

## A Aurora da Mecânica Celeste

CLAUDIO VIDAL & HILDEBERTO CABRAL

*Departamento de Matemática, Universidade Federal de Pernambuco,*

*Av. Prof. Luiz Freire, s/n, Cidade Universitária, Recife-Pe, Brasil.*

*E-mail: claudio@dmat.ufpe.br, hild@dmat.ufpe.br*

### 1 Introdução

A Mecânica Celeste é uma área da matemática que estuda o movimento dos corpos celestes a partir das leis da mecânica, ou mais precisamente, a Mecânica Celeste é o corpo de conhecimentos resultantes de duas leis da natureza, a segunda lei da dinâmica e a lei da gravitação universal, ambas descobertas por Isaac Newton por volta dos anos 60 do século XVII. A segunda lei da dinâmica afirma que *A força que atua sobre uma partícula material é igual a taxa de variação de seu momento linear*, lembrando que o momento linear de uma partícula material é o produto de sua massa pela sua velocidade, temos que, se a massa não depende do tempo, a segunda lei de Newton tem o seguinte enunciado: *força é igual a massa vezes aceleração*. Por outro lado, a lei de gravitação universal afirma que: *No universo duas partículas materiais quaisquer atraem-se com uma força proporcional ao produto de suas massas e é inversamente proporcional ao quadrado da distância que as separa*. A constante de proporcionalidade, denotada pela letra  $G$ , é chamada de constante de gravitação universal.

Até o advento da teoria da relatividade o objetivo final da mecânica celeste era o de saber se a gravitação newtoniana explicaria, por si só, todos os fenômenos da astronomia dinâmica.

O objetivo final da Mecânica Celeste é o de resolver a importante questão de saber se as leis de Newton explicariam, por si só, todos os fenômenos astronômicos (Poincaré, [7]).

Mesmo desconsiderando os efeitos relativísticos, muitos dos quais podem ser explicados corrigindo-se a lei newtoniana do inverso do quadrado da distância pela adição de um termo proporcional ao inverso do cubo da distância, a mecânica celeste é um campo da ciência que tem-se mantido extremamente ativo, não só pelo seu aspecto prático relativo à Astronáutica mas, principalmente, por ser fonte perene de pesquisa em Matemática, à qual é um contínuo desafio e estimuladora da criação de novos métodos. Importante para esta atividade é o conteúdo filosófico da mecânica celeste, que atuou como fonte de inspiração no passado e encontra-se certamente longe de se esgotar. Este conteúdo é refletido em questões como a estabilidade do sistema solar e as teorias cosmogônicas. A primeira questão diz respeito a evolução futura no comportamento dinâmico do sistema solar e as segundas tratam de sua história passada, ou seja, a questão da sua formação e sua evolução até o estágio atual.

Uma das questões que mais preocupa aos pesquisadores é aquela da estabilidade do sistema solar. É conveniente dizer que ela é uma questão de cunho mais matemático que física. Se descobrissemos uma demonstração geral e rigorosa, poderíamos concluir que o sistema solar é eterno. Ele pode de fato estar sujeito a outras forças que aquela de Newton, e os astros não se reduziram mais, a uns pontos materiais. Muitas das causas poderiam dissipar pouco a pouco a energia do sistema; ... . Mais, todas estas causas de destruição agiriam muito mais lentamente que as perturbações, e se estas últimas não são mais capazes de alterar a estabilidade, ao sistema solar estaria assegurado uma existência muito mais longa. A questão da estabilidade conserva, portanto, sempre um grande interesse, (Poincaré, [6]).

O problema da estabilidade do sistema planetário vem desde os tempos de Lagrange e Laplace (1749-1827) que deram as primeiras demonstrações, incompletas, é verdade, como mostrou Poincaré ao provar a divergência das séries por eles utilizadas, mas que constituem as primeiras contribuições nesta importante questão. Para ver a atualidade do problema eis a referência que a ele faz J.K. Moser, quase um século depois da de Poincaré.

“O problema da estabilidade na Mecânica Celeste, isto é, a questão quanto a estabilidade de sistema solar, tem fascinado astrônomos e matemáticos por séculos” (Moser, [4]).

A Astronomia e a Matemática, no âmbito das quais se situa a Mecânica Celeste, são duas das ciências mais antigas da história da humanidade. No entanto, embora a observação dos movimentos planetários remonte a épocas imemoriais e seu estudo seja milenar, a Mecânica Celeste tem apenas trezentos anos de existência pois seu início é considerado como o ano de publicação do tratado de Newton, "Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica", em 1687. Nas palavras de Laplace:

Será então necessário demonstrar que o mesmo planeta, dentro de suas diversas distâncias ao sol, tende a aplicar ele reciprocamente aos quadrados, e que a tendência a este astro não varia de um planeta a outro que razão das distâncias. Esta demonstração, em tal caso muito difícil, ... vanamente testada pelos três geometras Edmund Halley, Christopher Wren e Robert Hooke que, juntamente com Newton, tentaram deduzir dos teoremas de Huygens a tendência dos planetas para o sol, recíproca ao quadrado de sua distância: aqui começa a Mecânica Celeste (Laplace, [2]).

Este ponto de vista pode parecer estranho uma vez que o próprio Newton considerava a ciência da mecânica uma área do conhecimento há muito tempo estabelecida, como mostram estas suas palavras:

Como os antigos (aprendemos com Pappus) consideravam a ciência da Mécânica como a de maior importância para a investigação do mundo natural, e como os modernos, rejeitando formas substanciais e qualidades ocultas, tem-se esforçado para submeter os fenômenos da natureza a leis da matemática, eu neste trabalho cultivei a matemática até os limites de sua relação com a filosofia (Newton, [5]).

Este artigo tem como objetivo, mostrar a alunos de iniciação científica, resultados simples e muito conhecidos da Mécânica Celeste numa linguagem matemática. O trabalho está dividido da seguinte forma: na seção 2 enunciamos as leis de Kepler e a lei da Gravitação Universal e mostramos algumas consequências destas leis desenvolvidas por Newton usando o cálculo. Na seção seguinte, enunciamos o problema dos dois corpos e logo reduzimos seu estudo a um problema de força central ou problema de Kepler. A seção 4 é dedicada a estudar o problema de Kepler, o qual nos permite obter todas as leis de Kepler. Continuando nosso estudo do problema de Kepler na seção 5, definimos os elementos orbitais e mostramos que eles são determinados pelas condições iniciais do problema. Na seção 6 caracterizamos a posição da partícula na órbita elíptica. Encerramos este trabalho com algumas aplicações simples do problema de Kepler.

## 2 As leis de Kepler e a lei de Gravitação Newtoniana

O Sistema Solar é formado por um conjunto de corpos materiais que estão em movimento contínuo: uma estrela, o Sol, em torno da qual giram todos os outros corpos (os planetas e seus satélites, os asteróides, os cometas e os meteoros).

Desde os tempos mais remotos o homem observou que algumas estrelas não tinham uma posição fixa no firmamento, mas moviam-se continuamente entre as estrelas fixas, exibindo uma periodicidade em seus movimentos. Chamou a estas estrelas de *planetas* que significa *estrelas errantes* e sempre procurou compreender os seus movimentos. As concepções mais antigas consideravam a Terra no centro do sistema com o Sol e os planetas girando uniformemente em círculos ao seu redor. A observação atenta do firmamento, ao longo dos tempos, revelou, no entanto, que os caminhos de alguns planetas na esfera celeste (Marte por exemplo) exibiam um movimento de retorno durante algum tempo para depois retomar seu curso regular. Esta observação era incompatível com a ideia de órbitas circulares e uniformes ao redor da Terra. Para contornar esta dificuldade, foi desenvolvido por Ptolomeu a teoria dos *epiciclos* descrita em seu livro o *Almagesto*. Nesta teoria, cada planeta descrevia uniformemente um círculo (apiciclo), cujo centro por sua vez, movia-se uniformemente sobre outro círculo (deferente) tendo a Terra como centro (veja figura 1). Para ver como esta teoria era razoável vamos fazer as seguintes considerações:

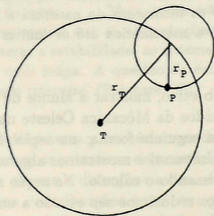


Figura 1: Teoria dos epiciclos

Sabemos, hoje, que os planetas giram em torno do Sol em órbitas aproximadamente elípticas de pequenas excentricidades. Imaginemos a Terra  $T$ , e um planeta  $P$ , como pontos materiais, movendo-se em um mesmo plano, em órbitas circulares



em torno do Sol com raios  $r_T$  e  $r_P$  e velocidades angulares constantes  $\omega_T$  e  $\omega_P$ , respectivamente.

Vemos pela construção geométrica (figura 2) que, visto da Terra, o planeta parece mover-se com velocidade angular  $\omega_T$  em um círculo de raio  $r_T$  cujo centro desloca-se com velocidade angular  $\omega_P$  sobre um círculo de raio  $r_P$  centrado na Terra. Tomemos, no plano do movimento do planeta, um sistema de coordenadas retangulares com origem em  $T$  e representemos os pontos deste plano por números complexos. Então, como

$$\mathbf{TP} = \mathbf{TS} + \mathbf{SP}$$

a posição do planeta  $P$  é representada por

$$z(t) = r_P e^{i\omega_P t} - r_T e^{i\omega_T t}. \quad (1)$$

No caso de marte, temos  $r_P \sim \frac{3}{2}r_T$  e  $\omega_T \sim 2\omega_P$  (ao longo deste trabalho o símbolo

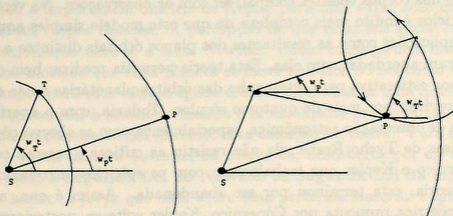


Figura 2: Movimento dos planetas

$\sim$  tem o significado de “muito próximo”), de modo que por (1)

$$\begin{aligned} z(t) - r_T &= \frac{3}{2}r_T e^{i\omega_P t} - r_T e^{i\omega_T t} - r_T \\ &= e^{i\omega_P t} \left( \frac{3}{2} - (e^{i\omega_P t} + e^{-i\omega_P t}) \right) r_T \\ &= r_T \left( \frac{3}{2} - 2 \cos \omega_P t \right) e^{i\omega_P t}, \end{aligned} \quad (2)$$

e, por conseguinte, com estas hipóteses simplificadoras, a órbita de marte é vista da Terra como a curva descrita pelo caminho  $z(t)$  definido em (2) que está desenhado na figura 3. Como, efetivamente, as órbitas dos planetas ao redor do Sol não são circulares e, também, nenhuma delas está no mesmo plano da órbita da Terra, os

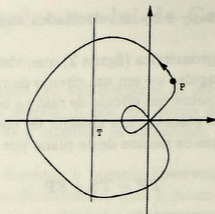


Figura 3: A curva  $z(t)$

epiciclos na forma descrita acima não são suficientes para dar uma explicação dos movimentos dos corpos celestes compatível com as observações. Na verdade, a teoria dos epiciclos é muito mais complexa do que este modelo simples aqui descrito e mesmo complicações como as resultantes dos planos orbitais distintos e órbitas não circulares eram abordadas com elas. Esta teoria permitia prever bem os eclipses e dava uma boa estimativa para o tamanho das órbitas planetárias e não é sem razão que ela sobreviveu por mais de quatorze séculos. Todavia, com o aperfeiçoamento das técnicas de observação astronômica, especialmente, com as observações extremamente precisas de Tycho Brahe, ela não resistiu as críticas e mesmo com pessoas como Cópernico e Kepler que trabalharam com os epiciclos introduzindo modificações na teoria, esta terminou por ser abandonada. Assim é que, aceitando a teoria heliocêntrica proposta por Cópernico, Kepler volta-se, posteriormente, para um estudo detalhado das órbitas dos planetas, especialmente de Marte (baseado nas observações de Tycho Brahe) consegue finalmente, em 1609, enunciar suas duas primeiras leis planetárias:

**1a. Lei de Kepler** *Os planetas movem-se em órbitas elípticas em torno do Sol, o qual ocupa um dos focos da elipse.*

**2a. Lei de Kepler** *O raio-vetor que liga o Sol ao planeta descreve áreas iguais em tempos iguais, isto é, a taxa de variação da área descrita pelo raio-vetor é constante.*

Estas duas leis referem-se aos planetas individualmente. Mas, fazendo um estudo comparativo das órbitas de vários planetas, Kepler chega, dez anos depois, a outra conclusão muito importante, desta vez uma lei que relaciona os diversos planetas e cujo enunciado é o seguinte:

**3a. Lei de Kepler** *Os quadrados dos períodos dos movimentos dos planetas estão*

*entre si assim como os cubos dos semi-eixos maiores de suas órbitas.*

Contemporâneo de Kepler, Galileo Galilei dedicou-se ao estudo da Mecânica e, rejeitando a doutrina Aristotélica sobre o movimento dos corpos, fundamentou todo o seu trabalho em bases experimentais juntamente com uma análise matemática dos fatos. Estabeleceu a **Lei da Inércia**, hoje conhecida como a **Primeira Lei de Newton**, a qual afirma que *um corpo sobre o qual não age força alguma está em repouso ou descreve um movimento retilíneo e uniforme.*

Apesar de dedicar-se ao estudo do movimento na superfície da Terra (lei da inércia, lei da queda livre dos corpos, etc.) Galileu tinha interesse no movimento dos corpos celestes como demonstra sua posição em defesa do sistema heliocêntrico e o seu grande interesse pelo telescópio, com o qual mostrou a existência dos quatro maiores satélites de Júpiter (hoje conhecidos como os satélites Galileanos de Júpiter) provando que existiam mundos em torno dos quais giravam outros mundos e reforçando, desta forma, a teoria heliocêntrica de Copérnico. Apesar disto, Galileu não percebeu a importância das leis de Kepler para uma explicação das causas do movimento dos corpos celestes. A percepção de que estas leis encerravam a chave para esta explicação deve-se a Isaac Newton. Como consequência das leis de Kepler, Newton mostrou que cada planeta se move ao redor do Sol como se uma força dirigida sempre para esta estrela agisse sobre o planeta com uma intensidade diretamente proporcional à massa do mesmo e inversamente proporcional ao quadrado da distância do planeta ao Sol (faremos esta dedução em breve). Para chegar a esta conclusão Newton utilizou outra lei da Mecânica, descoberta por ele e que hoje é conhecida como a **Segunda Lei de Newton** ou **Segunda Lei da Dinâmica** que se enuncia assim: *a força que atua sobre uma partícula material é igual à taxa de variação de seu momento linear.* O momento linear de uma partícula material é o produto de sua massa pela sua velocidade; assim, quando a massa não depende do tempo, a segunda lei da dinâmica tem um enunciado mais conhecido, a saber, *força é igual a massa vezes aceleração.*

Um resultado geométrico necessário nesta dedução é a caracterização das seções cônicas por Apolonio de Perga, no Século III, e que diz o seguinte: *Uma curva plana, não circular, é uma seção cônica se, e somente se, seus pontos P são caracterizados pela seguinte equação envolvendo distâncias*

$$\text{dist}(P, F) = \epsilon \text{ dist}(P, L), \quad (3)$$

onde  $\epsilon$  é um número positivo,  $F$  é um ponto e  $L$  é uma reta, ambos no plano da curva (veja figura 4).

O ponto  $F$  é o *foco*, a reta  $L$ , a *diretriz* e o número  $\epsilon$  a *excentricidade* da cônica. Esta é uma *elipse*, uma *parábola* ou uma *hipérbole*, conforme seja  $\epsilon < 1$ ,  $\epsilon = 1$  ou

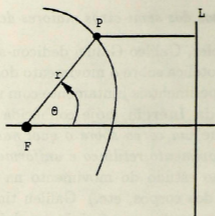


Figura 4: A cônica em coordenadas polares

$\epsilon > 1$ . Tomando um sistema de coordenadas polares  $(r, \theta)$  com a origem no foco  $F$ , tendo por eixo polar a reta diretriz  $L$ , e denotando por  $d$  a distância do foco à diretriz, a equação (3) pode ser re-escrita na forma  $r = \epsilon (d - r \cos \theta)$  ou,

$$r = \frac{p}{1 + \epsilon \cos \theta},$$

onde  $p = \epsilon d$  é chamado o *parâmetro* da cônica.

Apesar de ser um dos fundadores do Cálculo Infinitesimal, tendo-o criado, provavelmente, para utilizá-lo em seus estudos sobre a Mecânica, Newton ao escrever seu livro "**Princípios Matemáticos da Filosofia Natural**" baseou todos os seus argumentos em teoremas da geometria clássica e em argumentos "ad hoc" sobre idéias do Cálculo. Seus sucessores no estudo da Mecânica, todavia, como Euler, Lagrange e Laplace já desenvolveram seus trabalhos utilizando amplamente o Cálculo.

Vejamos, utilizando o Cálculo, como, com base nas leis de Kepler, Newton chegou à conclusão sobre a forma como os planetas são atraídos pelo Sol.

**Teorema 1** *Se uma partícula  $P$  move-se em um plano, em torno de um ponto  $S$ , de forma tal que a taxa de variação da área descrita pelo raio-vetor que liga  $S$  a  $P$  seja constante (lei das áreas), então a aceleração da partícula está dirigida ao longo da reta que passa por  $S$  e  $P$ .*

**Demonstração.** Tomemos no plano do movimento de  $P$  um sistema de coordenadas cartesianas com origem no ponto  $S$  e introduzamos coordenadas polares  $(r, \theta)$  com o eixo polar coincidindo com o eixo das abscissas e um foco na origem. Então, o vetor-posição da partícula  $\mathbf{r}$  é dado por  $\mathbf{r} = r (\cos \theta, \sin \theta)$ . Daí, obtemos a velocidade,  $\dot{\mathbf{r}} = \dot{r} (\cos \theta, \sin \theta) + r \dot{\theta} (-\sin \theta, \cos \theta)$  e a aceleração, por

$$\ddot{\mathbf{r}} = (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2)(\cos \theta, \sin \theta) + (r \ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})(-\sin \theta, \cos \theta). \quad (4)$$



Agora, a área da região descrita pelo raio-vetor entre os instantes  $t_0$  e  $t$  é dada por

$$A(t) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^t r^2 \dot{\theta} dt,$$

de modo que  $\dot{A}(t) = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta}$ . Por hipótese, a taxa de variação,  $\dot{A}(t)$ , é constante, logo,  $2\dot{A}(t) = r(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = 0$ . Como  $r \neq 0$ , o segundo fator é nulo, o que significa que a segunda componente de  $\ddot{\mathbf{r}}$  é nula, assim de (4),

$$\ddot{\mathbf{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) (\cos \theta, \sin \theta),$$

provando que a aceleração,  $\ddot{\mathbf{r}}$ , tem a mesma direção do vetor-posição,  $\mathbf{r}$ , o que demonstra o teorema. ■

**Teorema 2** *Se uma partícula move-se em um plano em torno de um ponto  $S$  obedecendo à lei das áreas (Teorema 1) e se sua órbita é uma cônica com foco em  $S$ , então a sua aceleração é dirigida de  $P$  para  $S$  e tem intensidade inversamente proporcional ao quadrado da distância que a separa do ponto  $S$ .*

**Demonstração.** Como o movimento obedece à lei das áreas, vimos na demonstração do teorema anterior que a aceleração da partícula com vetor-posição  $\mathbf{r} = r(\cos \theta, \sin \theta)$  é dada por  $\ddot{\mathbf{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) (\cos \theta, \sin \theta)$ . Por outro lado, como a órbita é uma cônica com foco  $S$ , nas coordenadas polares utilizadas sua equação é  $r = \frac{p}{1 + \epsilon \cos \theta}$ , donde obtemos

$$\dot{r} = \frac{p\epsilon \sin \theta}{(1 + \epsilon \cos \theta)^2} \dot{\theta} = \frac{1}{p} (r^2 \dot{\theta}) \epsilon \sin \theta,$$

logo, derivando novamente e levando em conta que  $r^2 \dot{\theta}$  é constante, resulta

$$\begin{aligned} \ddot{r} &= (r^2 \dot{\theta}^2) \frac{\epsilon}{p} \cos \theta = \frac{1}{p} (r \dot{\theta}^2) r \epsilon \cos \theta \\ &= \frac{1}{p} (r \dot{\theta}^2) (p - r) = r \dot{\theta}^2 - \frac{1}{p} r^2 \dot{\theta}^2, \end{aligned} \quad (5)$$

por conseguinte, usando a equação  $r^2 \dot{\theta} = 2k$ , onde  $k$  é a constante das áreas,  $\dot{A}(t) = k$ , obtemos

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu}{r^2} (\cos \theta, \sin \theta),$$

onde  $\mu = \frac{4k^2}{p}$ . Vemos daí que a aceleração,  $\ddot{\mathbf{r}}$ , está dirigida de  $P$  para  $S$  e que a sua intensidade é inversamente proporcional ao quadrado da distância de  $P$  a  $S$ . ■

O parâmetro da órbita,  $p$ , e a constante das áreas,  $k$ , dependem da órbita do planeta em consideração de modo que, em princípio, a constante  $\mu = \frac{4k^2}{p}$  varia de planeta para planeta. Que este não é o caso, é uma consequência da terceira lei de Kepler, como mostra o seguinte teorema.

**Teorema 3** *Sejam  $P$  o período e  $a$  o semi-eixo maior da órbita elíptica com parâmetro  $p$  e constante das áreas  $k$ . Então,*

$$\frac{P^2}{a^3} = 4\pi^2 \frac{p}{4k^2}.$$

**Demonstração.** Como  $\dot{A}(t) = k$ , a área da elipse descrita pelo raio-vetor é igual a  $kP$ . Mas, se a elipse tem semi-eixos  $a$  e  $b = a\sqrt{1-\epsilon^2}$ , sua área é dada por  $\pi ab = \pi a^2\sqrt{1-\epsilon^2}$  donde igualando as duas expressões para esta área e quadrando a igualdade resultante, obtemos  $k^2P^2 = \pi^2a^4(1-\epsilon^2)$ , ou seja,

$$\frac{P^2}{a^3} = \frac{\pi^2a(1-\epsilon^2)}{k^2}.$$

Da equação polar da órbita cônica,  $r = \frac{p}{1+\epsilon\cos\theta}$ , obtemos para o eixo maior da elipse o valor

$$2a = \frac{p}{1+\epsilon} + \frac{p}{1-\epsilon} = \frac{2p}{1-\epsilon^2},$$

de onde resulta a seguinte expressão para o parâmetro  $p$ ,

$$p = a(1-\epsilon^2).$$

Em virtude desta expressão a igualdade acima para o quociente  $\frac{P^2}{a^3}$  se reduz à do enunciado do teorema que fica, assim, estabelecido. ■

Como um planeta move-se ao longo de uma órbita não-retilínea segue-se da primeira lei de Newton (lei da inércia) que sobre ele atua uma força e como consequência das leis de Kepler vimos que esta força está dirigida para o Sol tendo uma intensidade diretamente proporcional a sua massa e inversamente proporcional ao quadrado da distância que o separa do Sol ou, nas palavras de Laplace, observando, como Newton, que as leis de Kepler também valem para as órbitas dos cometas "*somos, assim, induzidos pelas belas leis de Kepler a considerar o centro do Sol como o foco de uma força que se estende infinitamente em todas as direções decrescendo na razão do quadrado da distância*".

Newton examinou planetas com sistemas de vários satélites, como Júpiter e Saturno, observando que a terceira lei de Kepler também valia para as órbitas dos diversos satélites em torno do planeta o que lhe permitiu concluir, com base no

movimento circular uniforme, que o planeta exerce sobre seus satélites uma força de atração para o seu centro inversamente proporcional ao quadrado da distância que o separa do satélite.

O argumento é o seguinte: se  $a$  e  $a'$  são os semi-eixos das órbitas de dois satélites em torno do planeta e  $P$ ,  $P'$  seus períodos, então temos  $\frac{P^2}{a^3} = \frac{P'^2}{a'^3}$ . Por outro lado se, num certo instante, a força sobre o satélite cessasse de existir este se moveria, a partir deste instante, ao longo da tangente à trajetória curvilínea que vinha sendo descrita. Após um intervalo de tempo igual à unidade, o satélite teria se movido ao longo da tangente tendo sofrido um acréscimo em sua distância ocorre para um segundo satélite, com  $F' = \frac{2\pi a'^2}{P'^2}$ . Assim,

$$\frac{F}{F'} = \frac{\frac{a}{P^2}}{\frac{a'}{P'^2}} = \frac{\frac{1}{a^2}}{\frac{1}{a'^2}} = \frac{a'^2}{a^2},$$

mostrando que a força que o planeta exerce sobre um satélite decresce com o quadrado da distância a este. Para um planeta com um só satélite, como é o caso da Terra, esta conclusão teria que ser tirada a partir da elipticidade da órbita. No caso da Terra, no entanto, isto não seria indicado em virtude da perturbação no movimento da Lua. Assim, Newton fez um estudo comparativo do movimento da Lua com o de projéteis na superfície da Terra, utilizando em sua análise o movimento pendular. Concluiu que a Terra atrai a Lua em conformidade com a mesma lei.

Utilizando sua terceira lei (a Lei da Ação e Reação) concluiu que assim como o Sol atrai os planetas para o seu centro estes atraem o Sol com a mesma intensidade, o mesmo sendo válido em relação aos planetas e seus satélites. Além disso, observou que a força atratora do Sol não é sobre o agregado das partículas do planeta mas sobre cada partícula do mesmo, do contrário a configuração do planeta não poderia ser mantida estável.

Depois de muitas considerações Newton chegou, finalmente, à conclusão de que é uma lei geral da Natureza aquela a que chamou de Lei da Gravitação Universal e cujo enunciado pode ser posto nos seguintes termos:

**Lei da Gravitação Universal** *No Universo, duas partículas materiais quaisquer se atraem com uma força cuja intensidade é diretamente proporcional ao produto de suas massas e inversamente proporcional ao quadrado da distância que as separa. A constante de proporcionalidade, denotada pela letra  $G$ , é chamada de constante da gravitação universal.*

**Observação.** Na formulação das leis da Mecânica Newtoniana admite-se que as partículas estão referidas a um sistema inercial de coordenadas, isto é, um sistema cuja origem é fixa ou se desloca em linha reta com velocidade constante e no qual

os eixos não executam nenhum movimento de rotação. Tais sistemas rigorosamente não existem, mas dentro de certos limites podemos admiti-los; por exemplo, utiliza-se um sistema ortogonal em que a origem é o centro do Sol, um eixo é perpendicular ao plano da órbita da Terra e os outros dois, neste plano, com um deles dirigido para uma certa estrela fixa. Ora, as estrelas não são fixas, o plano da órbita da Terra não é invariável e o Sol move-se em torno do centro da Galáxia, de modo que este sistema não é inercial, mas como a escala de tempo para estas variações é muito grande, durante um pequeno intervalo de tempo podemos considerá-lo como tal.

Outro resultado provado por Newton é o seguinte:

**Teorema 4** *Uma esfera cuja massa está distribuída homoganeamente em camadas esféricas concêntricas atrai uma partícula material situada fora dela como se toda a massa da esfera estivesse concentrada em seu centro.*

**Demonstração.** Sejam  $R$  o raio da esfera e  $\sigma$  a sua densidade de massa. Sejam  $m'$  a massa de uma partícula situada a uma distância  $a > R$  do centro da esfera. Primeiro, observemos que a esfera atrai a partícula para o seu centro. De fato, supondo a partícula sobre o eixo dos  $z$  segue-se, por simetria, que as componentes horizontais das forças sobre  $m'$  devidas aos elementos de massa  $dm = \sigma dx dy dz$  da esfera se cancelam e, por conseguinte, a força de atração,  $F$  da esfera sobre  $m'$  é a resultante das componentes verticais, logo,  $F$  é uma força dirigida para o centro da esfera.

Para calcular a intensidade,  $F$ , da força, observemos que

$$F = \iiint \frac{\cos \alpha Gm' dm}{\rho^2},$$

onde  $\rho = \rho(x, y, z)$  é a distância de  $m'$  ao elemento de massa  $dm$  e  $\alpha$  é o ângulo entre a força que  $dm$  exerce sobre  $m'$  e o eixo dos  $z$ .

Usando coordenadas esféricas  $(r, \theta, \phi)$ , temos

$$dm = \sigma r^2 \cos \phi dr d\theta d\phi, \quad \cos \alpha = \frac{a - r \sin \phi}{\rho}, \quad \rho^2 = a^2 + r^2 - 2ar \sin \phi.$$

A homogeneidade por camadas esféricas concêntricas significa que  $\sigma = \sigma(r)$ . Efetuando a integração, obtemos

$$F = Gm' 2\pi \int_0^R \sigma(r)r^2 \left\{ \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos \phi (a - r \sin \phi)}{[a^2 + r^2 - 2ar \sin \phi]^{3/2}} d\phi \right\} dr.$$

Calculando a integral que está entre as chaves, obtemos para seu valor o número  $2/a^2$ , de modo que

$$F = \frac{Gm'}{a^2} \left\{ 4\pi \int_0^R \sigma(r)r^2 dr \right\}.$$



A expressão dentro dos colchetes é, precisamente, a massa  $M$  da esfera e, assim, resulta que

$$F = \frac{Gm'M}{a^2}$$

o que demonstra o teorema. ■

Por este teorema duas esferas homogêneas e disjuntas se atraem como se fossem partículas materiais de massas correspondentemente iguais as das esferas e localizadas nos respectivos centros.

Assim, a dinâmica gravitacional de um sistema de corpos esféricos homogêneos é a mesma que a de um sistema de partículas materiais localizadas nos centros das esferas com as massas correspondentemente iguais as destas; isto, naturalmente, enquanto as distâncias forem tais que não haja contato entre as esferas. Este fato é o que permite a aplicação da teoria ao sistema Solar, uma vez que as distâncias entre os planetas, bem como entre estes e o Sol são muito grandes e estes corpos são, aproximadamente, esféricos e homogêneos.

No caso de um satélite orbitando próximo a um planeta que apresenta uma forma esférica com achatamento, a força de atração sobre o satélite já não está dirigida para o centro do planeta e isto tem que ser levado em consideração no estudo da dinâmica do satélite.

### 3 O problema dos dois corpos

#### 3.1 Formulação do problema

O problema dos dois corpos <sup>1</sup> consiste em estudar a dinâmica ou o movimento de duas partículas materiais,  $S$  de massa  $m_1$  e  $T$  de massa  $m_2$ , com vetores posição  $\mathbf{r}_1$  e  $\mathbf{r}_2$  respectivamente num sistema inercial de  $\mathbb{R}^3$ , sujeitas unicamente a ação mútua de suas atrações gravitacionais (a figura 5a mostra a interpretação geométrica deste

<sup>1</sup>O problema fundamental da mecânica celeste é o problema dos  $n$ -corpos, o qual consiste em dar informações sobre o movimento de  $n$  partículas materiais, submetidas unicamente a ação de suas atrações gravitacionais. Se  $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n$  denotam os vetores posição das partículas de massas  $m_1, \dots, m_n$  respectivamente, o problema consiste em se resolver o sistema de equações diferenciais de segunda ordem

$$m_i \mathbf{r}_i'' = - \sum_{j \neq i} G \frac{m_i m_j}{r_{ij}^3} (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j), \quad i = 1, \dots, n,$$

veja [9].

problema). Isto é, pela segunda lei da dinâmica temos,

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 &= -\frac{Gm_1 m_2}{\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|^2} \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|} \\ m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 &= -\frac{Gm_1 m_2}{\|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\|^2} \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{\|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\|} \end{aligned} \quad (6)$$

aqui  $(\cdot)$  denotará a derivada com respeito à variável tempo  $t$ , ou seja, se  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) \in \mathbb{R}^3$  é o vetor posição então  $\dot{\mathbf{r}}$  é o vetor velocidade e  $\ddot{\mathbf{r}}$  é o vetor aceleração da partícula. De (6) segue-se que,

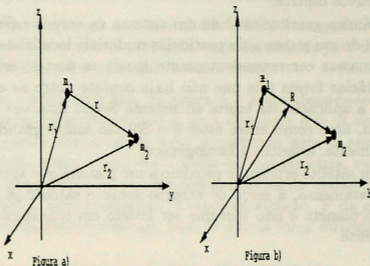


Figura 5: a) O problema dos dois corpos e b) O centro de massa

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 + m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = 0.$$

Integrando duas vezes esta expressão, obtemos

$$m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 = \mathbf{A}t + \mathbf{B}, \quad (7)$$

onde  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  são vetores constantes dependendo unicamente das condições iniciais do problema. Seja  $\mathbf{R}$  (como em figura 5b) o ponto cujo vetor posição é o vetor *centro de massa* entre  $m_1$  e  $m_2$ , isto é,

$$\mathbf{R} = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{M}, \quad \text{onde } M = m_1 + m_2,$$

assim de (7) temos

$$\mathbf{R} = \frac{\mathbf{A}}{M}t + \frac{\mathbf{B}}{M}$$

de onde resulta que o centro de massa das partículas materiais move-se uniformemente sobre uma reta no espaço. Note que  $\mathbf{A} = m_1 \dot{\mathbf{r}}_1 + m_2 \dot{\mathbf{r}}_2$ .

### 3.2 Movimento relativo

Os movimentos de  $m_1$  e  $m_2$  relativos ao centro de massa são dados da seguinte forma. Sejam

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{R} + \mathbf{r}_1 \quad \text{e} \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{R} + \mathbf{r}_2 \quad (8)$$

logo,  $\mathbf{r}_1$  e  $\mathbf{r}_2$  denotam respectivamente os vetores posição de  $m_1$  e  $m_2$ , com respeito ao centro de massa dos dois corpos, conforme é mostrado na figura 6.

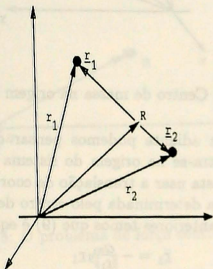


Figura 6: O movimento relativo

Sendo  $\ddot{\mathbf{R}} = 0$ , temos

$$\ddot{\mathbf{r}}_1 = \ddot{\mathbf{r}}_1 \quad \text{e} \quad \ddot{\mathbf{r}}_2 = \ddot{\mathbf{r}}_2.$$

Portanto, o sistema (6) pode ser re-escrito como

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = -\frac{Gm_1 m_2}{\|\mathbf{r}\|^3} (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \quad (9)$$

$$m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = -\frac{Gm_1 m_2}{\|\mathbf{r}\|^3} (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1).$$

onde,  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$  em virtude de (8) (veja figura 5a) Mas,  $m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 = 0$ , de onde temos as relações,

$$\mathbf{r}_1 = -\frac{m_2}{m_1} \mathbf{r}_2, \quad \mathbf{r}_2 = -\frac{m_1}{m_2} \mathbf{r}_1 \quad (10)$$

$$\mathbf{r} = -\frac{M}{m_2} \mathbf{r}_1, \quad \mathbf{r} = \frac{M}{m_1} \mathbf{r}_2.$$

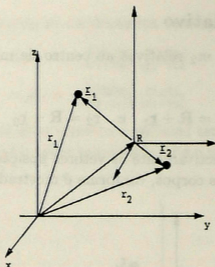


Figura 7: Centro de massa na origem do sistema

Portanto, de agora em diante podemos pensar que o centro de massa das partículas materiais encontra-se na origem do sistema (como é mostrado na figura 7), em caso contrário basta usar a translação de coordenadas definida em (8), ou seja, movermos sobre a reta determinada pelo centro de massa.

Usando as identidades anteriores temos que (9) é equivalente ao sistema

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{r}}_1 &= -\frac{G\kappa_1}{\|\mathbf{r}_1\|^3}\mathbf{r}_1 \\ \ddot{\mathbf{r}}_2 &= -\frac{G\kappa_2}{\|\mathbf{r}_2\|^3}\mathbf{r}_2.\end{aligned}\quad (11)$$

onde  $\kappa_1 = \frac{m_1^3}{M^2}$  e  $\kappa_2 = \frac{m_2^3}{M^2}$ .

A primeira destas equações descreve o movimento de  $\mathbf{r}_1$  e a segunda descreve o movimento de  $\mathbf{r}_2$ , ambos em torno do centro de massa do sistema. É importante observar que no sistema de equações acima, ambas as equações são independentes, portanto, basta determinar a solução de uma delas, já que por (10) teremos a dinâmica do outro. Uma outra forma de estudar o sistema (11) é usar o vetor  $\mathbf{r}$  definido anteriormente, assim este sistema é equivalente a

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{G\kappa}{\|\mathbf{r}\|^3}\mathbf{r}\quad (12)$$

onde  $\kappa = \kappa_1 + \kappa_2$ .

Desta forma somos levados a estudar o movimento de uma partícula  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$  no espaço que é atraída para a origem segundo a equação de Newton (12). Este problema da mecânica é conhecido como *problema de Kepler* ou *problema de força central*.



Mais precisamente o problema de força central consiste no estudo do movimento de uma partícula  $P$  de massa  $m_2$  que é atraída por uma outra  $S$  de massa  $m_1$ , a qual supõem-se que esta situada num ponto fixo do espaço, o qual pode ser tomado como a origem de um sistema de coordenadas inercial. Este modelo corresponde a um modelo simplificado para o movimento de cada planeta. Em conclusão, o estudo da dinâmica do problema de dois corpos reduz-se ao estudo de um problema de força central (a figura 8 mostra o problema de força central).

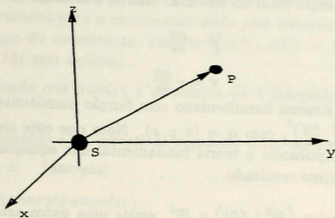


Figura 8: O problema de força central

Como veremos mais adiante as soluções de (12) são cônicas. Das equações (10) segue-se que a órbita de  $r$  (de  $P$  em torno de  $S$ ) é do mesmo tipo de  $\underline{r}_1$  e de  $\underline{r}_2$  (de  $P$  em torno do centro de massa definido por  $P$  e  $S$ ).

Em nossos estudos podemos pensar  $m_1$  como o sol e  $m_2$  um dos planetas, ou  $m_1$  a terra e  $m_2$  um satélite.

### 3.3 Formulação hamiltoniana

Uma área muito importante no estudo de problemas da Mecânica Celeste é Sistemas Hamiltonianos (veja por exemplo [3]), para ilustrar parte da importância desta área, nesta seção veremos a formulação hamiltoniana do problema de Kepler, e enunciaremos um importante resultado de equações diferenciais ordinárias que afirma que o sistema (12) sempre tem solução desde que a posição inicial não seja a origem.

O espaço das possíveis posições do problema de Kepler é  $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ , denotaremos  $G_K$  por  $\mu$ . Se introduzimos a variável  $v = \dot{r} \in \mathbb{R}^3$ , podemos escrever (12) como o

seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{r}} &= \mathbf{v} \\ \dot{\mathbf{v}} &= -\frac{\mu}{\|\mathbf{r}\|^3} \mathbf{r}.\end{aligned}\tag{13}$$

Definamos a seguinte função

$$H = H(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{v}\|^2 - \frac{\mu}{\|\mathbf{r}\|},$$

que corresponde a energia total do sistema. Assim, o sistema (13) pode ser escrito da seguinte forma

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{r}} &= \frac{\partial H}{\partial \mathbf{v}} \\ \dot{\mathbf{v}} &= -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}},\end{aligned}\tag{14}$$

o qual é chamado de sistema hamiltoniano com função hamiltoniana  $H$ , com a notação:  $\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} = \left( \frac{\partial H}{\partial x}, \frac{\partial H}{\partial y}, \frac{\partial H}{\partial z} \right)^t$ , com  $\mathbf{q} = (x, y, z)$ . Note que este sistema possui três graus de liberdade. Aplicando a teoria fundamental das equações diferenciais ordinárias, temos o seguinte resultado.

**Teorema** Dado  $(\mathbf{r}_0, \dot{\mathbf{r}}_0) \in (\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}^3$ , existe uma única solução  $\mathbf{r}(t)$  de (14) definida em um intervalo máximo  $t_*^- < t < t_*^+$ , contendo  $t = 0$ , com condições iniciais  $\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0$ ,  $\dot{\mathbf{r}}(0) = \dot{\mathbf{r}}_0$ . Além disso, todas as componentes de  $\mathbf{r}(t)$  são funções analíticas de  $t$ , e das coordenadas  $\mathbf{r}_0$  e  $\dot{\mathbf{r}}_0$ .

Para uma demonstração deste teorema veja por exemplo [8].

Uma outra importante observação é a definição seguinte: um (ou ambos) dos extremos do intervalo máximo de definição da solução pode ser infinito. Quando um deles é finito, digamos,  $t_* = t_*^- > -\infty$ , dizemos que a solução experimenta uma singularidade em  $t_*$ .

Suponha que  $\mathbf{r}(t)$  tem uma singularidade em  $t_*$ ; esta singularidade é chamada uma singularidade de colisão se  $\mathbf{r}(t) \rightarrow 0$ , quando  $t \rightarrow t_*$ . (o 0 representa o conjunto onde o potencial do problema dos dois corpos não está definido). Em caso contrário, a singularidade é chamada singularidade sem colisão ou uma pseudocolisão.

A questão da existência de singularidades sem colisão proposto por Poincaré e Painlevé tem sido um problema aberto por mais de um século. Para o problema de três corpos Painlevé (1897) (ver por exemplo [1]) mostrou que todas as singularidades são devidas a colisão. Xia na sua tese de doutorado em [10] provou a existência de singularidades sem colisão num problema de 5-corpos; modificações de seu argumento permitem mostrar que tal comportamento existe no problema de  $n$ -corpos para  $n > 5$ . Esta questão ainda permanece aberta para o caso  $n = 4$ .

## 4 Estudo do problema de Kepler

Seja uma partícula material  $P$ , de vetor posição  $\mathbf{r}$  atraída para um centro fixo  $S$ , então como já vimos na seção 3.2, ele obedece à equação diferencial

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu}{\|\mathbf{r}\|^3}\mathbf{r}, \quad \text{com } \mu > 0. \quad (15)$$

Um conceito muito importante, o qual permite-nos reduzir o número de graus de liberdade é o seguinte:

**Definição 1** Uma função diferenciável  $F : M \rightarrow \mathbb{R}$ , (onde  $M \subset (\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}^3$ ), é uma integral primeira para o movimento dado pelo sistema (15) se esta função é constante ao longo do movimento, isto é,  $\frac{dF}{dt}(\mathbf{r}(t), \dot{\mathbf{r}}(t)) = 0$  para todo  $t$  onde a solução  $\mathbf{r}(t)$  de (15) esta definida.

O primeiro resultado que mostra a existência de 4 integrais primeiras é dado no seguinte teorema

**Teorema 5** A equação (15) admite as seguintes integrais primeiras:

- a)  $\frac{1}{2}\|\dot{\mathbf{r}}\|^2 - \frac{\mu}{\|\mathbf{r}\|} = h$ , (energia)  
 b)  $\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{C}$  (momento angular).

**Demonstração.** Derivando a relação a) e analogamente b), e usando equação (15) temos que  $\dot{h} = 0$  e  $\dot{\mathbf{C}} = 0$ . ■

Outras três integrais adicionais são dadas pelo vetor  $\mathbf{e}$  chamado vetor de Laplace,

**Teorema 6** Existe uma integral adicional dada pelo vetor de Laplace e definido pela equação

$$\mu \left( \mathbf{e} + \frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|} \right) = \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{C}. \quad (16)$$

**Demonstração.** Derivando  $\frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|}$  e usando a identidade vetorial  $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{a}$ , com  $\mathbf{a} = \mathbf{c} = \mathbf{r}$  e  $\mathbf{b} = \dot{\mathbf{r}}$ , segue-se que

$$\left( \frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|} \right)' = \frac{\mathbf{C} \times \mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|^3},$$

logo

$$\left( \mu \frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|} \right)' = (\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{C})'$$

e por integração, obtemos o resultado desejado. ■

Um primeiro resultado que nos dá informação acerca do movimento do problema de Kepler é dado no seguinte corolário.

**Corolário 1** a) Se  $C = 0$ , o movimento é retilíneo.

b) Se  $C \neq 0$ , o movimento ocorre num plano ortogonal a  $C$  que passa pelo centro de atração  $S$  e o vetor  $e$  está contido neste plano.

bi) Se  $e = 0$ , o movimento é circular e uniforme.

bii) Se  $e \neq 0$ , o movimento descreve uma cônica com um foco em  $S$ , eixo  $e$  e excentricidade  $\epsilon = |e|$ .

**Demonstração.** a) Se  $C = 0$ , segue-se por (16) que  $\frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|} = -\mathbf{e}$ , ou  $\mathbf{r}(t) = -\|\mathbf{r}(t)\|\mathbf{e}$ , de onde segue-se que o movimento é retilíneo, cujo vetor diretor é o vetor de Laplace.

b) Se  $C \neq 0$ , temos por definição que  $C$  é ortogonal a  $\mathbf{r}$ , logo  $\mathbf{r}$  pertence ao plano determinado por  $C$  e que passa pela origem. Por outro lado, da equação (16) temos

$$\mu \mathbf{e} = \dot{\mathbf{r}} \times C - \frac{\mu \mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|},$$

fazendo o produto escalar desta expressão com o vetor  $C$ , tem-se  $\mathbf{e} \cdot C = 0$ , ou seja,  $e$  é ortogonal ao vetor  $C$ .

Para provar bi) e bii), usaremos a identidade obtida fazendo o produto interno da relação (16) com o vetor  $\mathbf{r}$ , isto é

$$\mu(\mathbf{r} \cdot \mathbf{e} + \|\mathbf{r}\|) = (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) \cdot C = C \cdot C = \|C\|^2. \quad (17)$$

Portanto, se  $e = 0$  obtemos que

$$\|\mathbf{r}\| = \frac{\|C\|^2}{\mu}$$

isto é, o movimento é circular e da conservação da energia tem-se

$$\|\dot{\mathbf{r}}\|^2 = 2 \left( h + \frac{\mu}{\|\mathbf{r}\|} \right) = 2 \left( h + \frac{\mu^2}{\|C\|^2} \right)$$

ou seja,  $\|\dot{\mathbf{r}}\|$  é constante, de onde segue-se bi).

Se  $e \neq 0$ . Denotemos por  $(r, \theta)$  as coordenadas polares no plano do movimento com origem em  $S$  e eixo polar  $e$ , reescrevendo a relação (17) temos

$$\mu(\|\mathbf{r}\| \epsilon \cos \theta + \|\mathbf{r}\|) = \|C\|^2,$$



ou equivalentemente,

$$\|\mathbf{r}\| = \epsilon \left( \frac{\|\mathbf{C}\|^2}{\mu\epsilon} - \|\mathbf{r}\| \cos \theta \right). \quad (18)$$

Pela relação definida em (3), segue-se de (18), que a distância de  $\mathbf{P}$  ao centro de atração  $S$  é proporcional à distância de  $\mathbf{P}$  à reta ortogonal ao vetor  $\mathbf{e}$  e cuja distância a  $S$  é igual a  $\frac{\|\mathbf{C}\|^2}{\mu\epsilon}$ . Portanto,  $\mathbf{P}$  descreve uma cônica de excentricidade  $\epsilon$  e eixo  $\mathbf{e}$ . Também (18) pode ser escrita na forma polar (veja figura 9)

$$\|\mathbf{r}\| = \frac{p}{1 + \epsilon \cos \theta}, \quad p = \frac{\|\mathbf{C}\|^2}{\mu}. \quad (19)$$

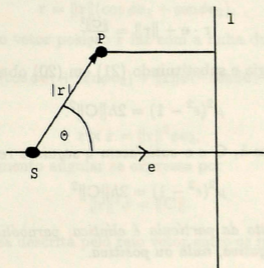


Figura 9: A cônica em coordenadas polares

**Comentários.** 1) O valor  $\theta = 0$  corresponde ao ponto chamado de *pericentro da órbita* sobre o eixo definido por  $\mathbf{e}$  que dá a menor distância ( $r_{\min}$ ) da partícula ao centro atrator, dada por  $\|\mathbf{r}\| = \frac{p}{1+\epsilon}$ . Enquanto que, no caso de órbita elíptica,  $\theta = \pi$  determina o ponto chamado de *apocentro da órbita* que define a maior distância ( $r_{\max}$ ) ao centro atrator, dada por  $\|\mathbf{r}\| = \frac{p}{1-\epsilon}$ . No caso onde o centro atrator é o Sol os pontos  $r_{\min}$  e  $r_{\max}$  denominam-se perihélio e afélio, e quando o centro atrator é a terra denominam-se perigeo e apogeo, respectivamente.

2) O item bii) do corolário corresponde à primeira lei de Kepler que expressa: “as órbitas dos planetas em torno do sol são elipses com o sol em dos focos”.

**Propriedades 1.** Se  $a$  denota o semi-eixo maior da órbita elíptica, temos

$$2a = \frac{p}{1 + \epsilon} + \frac{p}{1 - \epsilon},$$

donde

$$a(1 - \epsilon^2) = p = \frac{\|C\|^2}{\mu}. \quad (20)$$

2). Quadrando a equação (16), temos

$$\mu^2 \left( \|e\|^2 + 2 \frac{e \cdot r}{\|r\|} + 1 \right) = \|\dot{r} \times C\|^2 = \|\dot{r}\|^2 \|C\|^2$$

e também fazendo o produto escalar de (16) com  $r$  temos

$$r \cdot e + \|r\| = \frac{\|C\|^2}{\mu}. \quad (21)$$

Usando a relação de energia e substituindo (21) em (20) obtemos

$$\mu^2(\epsilon^2 - 1) = 2h\|C\|^2.$$

**Teorema 7** *As constantes  $h$ ,  $C$  e  $e$  satisfazem a seguinte relação*

$$\mu^2(\epsilon^2 - 1) = 2h\|C\|^2.$$

*Consequentemente, a órbita da partícula é elíptica, parabólica ou hipérbolica conforme a energia  $h$  seja negativa, nula ou positiva.*

Este teorema mostra que o vetor de Laplace não é uma integral independente de  $h$  e  $C$ .

**Propriedade 3.** Para a elipse, isto é  $h < 0$ , tem-se  $a = \frac{\mu}{2|h|}$ . De modo que o semi-eixo maior depende unicamente da energia  $h$ .

Como consequência do teorema anterior e da relação de energia, verifica-se que ao longo de uma órbita:

**Corolário 2** *Seja  $v = \|\dot{r}\|$ . a) No caso elíptico ( $h < 0$ ),  $v^2 = \mu \left( \frac{2}{\|r\|} - \frac{1}{a} \right)$ .*

*b) No caso parabólico ( $h = 0$ ),  $v^2 = \frac{2\mu}{\|r\|}$ .*

*c) No caso hipérbolico ( $h > 0$ ),  $v^2 = \mu \left( \frac{2}{\|r\|} + \frac{1}{a} \right)$ .*

*d) No caso circular, ( $h < 0$  e  $e = 0$ ),  $v^2 = \frac{\mu}{a}$ .*

Estas fórmulas nos dão em particular o comportamento assintótico da velocidade para  $\mathbf{r}$  próximo do infinito (ou seja, quando o corpo tende a escapar), note que este caso só pode acontecer para o caso parabólico ou hiperbólico. Para o caso parabólico temos  $v \rightarrow 0$  e para o hiperbólico temos  $v \rightarrow \sqrt{\mu/a}$  que é uma constante positiva.

Um elemento importante na descrição da cônica é a reta dos nodos.

**Definição 2** A linha dos nodos é a reta interseção do plano da órbita com o plano de referência, se este não coincide com aquele.

Consideremos o referencial ortonormal  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ , onde  $\mathbf{e}_1$  é paralelo à linha dos nodos,  $\mathbf{e}_3 = \frac{\mathbf{C}}{\|\mathbf{C}\|}$  e  $\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1$  (a figura 10 mostra este referencial ortonormal). Neste sistema tem-se

$$\mathbf{r} = \|\mathbf{r}\|(\cos \phi \mathbf{e}_1 + \sin \phi \mathbf{e}_2), \quad (22)$$

onde  $\phi$  é o ângulo que o vetor posição  $\mathbf{r}$  faz com a linha dos nodos. Como

$$\dot{\mathbf{r}} = \|\mathbf{r}\|(-\dot{\phi} \sin \phi \mathbf{e}_1 + \dot{\phi} \cos \phi \mathbf{e}_2) + \|\mathbf{r}\|\dot{\phi}(-\sin \phi \mathbf{e}_1 + \cos \phi \mathbf{e}_2)$$

obtemos

$$\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = \|\mathbf{r}\|^2 \dot{\phi} \mathbf{e}_3,$$

e a conservação do momento angular se expressa por

$$\|\mathbf{r}\|^2 \dot{\phi} = \|\mathbf{C}\|. \quad (23)$$

**Propriedade 4.** A área descrita pelo raio vetor entre os instantes  $t_0$  e  $t$  é dada por

$$A(t) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \|\mathbf{r}\|^2 d\phi = \frac{\|\mathbf{C}\|}{2} (t - t_0)$$

do qual resulta a segunda lei de Kepler,  $\frac{dA}{dt} = \frac{\|\mathbf{C}\|}{2}$ , isto é: "o raio vetor que liga o sol ao planeta descreve áreas iguais em tempos iguais, isto é, a taxa de variação da área descrita pelo raio vetor é constante.

É importante observar que as duas primeiras leis referem-se aos planetas individualmente.

**Propriedade 5.** A área de uma elipse de semi eixos  $a$  e  $b$  é  $\pi ab$ . Denotando por  $P$  o período do movimento, temos

$$\frac{\pi ab}{P} = \frac{A(t, t_0)}{t - t_0} = \frac{\|\mathbf{C}\|}{2}.$$

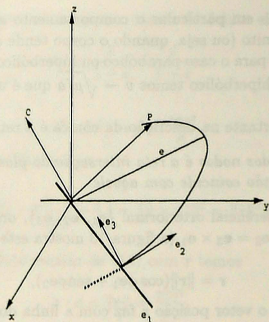


Figura 10: Referencial ortonormal

Como  $b^2 = a^2(1 - \epsilon^2)$ , a relação acima é equivalente a

$$\frac{a^3}{P^2} = \frac{\mu}{4\pi^2}. \quad (24)$$

Esta equação corresponde à terceira lei de Kepler que expressa: “os cubos dos semi eixos maiores das órbitas elípticas dos planetas estão entre si, como os quadrados dos períodos de seus movimentos em torno do sol”.

**Comentário.** Observemos que se o planeta de massa  $m_2$  move-se em torno do sol de massa  $m_1$ , então  $\mu = G(m_1 + m_2)$ , depende da massa do planeta. A terceira lei de Kepler, portanto, é apenas uma aproximação, impossível de ser detectada por Kepler em virtude da preponderância da massa solar sobre as dos planetas, isto é,

$$G(m_1 + m_2) \sim Gm_1,$$

A terceira lei de Kepler frequentemente vem escrita sob a forma

$$a^3 n^2 = \mu, \quad (25)$$

onde  $n = \frac{2\pi}{P}$  é o movimento médio. Assim, a formulação correta da terceira lei de Kepler para as elipses de semi eixos maiores  $a$  e  $\bar{a}$  deve ser

$$\frac{a^3 n^2}{\bar{a}^3 \bar{n}^2} = \frac{\mu}{\bar{\mu}} = \frac{G(m_1 + m_2)}{G(m_1 + \bar{m}_2)} = \frac{1 + m_2/m_1}{1 + \bar{m}_2/m_1} \sim 1.$$



Note que o período da órbita elíptica é  $P = \frac{2\pi}{n} = \frac{2\pi a^{-3/2}}{\mu^{1/2}}$

**Propriedade 6.** Verifica-se que  $P = \frac{2\pi}{\|C\|} ab$ . Ademais, como  $2a = r_{\min} + r_{\max}$ , com  $r_{\min}$  = pericentro e  $r_{\max}$  = apocentro, e como  $b^2 = a^2 - (a - r_{\min})^2 = r_{\min} r_{\max}$ , obtemos que

$$P = \frac{2\pi}{\|C\|} \frac{r_{\min} + r_{\max}}{2} \sqrt{r_{\min} r_{\max}}$$

## 5 Elementos principais no problema de Kepler

Seja  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  um referencial ortonormal do sistema inercial em  $\mathbb{R}^3$ . Note que este sistema tem sua origem localizada no centro do sol, também o plano da *eclíptica* (plano da órbita da terra) é o plano fundamental de referência, isto é, o plano  $xy$ , e o eixo das abscissas dirigido para o equinócio de março, que é o ponto onde a órbita da terra cruza o equador celeste em seu movimento ascendente. Este sistema é chamado *sistema heliocêntrico eclíptico*. Neste sistema fundamental de referência, quando o momento angular não é ortogonal ao plano fundamental de referência, o plano da órbita intersecta-o ao longo de uma reta chamada a *linha dos nodos*. Em seu movimento ao longo da órbita, a partícula intercepta a linha dos nodos duas vezes, uma no sentido crescente do eixo dos  $z$  e a outra no sentido decrescente deste eixo. No primeiro caso caso, o ponto de interseção é chamado o nodo ascendente, denotado por  $N$  na figura 11, no segundo caso, o ponto de interseção é chamado nodo descendente. O ângulo  $\Omega$  que a semi reta  $ON$  faz com o eixo dos  $x$ , medido no sentido positivo, é chamado a *longitude do nodo ascendente*; este ângulo varia entre  $0$  e  $2\pi$ .

O ângulo  $i$  que o plano da órbita faz com o plano fundamental de referência é chamado a *inclinação da órbita*, ele varia entre  $0$  e  $\pi$ .

Os ângulos  $\Omega$  e  $i$  definem o plano da posição da órbita no espaço e como veremos posteriormente, eles são determinados pelo momento angular.

A forma e a posição da órbita em seu plano, são caracterizadas pela excentricidade  $\epsilon = \|\mathbf{e}\|$  e pelo *argumento de seu pericentro* que é o ângulo  $\omega$  entre o vetor de Laplace e a semi reta  $ON$  medido no sentido positivo do movimento da partícula. No caso da elipse o tamanho da órbita é definido pelo semi eixo maior. Correspondentemente, na órbita hiperbólica usamos o semi eixo transverso e na órbita parabólica, a distância do foco ao vértice. Esta última constante, nos dois primeiros casos, é determinada pela energia  $h \neq 0$  pela relação  $a = \frac{\mu}{2|h|}$ . No caso parabólico,  $h = 0$ , esta constante é dada por  $p = \frac{c^2}{2\mu}$ .

As constantes  $(\Omega, i, \epsilon, \omega, a)$  definem a geometria do problema, isto é, elas definem

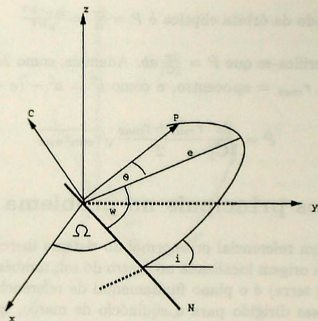


Figura 11: Elementos da órbita

o plano da órbita no espaço e neste plano, caracterizam a forma, a posição e o tamanho da órbita.

A sexta constante de integração de caráter cinemático, é tomada como sendo o tempo de passagem pelo pericentro, isto é, o instante  $T$  em que a partícula passa pelo pericentro. No caso da órbita parabólica e hiperbólica,  $T$  é definido de modo único, mas não no caso elíptico.

Considere um novo sistema de referência de  $\mathbb{R}^3$ , obtido fazendo-se uma rotação em torno do eixo  $z$  num ângulo  $\Omega$ , seguido de uma rotação num ângulo  $i$  em torno da linha dos nodos  $ON$ . A matriz que representa a primeira operação é dada por:

$$A_1 = \begin{pmatrix} \cos \Omega & -\sin \Omega & 0 \\ \sin \Omega & \cos \Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Note que por definição o vetor  $e_1$ , quando feita a rotação num ângulo  $\Omega$ , é paralelo ao vetor diretor da linha dos nodos. A matriz que define a segunda operação é

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i & -\text{sen} i \\ 0 & \text{sen} i & \cos i \end{pmatrix}.$$

Se denotamos a base  $\{\mathbf{e}_j^*\}$  obtida via a base  $\{\mathbf{e}_j\}$  pela transformação  $A_2 A_1$ , então devemos ter:

$$\mathbf{e}_1^* = \cos \Omega \mathbf{e}_1 + \sin \Omega \mathbf{e}_2$$

$$\mathbf{e}_2^* = -\cos i \sin \Omega \mathbf{e}_1 + \cos i \cos \Omega \mathbf{e}_2 + \sin i \mathbf{e}_3$$

$$\mathbf{e}_3^* = \sin i \sin \Omega \mathbf{e}_1 - \sin i \cos \Omega \mathbf{e}_2 + \cos i \mathbf{e}_3.$$

Como o plano de movimento é definido pelos vetores  $\mathbf{e}_1^*$  e  $\mathbf{e}_2^*$ , temos que o vetor momento angular é dado por  $\|\mathbf{C}\| \mathbf{e}_3^*$ .

O seguinte teorema relaciona as condições iniciais com os elementos da órbita.

**Proposição 1** *Os seis elementos da órbita podem ser encontrados em termos da posição inicial  $\mathbf{r}_0$ , da velocidade inicial  $\mathbf{v}_0 = \dot{\mathbf{r}}_0$  e  $c = \|\mathbf{C}\|$ , com as cinco primeiras constantes calculadas explicitamente.*

**Demonstração.** Sejam  $r = \|\mathbf{r}\|$  e  $v = \|\dot{\mathbf{r}}\|$ . Como  $\mathbf{C}$  e  $h$  são constantes de integração temos que  $C = \mathbf{r}_0 \times \dot{\mathbf{r}}_0$  e  $h = \frac{1}{2} v_0^2 - \frac{\mu}{r_0}$ .

a) Da relação  $\mathbf{C} = c \mathbf{e}_3^*$ , determinamos  $\Omega$  e  $i$  em função de  $\mathbf{r}_0$  e  $\dot{\mathbf{r}}_0$ .

b) Para  $h \neq 0$ , temos  $a = \frac{\mu}{2|h|}$  de onde calculamos o valor de  $a$ .

c) Já que  $\mu^2(\epsilon^2 - 1) = 2c^2 h$ , segue-se o valor de  $\epsilon$ .

d) Seja  $\phi$  o ângulo que faz a partícula num instante  $t$  qualquer com a linha dos nodos e  $\theta$  o ângulo formado pelo vetor  $\mathbf{e}$  e a posição da partícula, logo  $\phi = \omega + \theta$ . Da equação (18) temos

$$\epsilon \cos \theta = \frac{c^2}{\mu r} - 1 \quad (\text{o qual nos dá o sinal do coseno}), \quad (26)$$

derivando temos  $\epsilon \dot{\theta} \sin \theta = \frac{c^2}{\mu} \frac{\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}}}{r^3}$ . Mas  $r^2 \dot{\phi} = c$ , logo  $\dot{\theta} = \dot{\phi} = \frac{c^2}{r^2}$ . Assim,

$$\epsilon \theta = \frac{c}{\mu} \frac{\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}}}{r}, \quad (27)$$

de onde por (26) e (27) temos

$$\tan \theta = \frac{c \mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}}}{c^2 - \mu r},$$

assim,

$$\tan \theta_0 = \frac{c \mathbf{r}_0 \cdot \dot{\mathbf{r}}_0}{c^2 - \mu r_0}.$$

Por outro lado, sabemos que  $\mathbf{r}$  é dado por  $r(\cos \phi \mathbf{e}_1^* + \text{sen} \phi \mathbf{e}_2^*)$  já que  $\mathbf{e}_1^*$  é paralelo a linha dos nodos e  $\mathbf{e}_3^*$  é paralelo ao momento angular. Assim  $r \cos \phi = \mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_1^*$  e  $r \text{sen} \phi = \mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_2^*$ . Sendo agora  $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3$ , obtemos

$$r \cos \phi = x \cos \Omega + y \text{sen} \Omega$$

$$r \text{sen} \phi = -x \cos i \text{sen} \Omega + y \cos i \cos \Omega + z \text{sen} i.$$

Usando estes resultados e as coordenadas  $(x_0, y_0, z_0)$  de  $\mathbf{r}_0$  podemos calcular  $\phi_0$ . Como  $\omega = \phi_0 - \theta_0$ , conseguimos calcular  $\omega$ .

e) Finalmente, vamos mostrar que o tempo de passagem pelo pericentro  $T$  está determinado pelas condições iniciais.

Denotemos por  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{r}_0, \dot{\mathbf{r}}_0, t)$  a solução de  $\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu}{r^3}\mathbf{r}$ , com condições iniciais  $\mathbf{r}_0$  e  $\dot{\mathbf{r}}_0$  em  $t = 0$ . Então, se  $d$  denota a distância pericêntrica, por definição de  $T$  temos que

$$\mathbf{r}(\mathbf{r}_0, \dot{\mathbf{r}}_0, T) = d \frac{\mathbf{e}}{\|\mathbf{e}\|}. \quad (28)$$

Pela conservação da energia e do momento angular, tem-se  $\|\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}\| = c$  e  $\frac{1}{2}\|\dot{\mathbf{r}}\|^2 - \frac{\mu}{r} = h$ . Assim se  $r = d = r_{\min}$  segue-que

$$c = \|\mathbf{r}(\mathbf{r}_0, \dot{\mathbf{r}}_0, T)\| \|\dot{\mathbf{r}}(\mathbf{r}_0, \dot{\mathbf{r}}_0, T)\| = d v_{\max}$$

logo  $v_{\max} = \frac{c}{d}$ . Lembremos que a relação de energia é dada por  $\frac{1}{2}v_{\max}^2 = h + \frac{c^2}{2d}$ . Comparando estas duas relações obtemos o valor de  $d$  em função de  $\mathbf{r}_0$  e  $\dot{\mathbf{r}}_0$ . Substituindo a expressão obtida para  $d$  em (28), obtemos uma equação em  $T$  que, resolvida, nos dá o valor de  $T$  em função das condições iniciais, uma vez que a relação

$$\mu \left( \mathbf{e} + \frac{\mathbf{r}}{r} \right) = \mathbf{r} \times \mathbf{C},$$

nos permite determinar  $\mathbf{e}$  em função de  $\mathbf{r}_0$  e  $\dot{\mathbf{r}}_0$ . ■

## 6 Posição da partícula na órbita elíptica

**Teorema 8** As coordenadas polares  $(r, \theta)$ , ( $r = \|\mathbf{r}\|$ ) da partícula são dadas pelas seguintes equações

$$r = a(1 - \epsilon \cos E)$$



$$\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}} \tan\left(\frac{E}{2}\right),$$

onde o ângulo  $E$  (anomalia excêntrica) é definido pela equação de Kepler

$$E - \text{sen}E = \frac{2\pi}{P}(t - T)$$

onde  $P$  é o período do movimento e  $T$  o tempo de passagem pelo pericentro.

**Demonstração.** Faça a mudança de coordenadas  $\xi = x$  e  $\eta = \frac{a}{b}y$  que transforma a elipse  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  na circunferência  $\xi^2 + \eta^2 = a^2$ . Temos as seguintes relações :

i)  $r \cos\theta = a \cos E - d(O, S) = a(\cos E - \epsilon)$

ii)  $\text{sen}E = \frac{\eta}{a}$ , logo  $r \text{sen}\theta = b \text{sen}E = a\sqrt{1-\epsilon^2} \text{sen}E$ .

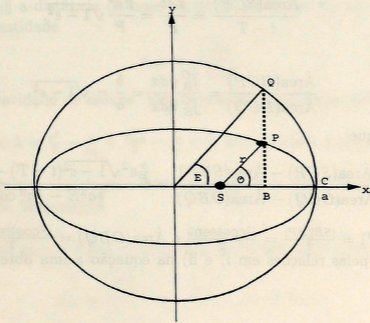


Figura 12: O problema elíptico

Quadrando estas duas expressões e somando, segue-se

$$r = a^2(1 - \epsilon \cos E).$$

Agora, comparando esta equação com a obtida em (22), obtemos

$$\cos E = \frac{\epsilon + \cos\theta}{1 + \epsilon \cos\theta}.$$

Logo, substituindo na expressão acima as expressões obtidas em i) e ii), temos

$$\frac{1 - \cos E}{1 + \cos E} = \frac{(1 - \epsilon)(1 - \cos \theta)}{(1 + \epsilon)(1 + \cos \theta)}$$

e lembrando as relações  $\cos^2 \alpha = \frac{\cos 2\alpha + 1}{2}$  e  $\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$ , obtemos as relações

$$\cos^2 \left( \frac{E}{2} \right) = \frac{\cos E + 1}{2}, \quad \text{e} \quad \sin^2 \left( \frac{E}{2} \right) = \frac{1 - \cos E}{2}.$$

Fazendo o quociente entre as duas expressões acima segue-se a segunda equação do teorema.

Para verificar a equação de Kepler, lembremos a segunda lei de Kepler

$$\frac{\text{Área}(SCP)}{t - T} = \frac{\pi ab}{P} = \frac{\pi a^2}{P} \sqrt{1 - \epsilon^2},$$

por outro lado,

$$\frac{\text{Área}(BCP)}{\text{Área}(BCQ)} = \frac{\int_B^C y dx}{\int_B^C \eta dx} = \frac{b}{a} = \sqrt{1 - \epsilon^2},$$

donde resulta que

$$\sqrt{1 - \epsilon^2} = \frac{\text{Área}(SCP) - \text{Área}(SBP)}{\text{Área}(OCQ) - \text{Área}(OBQ)} = \frac{\frac{\pi}{P} a^2 \sqrt{1 - \epsilon^2} (t - T) - \frac{1}{2} r^2 \cos \theta \sin \theta}{\frac{1}{2} a^2 E - \frac{1}{2} a^2 \cos E \sin E},$$

pois  $\text{Área}(SBP) = \frac{|SB||BP|}{2} = \frac{r^2 \cos \theta \sin \theta}{2}$  e  $\text{Área}(OBQ) = \frac{a^2 \cos E \sin E}{2}$ . Substituindo  $r \cos \theta$  e  $r \sin \theta$  pelas relações em i) e ii) na equação acima obtemos a equação de Kepler. ■

## 7 Aplicações

1) Das seções anteriores podemos tomar o movimento relativo de um corpo qualquer em torno do sol de constante  $\mu_s = G(m_c + m_s) = Gm_s$ , onde  $m_c$  é a massa do corpo e  $m_s$  é a massa do sol, e a igualdade é bastante "aproximada" já que a massa do sol representa mais do 99.8% da massa total do sistema solar. Analogamente para um corpo pequeno movendo-se em torno de um planeta de massa  $m_p$ , tomamos a constante como  $\mu_p = Gm_p$ .

Para a Terra, esta constante pode ser calculada por

$$\mu_T = Gm_T = gR^2,$$

onde  $g$  é a aceleração da gravidade na superfície da Terra,  $m_T$  a massa e  $R$  o raio da Terra, respectivamente. De fato, a força de gravidade na superfície da Terra sobre uma partícula de massa  $m$ , situada em sua superfície é o peso, isto é,  $mg$  da partícula, e assim, pela lei da Gravitação Universal, temos que a intensidade da força é

$$mg = \frac{Gmm_T}{R^2}$$

de onde  $Gm_T = gR^2$ . Já que  $g = 9.8m/seg^2$  e  $R = 6.400km = 6.4 \times 10^6m = 40.96 \times 10^{12}m^2$ , obtemos o valor para  $\mu_T = 4.096 \times 10^{14}m^3/seg^2$ .

2) Seja  $r_0 = \|\mathbf{r}_0\|$  a distância de uma partícula de massa  $m_1$  ao centro atrator de massa  $m_2$ , a quantidade

$$v_{esc} = \sqrt{\frac{2\mu}{\|\mathbf{r}_0\|}}$$

é chamada a velocidade de escape. Esta expressão justifica-se pelo seguinte fato:

Se  $v < v_{esc}$  então  $h = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r_0} < \frac{v_{esc}^2}{2} - \frac{\mu}{r_0} < 0$ , logo a órbita é elíptica.

Se  $v = v_{esc}$ , temos  $h = 0$ , logo a órbita é parabólica, deste modo a partícula não retorna depois do lançamento.

Em particular para a Terra a velocidade de escape é dada por

$$v_{esc} = \sqrt{\frac{2\mu_T}{r_0}} = \sqrt{2gR} = 11.2km/seg$$

em virtude da aplicação 1.

## Referências

- [1] Diacu, F.: Singularities of the n-body problem, *An Intoduction to Celestial Mechanics*, Les Publications CRM. Montréal, (1992).
- [2] P.S. Laplace, *Traité de Mécanique Céleste*, Vol. V, Bachelier, Paris, 1825 (Chelsea Publ., 1969).

- [3] K.R. Meyer & C.R. Hall, *Introduction to Hamiltonian Dynamical Systems and the N-Body Problem*. Springer-Verlag, 1991.
- [4] J.K. Moser, *Is the Solar System Stable?*, *Mathematical Intelligencer*, Vol.1 (1978/79), 65-71.
- [5] I. Newton, *Mathematical Principles of Natural Philosophy*, Univ. of California, Berkeley, Calif., 1947.
- [6] H. Poincaré, *Le Problème des Trois Corps*, Oeuvres, Tome VIII.
- [7] H. Poincaré, *Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste*, 1892. (Dover Publ., 1957).
- [8] Smale, S. and Hirsch, M., *Differential Equations, Dynamical Systems, and Algebra Linear*, Academic Press, 1974.
- [9] A. Wintner, *The Analytical Foundations of Celestial Mechanics*, Princeton Univ. Press, 1941.
- [10] Xia, Z.: *The existence of noncollision singularities in Newtonian systems*, *Annals of Mathematics*, 135, 411-468 (1992).