_5 ou M_7 a cada um destes subconjuntos representa-se geometricamente pela restrição de uma transformação de simetria de H_1 ou de H_2 ao subconjunto dos seus vértices.

Embora menos usado no início do século XX, este operador tornou-se bastante importante a partir da década de 50.

5 Alguns Exemplos Musicais

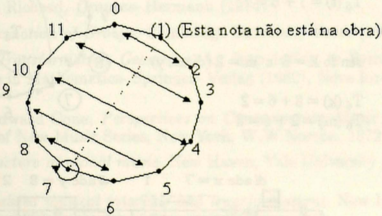
O exemplo musical que se segue é o Cânone a 2 "Quaerendo invenietis", da Musicalisches Opfer (Oferenda Musical) BWV 1079, de J. S. Bach, e consiste num cânone por inversão, à distância de sétima menor inferior.

Cânone a 2.

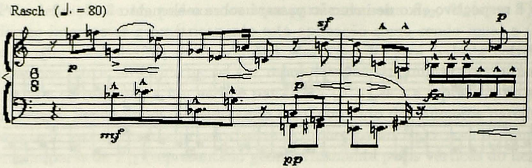
Quaerendo invenietis

Conforme se pode verificar na figura seguinte, a linha melódica inferior inverte rigorosamente todos os intervalos entre as notas da linha superior. Ao analisar esta relação o respectivo eixo de inversão passará sobre o elemento 7.

Seguidamente, apresentamos a coleção total das notas que são utilizadas neste cânone, nas suas alturas respectivas. (A voz superior está representada na pauta de cima e a voz inferior na de baixo). O eixo de inversão é igualmente assinalado. Estas relações são também representadas geométricamente num dodecágono.



O segundo exemplo, extraído do início do Prelúdio da Suite para Piano op. 25, de Schönberg, é um exemplo de como a transposição é utilizada para criar uma textura polifónica harmonicamente coerente, onde certas notas e intervalos estruturais são preservados.



O início desta obra baseia-se no contraponto entre duas linhas melódicas (assinaladas A e B na figura seguinte), sendo a linha melódica inferior (B), a transposição da superior (A) ao intervalo de quarta aumentada ($i = 6$). Existindo na linha melódica A, dois pares de notas (díades) assinaladas x e y, que produzem o intervalo de quarta aumentada, a sua transposição T_6 mantém as respectivas notas inalteradas, mas inverteu a sua ordem, conforme assinalado abaixo (díades x' e y'):

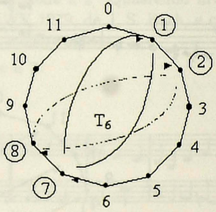
sendo $s = 7$ e $t = 1$ (díade x)

$T_6(s) = 7 + 6 = 1$

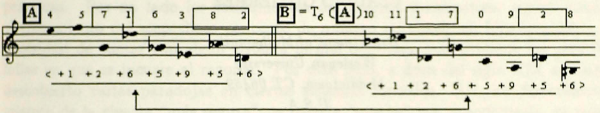
$T_6(t) = 1 + 6 = 7$

sendo $k = 8$ e $m = 2$ (díade y)

$T_6(k) = 8 + 6 = 2$
$T_6(m) = 2 + 6 = 8$



A preservação das notas e dos intervalos nas díades assinaladas, tem um papel importante na formatação do som inicial desta peça sendo uma caracteristica musical importante. Na figura que se segue, confirma-se a propriedade da preservação dos intervalos, após a aplicação do operador transposição. Assinala-se igualmente a invariância das díades acima referidas.



References

[1] J. P. Oliveira, *Teoria Analítica da música do séc. XX* , aceite para publicação pela Fundação Calouste Gulbenkian - Lisboa, Portugal

[2] H. Albuquerque, *Algumas definições Matemáticas*, Apêndice 1 de [1]

[3] Manuela Sobral, *Álgebra*, Universidade Aberta (1996)

[4] M. I. Kargapolov, Ju. I. Merzljakov, *Fundamentals of the Theory of Groups*, Graduate Texts in Mathematics (62)- Springer-Verlag, Nova Iorque *et. al.*

[5] Alain Bouvier, Denis Richard, *Groupes*- Hermann (1974)

[6] F.J.Budden,*The Fascination of Groups*, Cambridge University Press (1972)

[7] George E. Martin, *Transformation Geometry*. An Introdution to Symmetry Undergraduate Texts in Mathematics- Springer- Verlag (1982), Nova Iorque et al.

[8] Benjamim Boretz, Edward Cone, *Perspectives on Contemporary Music Theory*,The Perspectives of New Music Series, New York, W.W.Norton, 1972

[9] Allen Forte, *The structure of atonal music*, New Haven, Yale University Press, 1973

[10] David Lewin, *Generalized musical intervals and transformations*, New Haven, Yale University Press, 1987

[11] Robert Morris, *Composition with pitch-classes: a theory of compositional designs*, New Haven, Yale University Press, 1987

[12] Jonh Rahn, *Basic atonal theory*, New York: Longman Inc., 1980

[13] Charles Wuorinen, *Simple Composition*, New York: Longman, 1979