CUBO 11, 01-06 (1995)
Recibido: Mayo 1995.

A propos des algèbres pondérables.*

Cristián Mallol

Abstract.
We present the simple notion of coding the product of an algebra in order to construct "canonical" embeddings, by adjuction of an element, of any algebra into a weighted algebra. A description of the possible extensions is given.

1 Introduction

Pour des raisons de simplification d'écriture ce travail est présenté dans un cadre commutatif; les idées exposées par la suite marchent aussi bien sans cette condition.

Soient K un corps commutatif infini, car (K)$\neq$ 2, et A une K-algèbre commutative. On dit que A est pondérable s'il existe $\omega : A \to K$, morphisme non nul d'algèbres (cf. [3]).

L'application ω est appelée pondération et on note (A, ω) le fait que A soit pondérée par ω; l'ensemble Ker (ω) est un idéal de codimension 1.

Toute algèbre n'est pas pondérable: par exemple, l'algèbre de dimensión 2 définie par les produits $x^2 = y,\ xy = 0, y^2 = x$.

De plus, une algèbre pondérable n'a pas forcément une pondération unique: par exemple, l'algèbre définie par les produits $x^2 = x,\ xy = y, y^2 = y$, admet deux (et seulement deux) pondérations: $\omega(x) = \omega(y) = 1$ *et* $\omega'(x) = 1, \omega'(y) = 0$.

*Research supported in part by Fondecyt 1950778 and Didufro 9516

Dans ce qui suit donnons d'abord des critères (existence, comparaison) concernant les pondérations ainsi que certaines conséquences de structure dû à leur existence; puis, nous construisons des extensions pondérées d'une algèbre quelconque.

2 Existence et comparaison de pondérations

Proposition 2.1 *Les affirmations suivantes sont équivalentes:*

(a) A est pondérable.

(b) A admet une base $(e_i)_{i\in I}$ *telle que* $e_ie_j = \sum_{k\in I} \alpha_{ijk}\ e_k$ *avec* $\sum_{k\in I} \alpha_{ijk} = 1$, $i, j \in I$.

(c) A admet un idéal E, de codimension 1, tel que $A^2 \not\subseteq E$.

(d) Il existe un idéal E, codim (E) = 1, et $e \notin E$ *tel que* $e^2 - e \in E$.

Démostration. Pour l'équivalence entre (a), (b) et (c) on s'en remet à Schafer (c.f [5]). Quant à (a) $\Rightarrow$ (d), il suffit de prendre $E = Ker(\omega)$ et choisir $e \in E$, $\omega(e) = 1$. Enfin, (d) $\Rightarrow$ (a) car l'application $\omega(\lambda e + x) = \lambda$ où $\lambda \in K$ et $x \in E$, est une pondération. ∎

Dans les algèbres pondérables il est souvent nécessaire de voir si elles sont uniquement pondérées [7]; la proposition qui suit nous fournit un critère simple.

Proposition 2.2 *Soient* ω *et* ω' *deux pondérations. Les affirmations suivantes sont équivalentes:*

(a) $\omega = \omega'$

(b) $Ker(\omega) \subset Ker(\omega')$.

Démonstration

(b) $\Rightarrow$ (a): De 2.1.d, il existe $e \in A$, $\omega(e) \neq 0$ tel que $e^2 - e$ est dans Ker (ω), d'oú $A = Ke \oplus Ker(\omega)$ et forcément $\omega'(e) \neq 0$ (sinon $A = Ker(\omega')$ et donc $\omega' = 0$). Il s'ensuit que $\omega(e) = \omega'(e) = 1$ et $Ker(\omega) = Ker(\omega')$. ∎

Soit A une algèbre pondérable et notons $B(A) \subset A^*$ l'ensemble de ses pondérations.

Proposition 2.3 *Soit* $\{\omega_i / 1 \leq i \leq p\} \subset B(A)$.

(a) Pour tout j, il existe $e_j \in A$ *tel que* $\omega_i(e_j) = \delta_{ij}$ *pour tout i.*

(b) Il existe $e \in A$ *tel que* $\omega_i(e) = 1$ *pour tout i.*

Démonstration a) Par récurrence montrons qu'il existe $e_1 \in A, \omega_k(e_1) = \delta_{k1}$. Supposons que $\omega_1(e) = 1$ et $\omega_2(e) = \cdots = \omega_{k-1}(e) = 0$; si $\omega_k(e) \neq 0$ commme

$Ker\omega_1) \neq Ker(\omega_k)$ (proposition 2.2) on pose $e_1 = e - \omega(x)^{-1}xe$ avec $x \in Ker(\omega_1) - Ker(\omega_k)$. Quant á (b), il suffit de prendre $e = e_1 + e_2 + \cdots + e_p$ avec $\omega_i(e_j) = \delta_{ij}$. ■

Corollaire 2.4 *Si A est de dimension finie, tout ensemble de pondérations est libre et* $dim(\cap_{B(A)} Ker(\omega)) = dim(a) - \mid B(A) \mid$.

Démonstration. (c.f. [1], §7.5, Cor. 1 et 2 du Thm. 7) ■

On rapelle qu'une algèbre $S \subset A$ est une sous-algèbre pondérée de A si elle est pondérée par la restriction d'une pondération de A. Le résultat qui suit montre que si $\mid B(A) \mid > 1$, l'existence de sous-algèbres pondérées propres est garantie:

Proposition 2.5 *Soit* $\omega_i)_i$ *une famile de* $B(A)$*. Il y a équivalence entre:*
a) Il existe une sous-algèbre pondérée (S, γ) *telle que* $\gamma = \omega_{i|_S}$.
b) Il existe $e \in A$*, tel que* $\omega_i(e) = 1$*, pour tout i.*

Démonstration. (a) $\Rightarrow$ (b) Il suffit de décomposer $S = Ke \oplus Ker(\gamma)$ avec $\gamma(e) = 1$. (b) $\Rightarrow$ (a) Il suffit de prendre $S = Ke \oplus \cap_i Ker(\omega_i)$ avec $e \in A, \omega_i(e) = 1$. ■

Corollaire 2.6 *Soit A de dimension finie. Si* $(\omega_i)_i$ *est une famille de* $B(A)$ *telle que* $\cap_i Ker(\omega_i) = \{0\}$*, alors A admet un idempotent.*

Démonstration De 2.4. et 2.3 b il existe $e \in A, \omega_i(e) = 1$; puis de 2.5 il découle que Ke est une sous-algèbre de A avec $\omega(e) = 1$ d'oú $e^2 = e$. ■

Bien entendu, si B(A) engendre A^* les conditions du corollaire ci-dessus sont remplies.

3 Codages et extensiones pondérées d'une algèbre

On finit cet article en construisant des extension des algèbres quelconques, por adjonction d'un èlément, à des algèbres pondérees. Ceci généralise les idées présentées dans (c.f.[2], §1).

Soient A une algèbre, $e \in A, \omega : A :\rightarrow K, M : A \rightarrow A$ linéaires et non nulles, $Q : A \rightarrow A$ une application quadratique et $e^{\perp} = \{x \in A / B_Q(e, x) = 0\}$:

Définition 1 *On dira que* $\omega M + Q$*, est un codage du produit de A si* $x^2 = \omega(x)M(x) + Q(x)$*,* $\forall x \in A$*. Si de plus, il existe* $e \in A$ *tel que* $\omega(e) = 1$ *et* $e^{\perp} = A$*, on dira que* $\omega M + Q$ *est un e-codage.*

Remarque 3.1 *a) Pour tout codage $\omega M + Q, Q(y) = y^2$, $y \in Ker(\omega)$. Si en plus, il s'agit d'un e-codage, alors $\omega(e) = 1, M(e) = e^2$ et $Q(e) = 0$. Cependant, ces conditions ne sont pas suffisantes: en effet, pour $\omega(e) = 1$, $M(x) = ex$ et $Q(x) = x^2 - \omega(x)ex$, $\omega M + Q$ est un codage du produit avec $M(e) = e^2$ et $Q(e) = 0$, mais $e^{\perp} \neq A$.*
b) Il est clair que si $\omega M + Q$ et $\omega M' + Q'$ sont deux codages, alors M=M' si et seulement si Q=Q'. Ceci veut dire que pour un codage $\omega M + Q$, tous les autres codages concernant ω sont de type $\omega(M + f) + (Q - \omega f)$ où f est une application linéaire.

Proposition 3.2 *Toute algèbre admet un e-codage $\omega M + Q$. Chacun de ces codages est déterminé par un et un seul couple (ω, e) tel que $\omega(e) = 1$.*

Démonstration
(a) Soit $e \in A, \omega(e) = 1$; les applications $M(x) = 2ex - \omega(x)e^2$ et $Q(x) = (x - \omega(x)e)^2$ remplissent les conditions demandées. Quant á la derniére affirmation, si $\omega M + Q$ est un e-codage, tenant compte de 3.2 (b), il suffit de démontrer que $M(x) = 2ex - \omega(x)e^2$. Soit $y \in Ker(\omega)$: on $a(e + y)^2 = M(e + y) + Q(e + y)$; mais $M(e) = e^2$ et $Q(e + y) = y^2$ d'oú M(y) = 2ey. Le résultat vient en calculant M sur $x = \lambda e + y$. ■

Proposition 3.3 *Dans un e-codage $\omega M + Q, \omega$ est une pondération si et seulement si $\omega \circ M = \omega$ et $\omega \circ Q = 0$.*

Démonstration Si ω est multiplicative, de $\omega(M(x)) = \omega(2ex - \omega(x)e^2)$ on obtient $\omega \circ M = \omega$; puis de $\omega(x^2) = \omega(\omega(x)M(x) + Q(x))$, il en résulte $\omega \circ Q = 0$. La rèciproque ne pose aucun probléme. ■

Théorème 3.4 *Toute algèbre A peut se plonger dans une algèbre pondérée (E, ω) telle que $Ker(\omega) = A$.*

Démonstration Soit E l'espace vectoriel KxA. Si l'on pose e = (1,0) alors $E = Ke \oplus A$. Nous allons définir un produit sur E á l'aide d'un ecodage: soit ω la forme linéaire définie par $\omega(\lambda e + y) = \lambda, \lambda \in K, y \in A$. On choisit $z \in A, M \in End(A)$ et on prolonge M à E en faisant M(e) = e+z; puis en utilisant la structure de A, on définit l'application quadratique sur E par $Q(x) = (x - \omega(x)e)^2$. On munit E du produit déterminé par $\omega M + Q$. Par construction, $A = Ker(\omega)$, $\omega M + Q$ est un e-codage et l'injection canonique $A \to E$ est un morphisme d'algèbres; de plus, comme les identités $\omega \circ M = \omega$ et $\omega \circ Q = 0$ sont vérifiées, ω est une pondération. ∎

La démonstration ci-dessus donne la mesure des extensions possibles à reáliser. Définir une extension $Ke \oplus A$ de l'algèbre A équivaut á définir une multiplication par e; notons $Ext_e(A)$ l'ensemble des possibles multiplications L_e.

Proposition 3.5 *L'application* $Ext_e(A) \to AxEnd(A), L_e \to (e^2 - e, 2L_e)$, *est bijective.*

Démonstration En effet, son inverse est l'application $(z, M) \to L_e$, définie par $L_e(e) = e + z$ et $L_e(y) = \frac{1}{2}M(y), y \in A$. ∎

Notons A(z,M) une telle extension.

Remarque 3.6 *a) Le théoréme 3.5 admet une réciproque dans le sens que toute algèbre pondérée* (E, ω) *est isomorphe à l'entension* $Ker(\omega)(e^2 - e, 2L_e)$ *avec* $\omega(e) = 1$.
b) Un morphisme d'extensions est un morphisme $f : A(z, M) \to A(y, N)$ *tel que* $f(e) = e$ *et* $f(A) = A$*; un calcul simple montre que* $f(z) = y$ *et* $f \circ M = N \circ f$. *Ceci veut dire que le groupe Aut (A) opére* $f * A(z, M) = A(f(z)), f \circ M \circ f^{-1}$*; l'orbite de A(z,M) est formée de toutes ses extensions isomorphes, l'application f établit l'isomorphisme entre A(z,M) et* $A(f(z), f \circ M \circ f^{-1})$.
c) Les extensions à idempotent sont celles de type A(0,M); tous les idempotents de poids non nul sont donnés par $e + Inv(M + Q)$, *où* $Inv(M + Q)$ *est l'ensemble des points fixes de* $M + Q$.

Proposition 3.7 *Si A est non pondérable alors A(z,M) est uniquement pondérée.*

Démonstration Pour toute pondération ω' de A(z,M), forcément $\omega'_{/A} = 0$ car sinon $\omega'_{/A}$. serait une pondération de A. Il s'ensuit que $A = Ker(\omega) \subset Ker(omega')$, donc $\omega = \omega'$ (prop. 2.2). ∎

Commentaire 3.9 Plusieurs algèbres pondéréres classiquement étudiées, sont des extensions A(z,M) d'algèbres non pondérables.

Ainsi par example, il y a équivalence entre les extensions A(z,M) des zéro-algèbres et les algèbres de mutation, celles admettant un codage ωM (c.f [4] et [7]); les extensions de type $A(0, Id)$ étant les] algèbres gamétiques (ou de Bernstein dórdre 0).

Par ailleurs, les extensions A(0,M) des algèbras vérifiant l'identité de Jacobi où 2M est un projecteur, contiennent les algèbres de Bernstein- Jordan d'ordre 1 (celles qui vérifient $x^3 = \omega(x)x^2$).

Quant aux entensions de type A(0,M) des algèbres vérifiant $(x^2)^2 = 0$, pour tout $x \in A$, on a: si 2M est un projecteur, les algèbres de Bernstein d'ordre 1 (i,e., celles qui vérifient $(x^2)^2 = \omega(x)^2 x^2)$ et les algèbres caractérisées par l'identité $(x^2)^2 = \omega(x)x^3$ y sont contenues. Par contre, si M est involutive on y trouve toutes les algèbres caractérisées par l'identité $(x^2)^2 = \omega(x)^3 x$, étudiées dans (c.f.[6]).

Je remercie mon ami Richard Varro de ses conseils fort utiles.

Bibliographie

[1] N. Bourbaki N. *Algébre Ch. II 3° Ed.*, Hermann, Paris, (1962).

[2] Costa R. *Principal Train Algebras of rank 3 and dimension ≤ 5*, Proc. of the Edinburgh Math. Soc., **33**, **61-70** (**1990**).

[3] Etherington I.M.H. **Genetic algebras**, Proc. Roy. Soc. Edinburgh, **59 242-258** (**1939**).

[4] Mallol C., Varro R. *Les Algébres de Mutation*, Communication au Third International Conference on Nonassociative Algebra, Oviedo, (**1993**).

[5] Schafer R.D. *Structure of genetic algebras*, Amer. J. Math. **71 121-135** (**1949**).

[6] Walcher S. *Algebras which satisfy a train equation for the first three plenary powers*, Arch. der Math., **56 547-551** (**1991**).

[7] Wörz Busekros A., *Algebras in genetics*, Lect. Notes in Biomathematics 36, Springer Verlag, Berlin, (**1980**).

Dirección del autor:

Departamento de Matemáticas
Universidad de la Frontera
Casilla 54-D. Temuco