CUBO 11, 49-57 (1995)
Novena Jornada de Matemática de la Zona Sur

Conjunto de puntos límites de grupos cuasifuchsianos. *

J. Contreras S., C. del Pino O. y P. González P.

Resumen

En este trabajo se presenta una manera de obtener representaciones gráficas del conjunto de puntos límites de grupos Fuchsianos finitamente generados a dos parámetros reales y de grupos cuasifuchsianos a dos parámetros complejos.

1 Introducción

Como establece el clásico *teorema del círculo límite* (conjeturado por Klein y Poincaré en 1882 y probado por Poincaré y Koebe en 1907: "toda superficie de Riemann con puntos de ramificación, excepto algunos casos excepcionales, puede representarse como $S = \mathbf{H}/G$ donde G es un grupo Fuchsiano, y **H** es el semiplano de Poincaré" (o considerando Δ en vez de **H**). En general, las propiedades de las superficies S así presentadas dependen preferentemente de las características que tenga el Grupo G. Uno de los aspectos que tradicionalmente interesan de G son su conjunto de puntos límites, $\wedge_G$, y su conjunto de puntos fijos, Fix(G).

La representación gráfica es de mucha ayuda para determinar el dominio de los parámetros para los cuales resultan grupos discontinuos (Kleinianos). El artículo de B. Maskit, *Parameters for Fuchsian groups I, signature (0,4)*, presenta los grupos que se consideran en este trabajo a dos parámetros reales. Cada uno de estos grupos uniformiza una superficie de Riemann (finita) de signatura (0,4), que es homeomorfa a la esfera con 4 pinchaduras. Dando valores complejos a

*Trabajo financiado parcialmente por la DIAT, U. de Talca

los parámetros x e y se obtienen grupos cuasifuchsianos finitamente generados. Usando resultados de J. Earle presentados en artículo *Some intrisic coordinate on Teichmuller space* se parametrizan estos grupos a un parámetro complejo.

2 Desarrollo

Sea X un espacio topológico y sea G un grupo de homeomorfismos de X sobre sí mismo. El grupo G actúa *discontinuamente* (propiamente) en un punto $x \in X$, si y sólo si,

$\mathrm{Stab}_G(x)$ es finito, y

Existe U_x tal que $g(U_x) \cap U_x = \emptyset$, para todo $g \notin \mathrm{Stab}_G(x)$.

El conjunto *de discontinuidad* de G se denotará Ω_G. Sea G un grupo de homeomorfismos de X sobre sí mismos.

- Ω_G es un subconjunto abierto de X, G-invariante
- Sea Y un subconjunto de X, G-invariante y sean $x, y \in Y$, por ejemplo $Y = \Omega_G$. Si x e y son equivalentes (existe $g \in G : gx = y$), se tiene que $Y/G = \{[y]/y \in Y\}$ es un espacio topológico con la topología cuociente.

Sea $M = Aut(\widehat{C})$ el conjunto de homeomorfismos conformes de $\widehat{C}$ que preservan orientación, o sea, el grupo de las transformaciones de Mobius: $M = PGL(2, C)$.

Sea G un subgrupo de M, G es Kleiniano, si y sólo si, $\Omega_G \neq \emptyset$.

Observaciones:

- Interesa el espacio Ω_G/G. Cada componente conexa de Ω_G, (G-invariante), se llama componente de G.
- Interesan las propiedades de los grupos Kleinianos que son invariantes bajo conjugación en M.
- Generalmente se trabaja con el grupo "normalizado".

Sea G un grupo Kleiniano, $z \in \widehat{C}$ es un punto límite para G si y sólo si, existe $w \in \Omega_G$ y una sucesión $\{g_m\}$ de elementos distintos de G tal que $g_m(w) \to z$. El *Conjunto Límite* de G se denotará $\wedge_G$.

Nota: Ser punto límite no depende del punto de Ω_G sino de la sucesión de elementos del grupo.

Algunas propiedades del conjunto límite de G son:

- $\wedge_G \cap \Omega_G = \emptyset$

- $\wedge_G$ es cerrado en $\widehat{C}$
- $\wedge_G$ es G-invariante.
- $\wedge_G = \partial(\Omega_G)$.
- En toda vecindad de un $x \in \wedge_G$ hay puntos de Ω_G.

Sea G un grupo Kleiniano y sea $\wedge_G$ su conjunto límite. G se llama **elemental**, si y sólo si, $\wedge_G$ tiene a lo más dos elementos. Por ejemplo: $G = \{z \to z + n, n \in \mathbb{Z}\}$ grupo cíclico parabólico es elemental ya que $\wedge_G = \{\infty\}$. Otro grupo elemental es $G =< z \to 2z$ donde $\wedge_G = \{0, \infty\}$

Si G tiene más de dos puntos límites, G se dice **no-elemental**. Sea G un grupo Kleiniano no-elemental.

- $\wedge_G \cup \Omega_G = \widehat{C}$; $\quad \wedge_G \cap \Omega_G = \emptyset$.
- Ω_G tiene a lo más un número contable de componentes.
  Nota. Los puntos de $x \in \Omega_G$ (si es que existen) tales que $\mathrm{Stab}_G(x) \neq \{id\}$ son puntos fijos de elementos elípticos de G.
- Si G no tiene elementos elípticos, entonces Ω_G es denso en $\widehat{C}$.
- G tiene a lo más dos componentes.
- Si G no contiene transformaciones elípticas de período finito, entonces $\overline{Fix(G)} = \wedge_G$.

Grupos Kleinianos son estudiados debido a su conexión con superficies de Riemann, ya que, si G es Kleiniano, entonces, $S = \Omega_G/G$ es una superficie de Riemann.

Nota: Un resultado de Alhfors prueba que si G es Kleiniano finitamente generado entonces S es una superficie de Riemann finita.

En adelante G será un grupo kleiniano no-elemental. Sea G un grupo Kleiniano sin puntos fijos en Ω_G. G es grupo Fuchsiano si y sólo si existe un disco D de $\widehat{C}$, G-invariante. La frontera de D se llama *círculo al infinito*, y esta contiene al conjunto límite de G.

Nota: Sea G un grupo Fuchsiano y sea D tal disco. Siempre existe $T \in \mathbf{M}$ tal que TGT^{-1} es subgrupo discontinuo de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$.

Luego, Grupos Fuchsianos son *subgrupos discontinuos* (o discretos) de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$.

- Sea G un grupo Fuchsiano. Se tiene que $\wedge_G \subset \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.
- Toda superficie orientable compacta, distinta de la esfera, el plano complejo, el plano pinchado o el toro, se obtienen de la acción de un grupo Fuchsiano sobre $\mathbf{H}$ sin puntos fijos.

- Un resultado importante: Si G es un grupo Kleiniano no-elemental tal que $\mathrm{tr}^2(g) \geq 0$ para todo $g \in G$, entonces G es Fuchsiano.

Sea G un grupo Kleiniano que no fija puntos en Ω_G. G se dice *Cuasifuchsiano* si Ω_G tiene exactamente dos componentes ambas invariantes. La frontera de una componente invariante de un grupo cuasifuchsiano es o bien un círculo o bien una curva de Jordan que no tiene tangentes en un conjunto siempre denso, que originalmente se denominó conjunto tipo fractal, debido a que ella *repite exactamente su estructura global en la vecindad de cada punto.* Nuestro interés será visualizar Λ_G para grupos cuasifuchsianos, ya que para grupos fuchsianos Λ_G es un subconjunto denso en $\mathbb{R}$. En este trabajo se consideran grupos Fuchsianos presentados por B. Maskit en artículo *Parameters for Fuchsian Groups I, Signature (0,4).*

Sea G un grupo Fuchsiano finitamente generado de torsión libre de signatura (0,4). Los parámetros para tales grupos Fuchsianos son dados por puntos fijos de algunos generadores geométricos. Cada uno de estos grupos uniformiza una superficie de Riemann (finita) de signatura (0,4), que es homeomorfa a la esfera con 4 pinchaduras.

- Sea $S = \mathbf{H}/G$, y sea $\pi : \mathbf{H} \to S$ la proyección natural (cubrimiento), se tiene que:
$$G \cong \Pi_1(S)$$
donde $\Pi_1(S) =< \alpha, \beta, \gamma, \delta / \alpha\beta\gamma\delta = 1 >$. Luego:
$$G =< A, B, C, D / ABCD = 1 >$$
donde A, B, C y D son parabólicos y AB es hiperbólico.

- El grupo G se normaliza de modo que:
AB tenga su punto fijo (de atracción) en ∞.
AB tenga su punto fijo (de repulsión) en 0.
C tenga su punto fijo en 1.
Sean: x punto fijo de D, y punto fijo de B. Se tiene que: $y < 0 < 1 < x$.
Nota: x e y sirven como parámetros de deformación de estos grupos.

- Los elementos A, B, C y D en función de x e y son:
$$A = \begin{pmatrix} 2x^2y & -x^2y^2(1+x) \\ 1+x & -2xy \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -2xy & y^2(1+x) \\ -1-x & 2y \end{pmatrix}$$
$$C = \begin{pmatrix} 2 & -1-x \\ 1+x & 2x \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} -2x & x^2(1+x) \\ -1-x & 2x^2 \end{pmatrix}$$

Las transformaciones A, B, C y D forman un conjunto de buenos generadores para G, y $\mathbf{H}/G$ es una superficie de Riemann de signatura (0,4).

- Los puntos fijos de los elementos de cada grupo Fuchsiano G considerados, son números reales.
  Para cada uno de estos grupos G, con parámetros reales, se tiene que $\wedge_G = \widehat{\mathbb{R}}$.

Dando valores complejos a los parámetros x e y se obtienen grupos cuasifuchsianos, pero aquí no es claro el significado de buenos generadores.

Por lo anterior, se conviene lo siguiente: (1) Se comienza con un grupo Fuchsiano G con buenos generadores. (2) Se considera el espacio de Deformación de G, $D(G)$.

Una deformación de un grupo Kleiniano no-elemental G es un homeomorfismo cuasiconforme

$$\omega : \widehat{C} \to \widehat{C}$$

tal que $\omega G \omega^{-1}$ es un grupo Kleiniano. El *espacio de deformación* de G es el espacio de todas las deformaciones módulo las transformaciones que coinciden con algún automorfismo de $\widehat{C}$ en el conjunto límite.

Interesa determinar dominio de los parámetros x e y tal que la acción de G sobre $\widehat{C}$ sea discontinua.

- Sean Ω_1 y Ω_2 las dos componentes conexas G-invariantes.
- Sean $S_1 = \Omega_1/G$ y $S_2 = \Omega_2/G$.
  Interesa cuando S_1 es conformemente equivalente a S_2.
- Se construye $F : \Omega_1 \to \Omega_2$ conforme, tal que

$$FgF^{-1} = \Phi_* \, g, \forall g \in G$$

donde $\Phi : S \to S$ es anticonforme, $\Phi^2 = 1$ (luego $F^2 = 1$). Φ determina $\Phi_* : \Pi_1(S) \to \Pi_1(S)$ tal que:

$$A \mapsto B^{-1}, \quad B \mapsto A^{-1}, \quad C \mapsto D^{-1}, \quad D \mapsto C^{-1}$$

- Luego se determina F conforme, tal que:

$$F^2 = 1, \qquad \mathrm{tr}(F) = 0,$$
$$FAF = B^{-1}, \quad FBF = A^{-1}, \quad FCF = D^{-1}, \quad FDF = C^{-1}$$

obteniendo:

$$F = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{x} \\ \frac{1}{\sqrt{x}} & 0 \end{pmatrix}, \qquad y = -1$$

- Por lo tanto, las matrices A, B, C y D quedan dependiendo sólo de un parámetro complejo, x, ya que $y = -1$:

$$A = \begin{pmatrix} -2x^2 & -x^2(1+x) \\ 1+x & 2x \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2x & (1+x) \\ -1-x & -2 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -1-x \\ 1+x & -2x \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} -2x & x^2(1+x) \\ -1-x & 2x^2 \end{pmatrix}$$

Nota: El tener a los generadores dependiendo de un sólo parámetro complejo, reduce la complejidad del problema, facilita el ingreso del parámetro con un cierto orden con el fin de tener una mejor visión de la variación del parámetro, pero no se resuelve completamente el problema.

Sea G un grupo generado por las transformaciones representadas por las matrices A, B, C y D señaladas anteriormente en el parámetro complejo x. Con el fin de visualizar gráficamente $\wedge_G$, haciendo variar x se generó un programa computacional cuya estructura básica es la siguiente:

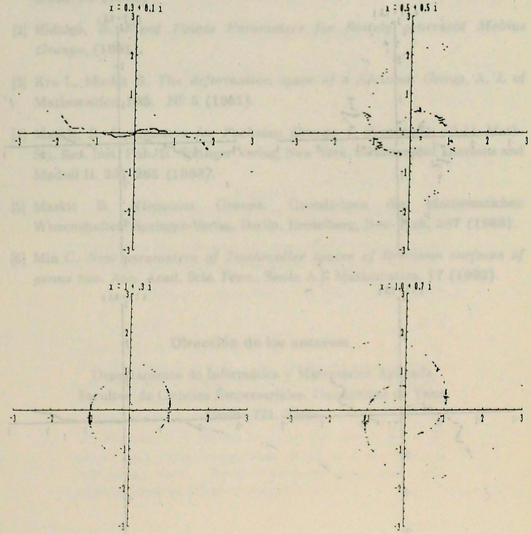
1. Aritmética compleja.
2. Generación de las matrices A, B, C, D.
3. Determinación de elementos del grupo G y el o los puntos fijos correspondientes.
4. Representación gráfica de los puntos fijos de distintos elementos de G.

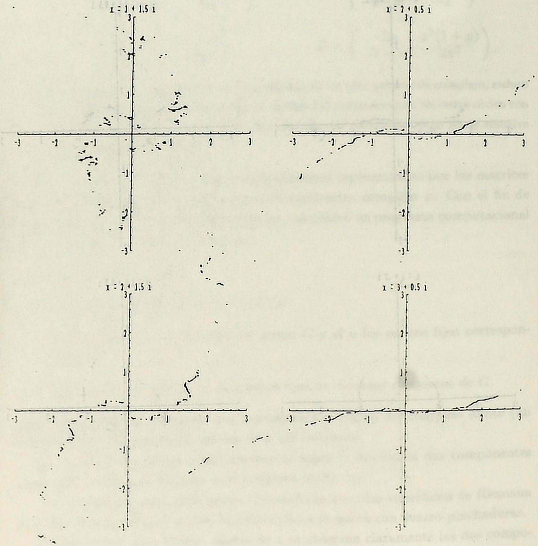
Las figuras adjuntas muestran una representación gráfica del conjunto límite (un subconjunto), obtenido para valores de x allí indicados.

La acción de un grupo causifuchsiano G sobre $\widehat{C}$ determina dos componentes conexas Ω_1 y Ω_2 cuya frontera es el conjunto límite $\wedge_G$.

Así se obtienen, para cada grupo G cuasifuchsiano, dos superficies de Riemann $S_1 = \Omega_1/G$ y $S_2 = \Omega_2/G$ ambas homeomorfas a la esfera con cuatro pinchaduras.

Gráficamente, para ciertos valores de x se observan claramente las dos componentes, y en tales casos se concluye que para esos valores la acción es discontinua. En cambio en otros aparece en la pantalla una nube difusa de puntos, en tal caso no es posible sacar conclusiones ya que no se visualizan las dos componentes conexas, pero si ayuda a conjeturar una solución parcial al problema.


x = 0.3 + 0.1 i
x = 0.5 + 0.5 i
x = 1 + .3 i
x = 1.0 + 0.7 i


x = 1 + 1.5 i
x = 2 + 0.5 i
x = 2 + 1.5 i
x = 3 + 0.5 i

Referencias

[1] Beardon, A. *The Geometry of Discrete Groups*, Springer-Verlag. N.Y. GTM, **91** **(1980)** .

[2] Hidalgo, R. *Fixed Points Parameters for finitely generated Mobius Groups*, **(1991)**.

[3] Kra I., Maskit B. *The deformation space of a Kleinian Group*, A. J. of Mathematics, **103.** N$^{\underline{o}}$ **5** **(1981)**.

[4] Maskit, B. *Parameters for Fuchsian Groups I, Signatures (0,4)*, Math. Sci. Res. Inst. Pub. II. Springer-Verlag, New York. Holomorphic Funcions and Moduli II, **251-265** **(1988)**.

[5] Maskit B. *Kleinians Groups*, Grundlehren der Mathematichen Wissenchaften, Springer-Verlag, Berlín, Heidelberg, New York, **287** **(1988)**.

[6] Min C. *New parameters of Teichmuller spaces of Riemann surfaces of genus two*, Ann. Acad. Scie. Fenn., Series A.I. Mathematica, **17** **(1992)**.

Dirección de los autores:

Departamento de Informática y Matemática Aplicada
Facultad de Ciencias Empresariales. Universidad de Talca
Casilla 721. Talca