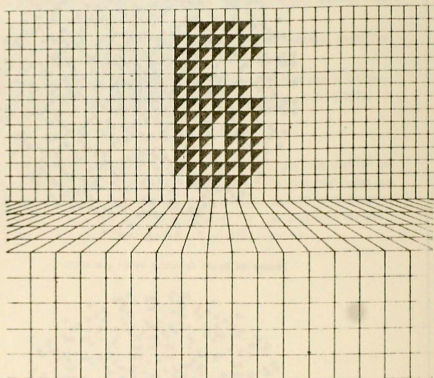


**SEXTA  
JORNADA DE  
MATEMATICA**

OCTUBRE 24 - 25 - 26 / 1990  
TEMUCO



**UNIFORMIZACION DE CURVAS  
ALGEBRAICAS DE GENERO DOS  
CON AUTOMORFISMOS**

**(CURSO B2)**

VICTOR GONZALEZ  
RUBI RODRIGUEZ

## §1. Curvas algebraicas

En esta sección comenzaremos estudiando las superficies de Riemann compactas desde el punto de vista de la geometría-algebraica, es decir como curvas algebraicas proyectivas. Este punto de vista es probablemente el más cercano al emprendido por Riemann y sus seguidores, cuando estudiaban las superficies asociadas a cierto tipo de ecuaciones algebraicas.

Comenzamos introduciendo un espacio ambiente donde vivirán las curvas. En  $E = \mathbb{C}^3 - (0, 0, 0)$  definimos la siguiente relación de equivalencia

$$(x, y, z)R(x', y', z') \Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{C}^* \quad \text{tal que} \quad \alpha x = x', \quad \alpha y = y' \quad \text{y} \quad \alpha z = z'.$$

El conjunto cociente, que denotamos  $\mathbb{P}_2(\mathbb{C}) \cong E/R$ , es un espacio topológico compacto (ejercicio 1.1) y conexo. Más aún, sobre  $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$  se puede poner una estructura de variedad analítica compleja de  $\dim_{\mathbb{C}} 2$ , (ejercicio 1.2) utilizando las siguientes cartas:

$$\begin{aligned} (U_1 &= \{(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})/x \neq 0\}, \varphi_1), & (U_2 &= \{(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})/y \neq 0\}, \varphi_2), \\ (U_3 &= \{(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})/z \neq 0\}, \varphi_3) \end{aligned}$$

donde  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  son las siguientes aplicaciones:

$$\varphi_1(x, y, z) = (y/x, z/x), \quad \varphi_2(x, y, z) = (x/y, z/y), \quad \varphi_3(x, y, z) = (x/z, y/z)$$

**Ejercicio 1.3:** Si  $E = \mathbb{C}^2 - (0, 0)$ , demostrar que a  $E/R \cong \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$  se le puede dotar de una estructura de variedad analítica compleja compacta y conexa de  $\dim_{\mathbb{C}} 1$  y se tiene además que  $\mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \cong \widehat{\mathbb{C}}$  (esfera de Riemann).

Como el abierto  $U_3 = \{(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})/z \neq 0\}$  se puede identificar con el abierto  $U'_3 = \{(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})/z = 1\}$  y claramente  $\{(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})/z = 0\}$  se identifica con  $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ , entonces  $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$  es la reunión disjunta de  $U'_3$  y  $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})^\infty$ . La notación  $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})^\infty$  se debe a que, como  $U'_3$  puede ser identificado con  $\mathbb{C}^2$ , podemos también pensar a  $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$  como  $\mathbb{C}^2$  al cual se le ha adjuntado una recta proyectiva compleja  $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$  (o  $\widehat{\mathbb{C}}$ ) al  $\infty$ .

**Ejercicio 1.4:** Definir  $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ , demostrar que  $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$  es una variedad analítica compleja compacta y conexa de  $\dim_{\mathbb{C}} n$ , verificar que:

$$\mathbb{P}_n(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^n \cup \mathbb{C}^{n-1} \cup \mathbb{C}^{n-2} \cup \dots \cup \mathbb{C}^2 \cup \mathbb{C} \cup \{\infty\}.$$

Demostrar que  $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$  es simplemente conexo y calcular sus grupos de homología.

Sea  $P(x, y, z) \in \mathbb{C}[x, y, z]$  un polinomio homogéneo; se puede verificar que los ceros de  $P$  definen un subconjunto en  $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$  que denotaremos

$$V_p := \{ \overline{(x, y, z)} \in \mathbb{P}_2(\mathbb{C}) / P(x, y, z) = 0 \} \subset \mathbb{P}_2(\mathbb{C})$$

y al que llamaremos curva algebraica proyectiva; evidentemente  $V_p$  es un subconjunto compacto de  $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$  (cerrado en un compacto).

**Ejercicio 1.5:** Verificar que si  $P(x, y, z) \in \mathbb{C}[x, y, z]$  es homogéneo de grado 1 o 2, entonces  $V_p \cong \mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \subset \mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ .

Ahora examinaremos con cierto detalle algunos ejemplos.

**Ejemplo 1.1:** Consideremos  $P(x, y, z) = y^2z - x^3 + z^3 \in \mathbb{C}[x, y, z]$ , veamos como se ve la curva  $V_p$  en el abierto  $U'_3 = \{ \overline{(x, y, z)} / z = 1 \}$ .

Allí tenemos la ecuación  $y^2 = x^3 - 1$ , que sobre cada  $x \in \mathbb{C}, x \neq 1, \omega, \omega^2$  ( $1 + \omega + \omega^2 = 0$ ) tiene dos valores para  $y$ , y solamente un valor cuando  $x = 1, \omega, \omega^2$ .

Es claro que la intersección de  $V_p$  con  $\mathbb{P}_1^\infty(\mathbb{C})$  en  $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$  consiste solamente del punto  $P = (0, 1, 0)$ .

Entonces, compactificando  $\mathbb{C}$ , sobre  $x \mid= \infty \in \hat{\mathbb{C}}$  se encuentra un único punto de la curva  $V_p \subset \mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ .

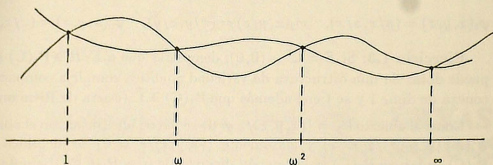


Fig. 1.1

Puede así pensarse que la curva  $V_p$  está formada por  $V_p \cap U'_3$  con el punto adicional  $(0, 1, 0) \in \mathbb{P}_1^\infty(\mathbb{C}) \subset \mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ . Además  $V_p$  está formada por dos copias de  $\hat{\mathbb{C}}$ , que se identifican en 4 puntos.

Si uno quiere conocer el género de la superficie topológica subyacente a  $V_p$  puede emprender dos caminos. Esbozamos primeramente una idea del camino más intuitivo.

Módulo homeomorfismo, cada copia  $V_p^+$  y  $V_p^-$  de  $V_p$  la podemos identificar a un tetraedro regular

Procederemos a realizar los cortes dibujados en las figuras, y a identificar los lados señalados con el mismo nombre.

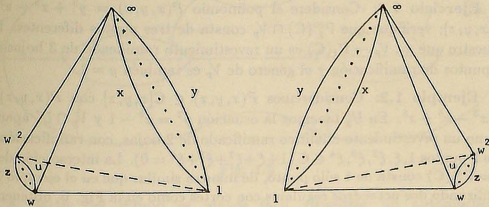


Fig. 1.2

Obtenemos una triangulación de  $V_p$  que consta de:

$$\# \text{ triángulos} = 8 \quad , \quad \# \text{ lados} = 12 \quad , \quad \# \text{ vértices} = 4$$

Como la característica de Euler - Poincaré de  $V_p$  debe ser  $2-2g$ , entonces  $2-2g=0$  de donde el género de  $V_p$  es  $g=1$ .

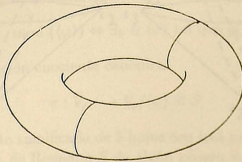


Fig. 1.3

El otro camino, menos intuitivo, es el siguiente: si  $V_p$  es una curva projectiva no singular determinada por un polinomio homogéneo de grado  $n$ , entonces [2] su género  $g$  es igual a  $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ .

Es fácil verificar que  $V_p$  es no singular y así, por este otro camino, también se tiene que el género de  $V_p$  es igual a 1.



En la Fig.1.1, observamos que para cada punto  $p \in \widehat{C}$ ,  $p \neq \{1, w, w^2, \infty\}$  existen dos puntos en la curva  $V_p$ . Intuitivamente, diremos que  $\pi : V_p \rightarrow P_1(\mathbb{C})$  es un revestimiento analítico ramificado de 2 hojas, con puntos de ramificación  $1, w, w^2$  y  $\infty$  en  $P_1(\mathbb{C})$ .

**Ejercicio 1.6:** Considere el polinomio  $P(x, y, z) = y^3 + x^3 - z^3 \in \mathbb{C}[x, y, z]$ ; verifique que  $P_1^\infty(\mathbb{C}) \cap V_p$  consta de tres puntos diferentes. Demuestre que  $\pi : V_p \rightarrow P_1(\mathbb{C})$  es un revestimiento ramificado de 3 hojas con 3 puntos de ramificación y el género de  $V_p$  es también  $g = 1$ .

**Ejemplo 1.2:** Consideremos  $P(x, y, z) \in \mathbb{C}[x, y, z]$  con  $P(x, y, z) = y^2x^3 - x^5 + z^5$ . En  $U'_3$  tenemos la ecuación  $y^2 = x^5 - 1$  y  $V_p \cap U'_3$  aparece como un revestimiento analítico ramificado de 2 hojas, con ramificación en los 5 puntos  $1, \xi, \xi^2, \xi^3, \xi^4 \in \mathbb{C}$  ( $1 + \xi + \xi^2 + \xi^3 + \xi^4 = 0$ ). La intersección de  $V_p$  con  $P_1^\infty(\mathbb{C})$  consta de 1 sólo punto, de manera similar que en el ejemplo 1.1, utilizando dos octaedros regulares con cortes como en la Fig. 6, obtenemos que  $V_p$  es una superficie de género  $g = 2$ .

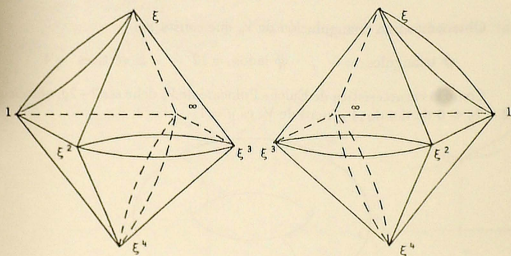


Fig. 1.4

En este caso ya aparece cierta patología; un cálculo sencillo permite darse cuenta que  $V_p \subset P_2(\mathbb{C})$  posee un punto singular  $(0, 1, 0)$ . Luego,  $V_p$  no corresponde a una superficie de Riemann; resolviendo la singularidad de  $V_p$  en  $(0, 1, 0)$ , se obtiene una nueva curva  $\widehat{V}_p$  no singular, que es llamada la normalización de  $V_p$ , y ella se realiza como un revestimiento analítico de  $\widehat{C}$ , ramificado en 6 puntos.

Del dibujo de  $\widehat{V}_p$  es fácil visualizar la existencia de un automorfismo  $J: \widehat{V}_p \rightarrow \widehat{V}_p$  de orden 2.

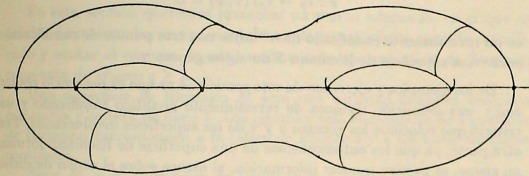


Fig. 1.5

A partir del dibujo es menos fácil visualizar un automorfismo  $\varphi: \widehat{V}_p \rightarrow \widehat{V}_p$  de orden 5. Sin embargo,  $J$  y  $\varphi$  pueden ser fácilmente descritos a partir de la ecuación de  $V_p$ :

$$J(x, y, z) = (x, -y, z) \quad \varphi(x, y, z) = (\xi x, y, z), \quad \xi^5 = 1$$

Claramente  $J$  corresponde a intercambiar las hojas y fija 6 puntos en la curva, que son  $(1, 0, 1)$ ,  $(\xi, 0, 1)$ ,  $(\xi^2, 0, 1)$ ,  $(\xi^3, 0, 1)$ ,  $(\xi^4, 0, 1)$  y  $(0, 1, 0)$ .  $\varphi$  fija solamente 3 puntos en la curva:  $(0, i, 1)$ ,  $(0, -i, 1)$  y  $(0, 1, 0)$ .

Definamos en  $\widehat{V}_p$  la relación siguiente:

$$p \equiv q \pmod{\langle \varphi \rangle} \Leftrightarrow \exists g \in \langle \varphi \rangle \text{ tal que } g(p) = q.$$

Si  $\pi$  es la aplicación cociente canónica

$$\pi: \widehat{V}_p \longrightarrow V_p / \langle \varphi \rangle \cong S$$

$\pi$  es un revestimiento ramificado de 5 hojas con tres puntos de ramificación sobre una superficie de Riemann  $S$  de algún género  $\gamma$ .

**Ejercicio 1.7** Demuestre que las curvas asociadas a  $P(x, y, z) = y^7 - x^3 z^4 + x^2 z^5$  y a  $Q(x, y, z) = y^7 - x^2 z^5 + x z^6$ , corresponden a superficies de Riemann de género 3 que admiten un automorfismo  $\phi$  de orden 7. Son diferentes? Existen otras superficies de Riemann con esta propiedad?

**Ejemplo 1.3** Sea  $P(x, y, z) = x^n + y^n + z^n$  (curvas de Fermat  $n \geq 4$ );  $V_p$  es una curva de género  $g = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$  que admite los automorfismos  $\varphi(x, y, z) = (\xi x, y, z)$  y  $\psi(x, \xi y, z)$ , con  $\xi$  raíz  $n$ -ésima primitiva de la unidad.

Si definimos en  $V_p$  la relación  $p \equiv q \text{ mod } (\langle \varphi, \psi \rangle) \Leftrightarrow \exists g \in \langle \varphi, \psi \rangle$  tal que  $g(p) = q$ , la aplicación canónica

$$\pi : V_p \rightarrow V_p / \langle \varphi, \psi \rangle \cong S$$

es un revestimiento ramificado de  $n^2$  hojas con tres puntos de ramificación sobre una superficie de Riemann  $S$  de algún género  $\gamma$ .

De los ejemplos y ejercicios de esta sección se ve que es necesario contar con : una definición rigurosa de revestimiento analítico ramificado y un criterio que relacione los géneros  $g$  y  $\gamma$  de las superficies involucradas. Por otra parte, ya que los automorfismos de una superficie de Riemann forman un grupo, es preciso conocer información, al menos sobre el orden de dicho grupo. La sección que sigue nos proveerá de las definiciones y teoremas adecuados.

## §2. Teoremas de Riemann y de Hurwitz

En esta sección queremos presentar un marco adecuado, en el que se pueden formalizar las nociones intuitivas de revestimiento analítico ramificado y acotar el número de automorfismos de una superficie de Riemann compacta de género  $g \geq 2$ .

Una superficie de Riemann  $M$  será una variedad analítica compleja compacta y conexa de  $\dim_{\mathbb{C}} 1$ . Los ejemplos más elementales de superficies de Riemann corresponden a la esfera de Riemann y a los toros analíticos complejos.

Sean  $M$  y  $N$  superficies de Riemann y  $f : M \rightarrow N$  una aplicación analítica no constante (evidentemente  $f$  es epiyectiva). Utilizando el hecho que una función analítica no nula en un disco posee un logaritmo, se puede demostrar que para cada  $p \in M$  y  $f(p) \in N$  existen cartas locales donde  $f$  se expresa como  $\tilde{f}(t) = t^k$ . El entero  $k$  es llamado el orden de ramificación de  $f$  en  $p \in M$  y será denotado por  $\text{ord}_p(f)$ . El subconjunto finito de  $M$  (discreto en un compacto) formado por los puntos  $p$  donde  $\text{ord}_p(f) > 1$  será denotado por  $R(f)$  y el subconjunto finito de  $N$  correspondiente a  $f(R(f))$  será denotado por  $B(f)$ .

El entero  $\sum_{p \in f^{-1}(q)} \text{ord}_p(f)$ , es independiente de  $q \in N$ ; si su valor es  $n$ , diremos que:

$$f : M \rightarrow N$$

es un revestimiento analítico ramificado de grado  $n$ .

El entero

$$B = \sum_{q \in N} \left( \sum_{p \in f^{-1}(q)} (\text{ord}_p(f) - 1) \right)$$

será llamado el orden total de ramificación del revestimiento analítico ramificado.

**Ejercicio 2.1** Sea  $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ ;  $f(z) = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right)$ . Demuestre que  $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  es un revestimiento analítico ramificado, determine su grado,  $R(f)$ ,  $B(R(f))$  y su orden total de ramificación.

Ahora procederemos a demostrar en forma elemental el siguiente teorema.

**Teorema (Riemann-Hurwitz).**

Sean  $M$  y  $N$  superficies de Riemann compactas y conexas de géneros  $g$  y  $\gamma$  respectivamente, y  $f : M \rightarrow N$  un revestimiento ramificado de grado  $n$



con orden total de ramificación  $B$ , entonces se tiene:

$$g = n(\gamma - 1) + 1 + B/2 \quad (1)$$

### Demostración

Existe una triangulación  $T_N$  de  $N$  con  $t$  triángulos,  $\ell$  lados y  $v$  vértices, tal que los vértices de  $T_N$  están contenidos en  $B(f)$ . Levantando la triangulación  $T_N$  a  $M$ , obtenemos una triangulación  $T_M$  que consta de  $t' = nt$  triángulos y  $\ell' = n\ell$  lados.

Si  $v_0$  es un vértice de  $T_N$  con  $v_0 \in B(f)$ , las preimágenes de  $v_0$  por  $f$  son  $n - \sum_{p \in f^{-1}(v_0)} \text{ord } f(p)$  vértices de la triangulación  $T_M$ , luego el número de vértices  $v'$  en  $T_M$  es igual a  $v' = nv - B$ .

Entonces, la característica de Euler-Poincaré de  $M$  es

$$\begin{aligned} \chi(M) &= 2 - 2g = nt - n\ell + nv - B \\ &= n(t - \ell + n) - B \\ 2 - 2g &= n(2 - 2\gamma) - B \end{aligned}$$

de donde se tiene el resultado.

Diremos que una superficie de Riemann  $M$  de género  $g$  es hiperelíptica si existe un revestimiento ramificado  $\pi : M \rightarrow \mathbb{C}$  de grado 2. Es claro entonces que  $B(\pi)$  consta de  $2g + 2$  puntos diferentes, en particular las superficies de Riemann vistas en el ejemplo 1.2 y en parte del ejercicio 1.7 son hiperelípticas.

**Ejercicio 2.2 :** Si  $M$  es una superficie de Riemann hiperelíptica de género  $g \geq 2$ , demuestre que existe un automorfismo  $J : M \rightarrow M$  (llamado involución hiperelíptica) de orden 2, que fija  $2g + 2$  puntos en  $M$ . Es  $J$  única?

Es claro que si  $M$  es de género  $g \leq 1$  entonces  $\text{Aut}(M)$  es un grupo algebraico no finito, sin embargo un Teorema de Schwartz garantiza que  $\text{Aut}(S)$  es finito, si  $g \geq 2$ .

Si  $M$  es una superficie de Riemann de género  $g \geq 2$ ,  $\text{Aut}(M)$  siendo finito, opera de manera propiamente discontinua en  $M$  y

$$\pi : M \rightarrow M/G$$

es un revestimiento analítico ramificado de grado  $N = |G|$ .

La aplicación  $\pi$  es ramificada solamente en los puntos fijos de  $G$  y para cada  $p \in M$ ,  $\text{ord}_\pi(p) = |G_p|$ , donde  $G_p$  es el subgrupo de isotropía de  $p$ . Si  $p_1, p_2, \dots, p_r$  es un conjunto maximal de puntos no equivalentes por  $G$

y  $\nu_j = |G_{p_j}|$ , entonces hay  $N/\nu_j$  puntos diferentes en  $M$ , equivalentes a  $p_j$  ( $j = 1, \dots, r$ ) bajo  $G$ , cada uno de ellos con subgrupo de isotropía de orden  $\nu_j$ . El orden total de ramificación está dado por:

$$B = \sum_{j=1}^r (N/\nu_j)(\nu_j - 1) \quad (2)$$

**Ejercicio 2.3** Determinar, usando el teorema de Riemann-Hurwitz, el género  $\gamma$  de las superficies de los ejemplos 1.2 y 1.3.

**Ejemplo 2.1** Sea  $F_n$  la curva plana no singular de grado  $n$  de  $\mathbf{P}_2(\mathbf{C})$  definida por  $x^n + y^n + z^n = 0$ . Ella es una superficie de Riemann compacta de género  $g = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$ . Consideremos el subgrupo  $G \cong \mathbf{Z}_n \oplus \mathbf{Z}_n$  de  $PGL(3, \mathbf{C})$  generado por las matrices

$$A = \begin{bmatrix} \xi & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \xi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

con  $\xi$  raíz primitiva  $n$ -ésima de la unidad.

$F_n$  es invariante por  $A$  y  $B$ , y  $G$  actúa como grupo de automorfismos de  $F_n$ .

Examinemos los puntos fijos de  $G$  en  $\mathbf{P}_2(\mathbf{C})$ ; se tiene que :

$$Fix(G) = \{e_1, e_2\} \cup \{e_2, e_3\} \cup \{e_3, e_1\}$$

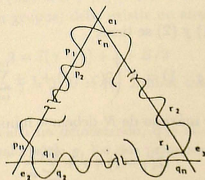


Fig. 2.1

Como  $F_n$  corta genéricamente cada recta  $(e_i, e_j)$  en  $n$  puntos, si denotamos por  $\pi : F_n \rightarrow F_n/G$ ,  $R(f)$  consta de  $3n$  puntos, cada uno con subgrupo de isotropía isomorfo a  $\mathbf{Z}_n$ .

Los puntos  $r_i$  son equivalentes entre sí bajo  $G$ , lo mismo ocurre con los puntos  $p_j$  y con los puntos  $q_l$ , sin embargo no existe  $g \in G$  que haga equivalentes a  $r_i$  con  $q_i$  o con  $p_i$ . Podemos elegir entonces, 3 puntos  $r_1, q_1$  y  $p_1$  no equivalentes y  $B(f) = \{\pi(q_1), \pi(p_1), \pi(r_1)\}$ ; además el orden total de ramificación de  $\pi$  es  $\frac{3n^2}{n}(n-1) = 3n(n-1)$ .

Como consecuencia del teorema de Riemann-Hurwitz

$$\pi : F_n \rightarrow F_n/\mathbb{Z}_n \oplus \mathbb{Z}_n$$

es un revestimiento analítico ramificado de grado  $n^2$  sobre la esfera de Riemann con 3 puntos de ramificación de orden  $n$  cada uno.

**Ejercicio 2.4** Demuestre que el grupo simétrico  $\mathfrak{S}_3$  actúa como grupo de automorfismos de  $F_n$  y estudie con todo detalle el revestimiento analítico ramificado que él determina.

Ahora procederemos a acotar el orden de un grupo de automorfismos de una superficie de Riemann compacta de género  $g \geq 2$ .

**Teorema (Hurwitz).**

Sea  $M$  una superficie de Riemann compacta de género  $g \geq 2$  y  $G$  un subgrupo de  $\text{Aut}(M)$ , entonces:

- a)  $|G| \leq 84(g-1)$
- b) Si esta cota es alcanzada,  $\pi : M \rightarrow M/G$  es un revestimiento analítico ramificado de grado  $|G|$ ,  $M/G \cong \hat{\mathbb{C}}$  y  $B(\pi)$  consiste de 3 puntos con órdenes de ramificación 7, 3 y 2.

**Demostración:**

Si  $|G| = N$ , de (1) y (2) se tiene:

$$2(g-1) = N \left( 2(\gamma-1) + r + \sum_{i=1}^{i=r} \frac{1}{\nu_i} \right)$$

Para obtener el valor máximo de  $N$  debemos minimizar

$$2(\gamma-1) + r + \sum_{i=1}^{i=r} \frac{1}{\nu_i}$$

Es claro que el valor mínimo debe alcanzarse cuando  $\gamma = 0$ .

Si  $\gamma = 0$  debemos minimizar

$$K = \sum_{i=1}^{i=r} \left( 1 - \frac{1}{\nu_i} \right) - 2$$

ya que  $1/2 \leq 1 - 1/\nu_i \leq 1$  se tiene  $r \geq 3$ .

Si  $r > 4$  es claro que  $K \geq 1/2$ , si  $r = 4$ , los valores  $m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = 2$  anulan  $K$  y su valor mínimo es alcanzado con  $m_1 = m_2 = m_3 = 2$  y  $m_4 = 3$ .

Si  $r = 3$  los siguientes valores anulan  $K$

$$\begin{array}{lll} m_1 = 3 & m_2 = 3 & m_3 = 3 \\ m_1 = 2 & m_2 = 4 & m_3 = 4 \\ m_1 = 2 & m_2 = 3 & m_3 = 6 \end{array}$$

y ningún valor positivo de  $K$  puede ser menor que los alcanzados con:

$$\begin{array}{lll} m_1 = 3 & m_2 = 3 & m_3 = 4 \\ m_1 = 2 & m_2 = 4 & m_3 = 5 \\ m_1 = 2 & m_2 = 3 & m_3 = 8 \\ m_1 = 2 & m_2 = 3 & m_3 = 7 \end{array}$$

que corresponden a  $K = 1/12$ ,  $K = 1/20$ ,  $K = 1/24$  y  $K = 1/42$  respectivamente, de donde  $N \leq 84(g - 1)$ .

Para ilustrar la fuerza de este teorema, demostraremos el siguiente lema, que nos será útil en la sección §4.

**Lema 2.1:**

Sea  $M$  una superficie de Riemann compacta de género  $g = 2$ , entonces  $|\text{Aut}(M)| \leq 48$ .

**Demostración:**

Supongamos que  $\text{Aut}(M) \cong G$  y  $|G| = 84$ ; como  $84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$ , por el teorema de Cauchy (para grupos) debe existir un automorfismo  $\varphi \in G$  de orden 7, de donde:

$$2 = 7(\gamma - 1) + 1 + B/2$$

para  $\gamma = 1$ ,  $B = 2$  y para  $\gamma = 0$ ,  $B = 16$ . Ambos casos son imposibles ya que 6 no divide a 16.

**Observación** Macbeath ha demostrado, que la cota  $84(g - 1)$  es alcanzada para infinitos valores de  $g$ , los dos primeros son  $g = 3$  y  $g = 7$ .

**Ejercicio 2.5** Demuestre que si  $M$  es una superficie de Riemann compacta y conexa de género  $g = 4$ , entonces

$$|\text{Aut}(M)| = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$$

con  $0 \leq a \leq 5$ ,  $0 \leq b \leq 3$ ,  $0 \leq c \leq 1$ , y  $|\text{Aut}(M)| \leq 120$ .



### §3. Grupos fuchsianos

En esta sección estudiaremos las superficies de Riemann compactas, desde el punto de vista del álgebra y la geometría hiperbólica, es decir esencialmente como cocientes del disco unitario (o semi-plano superior) por un subgrupo discreto de automorfismos. Este punto de vista es probablemente el más cercano al emprendido por Poincaré a fines del siglo pasado.

Comenzaremos revisando algunas nociones elementales de geometría hiperbólica, con el objeto de mantener la continuidad del texto.

Denotaremos por  $\Delta = \{z \in \mathbb{C} / |z| < 1\}$  al disco unitario y por  $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} / \text{Im } z > 0\}$  al semi-plano superior de Poincaré. Es usual que al término de un curso de variable compleja, se hayan demostrado los siguientes hechos, que en caso contrario son dejados como ejercicios al lector.

Los abiertos  $\mathbb{H}$  y  $\Delta$  son analíticamente equivalentes (ejercicio 3.1); por otra parte, los automorfismos analíticos de  $\mathbb{H}$ , denotados por  $\text{Aut}(\mathbb{H})$  pueden ser identificados con el grupo topológico  $PSL(2, \mathbb{R})$  (ejercicio 3.2). También se tiene (ejercicio 3.3):

$$\text{Aut}(\Delta) = \left\{ \varphi(z) = \frac{az + \bar{c}}{cz + \bar{a}} : |a|^2 - |c|^2 = 1 \right\}$$

Recordemos cómo se define la longitud euclidiana de una curva diferenciable  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Si  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$  donde  $x$  e  $y$  son funciones diferenciables, la longitud euclidiana  $\ell_e(\gamma)$  está dada por:

$$\ell_e(\gamma) = \int_0^1 \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

Queremos en lo que sigue definir una longitud hiperbólica para una curva  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{H}$  o  $\alpha : I \rightarrow \Delta$ . Para ello se puede comenzar verificando que la diferencial  $d\mu = \frac{|dz|}{\text{Im } z}$  es invariante para cada  $\varphi \in \text{Aut}(\mathbb{H})$  y  $d\nu = \frac{|dz|}{1-|z|^2}$  es invariante para cada  $\psi \in \text{Aut}(\Delta)$ . Entonces claramente se tiene:

$$\int_{\sigma} d\mu = \int_{\varphi(\sigma)} d\mu \quad \int_{\tau} d\nu = \int_{\psi(\tau)} d\nu$$

para cada  $\sigma : I \rightarrow \mathbb{H}$  y  $\tau : I \rightarrow \Delta$  curvas diferenciables y para cada  $\varphi \in \text{Aut}(\mathbb{H})$  y  $\psi \in \text{Aut}(\Delta)$ .

Vamos ahora a demostrar que dados dos puntos  $z$  y  $w$  en  $\mathbb{H}$  ( $z \neq w$ ), existe una única curva de largo mínimo (geodésica) según  $d\mu$ , uniendo a  $z$  y  $w$ .

Comenzaremos verificando que el segmento hiperbólico que une  $ia = z$  e  $ib = w$  es el segmento del eje imaginario que los une.

**Demostración:**

Sea  $\alpha : I \rightarrow \mathbf{H}$  el segmento que une  $ia$  con  $ib$ ,  $\alpha(t) = (0, y(t))$  con  $dy/dt > 0$ ,  $y(0) = a$ ,  $y(1) = b$ ; entonces la longitud hiperbólica de él será:

$$\ell_h(\alpha) = \int_0^1 \frac{\sqrt{\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}}{y(t)} dt = \int_0^1 \frac{\left|\frac{dy}{dt}\right|}{y(t)} dt = \int_0^1 \frac{\frac{dy}{dt}}{y(t)} dt = \int_a^b \frac{dy}{y} = \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Por otra parte, si  $\beta : I \rightarrow \mathbf{H}$  es cualquier otra curva diferenciable uniendo  $ia$  con  $ib$  con  $\beta(t) = (\tilde{x}(t), \tilde{y}(t))$  entonces:

$$\begin{aligned} \ell_h(\beta) &= \int_0^1 \frac{\sqrt{\left(\frac{d\tilde{x}}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\tilde{y}}{dt}\right)^2}}{\tilde{y}(t)} dt \geq \int_0^1 \frac{\sqrt{\left(\frac{d\tilde{y}}{dt}\right)^2}}{\tilde{y}(t)} dt \\ &= \int_0^1 \frac{\left|\frac{d\tilde{y}}{dt}\right|}{\tilde{y}(t)} dt \geq \int_0^1 \frac{\frac{d\tilde{y}}{dt}}{\tilde{y}(t)} dt \end{aligned}$$

de donde se tiene que:  $\ell_h(\beta) \geq \ell_h(\alpha)$  y la igualdad vale si y solamente si  $\frac{d\tilde{x}}{dt} = 0$  y  $\frac{d\tilde{y}}{dt} > 0$ .

**Ejercicio 3.4:** Demostrar que si  $z, w \in \mathbf{H}$  tienen la misma parte real, entonces el segmento hiperbólico que une estos puntos, es el único segmento euclidiano que los une.

Supongamos ahora que  $z$  y  $w$  no tienen la misma parte real.

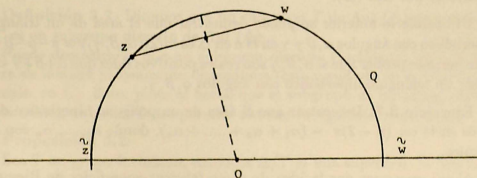


Fig. 3.1

Luego, la recta perpendicular al segmento  $[z, w]$  por el punto medio de  $[z, w]$ , corta al eje real en un único punto  $O$ , que es el centro de un único círculo euclidiano  $Q$  (al que pertenecen  $z$  y  $w$ ) el cual es perpendicular al eje real. Ahora es fácil verificar que existe  $\varphi \in PSL(2, \mathbf{R})$  tal que  $\varphi(\tilde{z}) = 0$

y  $\varphi(\tilde{w}) = \infty$  y que la imagen de  $Q$ ,  $\varphi(Q)$ , es el eje imaginario. Luego, el segmento hiperbólico que une  $\varphi(\tilde{z})$  con  $\varphi(\tilde{w})$ , es el segmento del eje imaginario que los une; como la longitud hiperbólica es invariante por  $PSL(2, \mathbf{R})$ , existe un único segmento hiperbólico que une  $z$  y  $w$  y éste corresponde al arco de  $Q$  uniendo  $z$  y  $w$ .

Podemos resumir lo anterior en forma de proposición.

**Proposición 3.1:**

Las geodésicas en  $\mathbf{H}$  para  $d\mu$  corresponden a los segmentos de rectas perpendiculares al eje real o a los arcos de círculos perpendiculares al eje real.

**Ejercicio 3.5:** Encontrar en  $\Delta$  las geodésicas para  $d\nu$ .

Si  $A$  es un subconjunto de  $\mathbf{H}$ , puede definirse el área hiperbólica  $m(A)$  por:

$$m(A) = \int \int_A \frac{dx dy}{y^2}$$

Sea  $z = x + iy$  y  $\varphi \in PSL(2, \mathbf{R})$  con  $\varphi(z) = \frac{az+b}{cz+d} = u + iv$ . Es fácil verificar que el jacobiano  $J(\varphi) = \frac{1}{|cz+d|^4}$  y, entonces:

$$m(A) = \int \int_{\varphi(A)} \frac{du dv}{v^2} = \int \int_A \frac{1}{|cz+d|^4} \cdot \frac{|cz+d|^4}{y^2} dx dy$$

y luego el área hiperbólica  $m(A)$  es también invariante por  $PSL(2, \mathbf{R})$ .

**Ejercicio 3.6:** Verificar que el área de un subconjunto  $B \subset \Delta$  es invariante por  $\text{Aut}(\Delta)$ .

Utilizando lo anterior se puede demostrar que el área de un triángulo hiperbólico con ángulos  $\alpha, \beta$  y  $\gamma$  en  $\mathbf{H}$  o en  $\Delta$  es  $m(\Delta(\alpha, \beta, \gamma)) = \pi - \alpha - \beta - \gamma$ . Esto permite probar que si  $\alpha, \beta, \gamma$  son reales positivos tales que  $\alpha + \beta + \gamma < \pi$ , existe un triángulo hiperbólico con ángulos  $\alpha, \beta, \gamma$ .

**Ejercicio 3.7:** Demostrar que el área de un polígono hiperbólico de  $n$  lados en  $\mathbf{H}$  es:  $(n - 2)\pi - (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n)$ , donde  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  son sus ángulos.

Ahora queremos dar la idea de cómo fabricar superficies de Riemann compactas a partir del disco unitario  $\Delta$ . Para ello deberemos recordar varios resultados.

Un notable teorema de Poincaré y Koebe, garantiza que las únicas superficies de Riemann simplemente conexas son:  $\hat{\mathbf{C}}$ ,  $\mathbf{C}$  y  $\Delta$ . Como una superficie de Riemann compacta  $S$  tiene siempre un revestimiento universal  $\tilde{S}$ , que es simplemente conexo, la mayoría de las superficies de Riemann

$S$  (con  $\pi_1(S)$  no conmutativo) se realizarán como cocientes de  $\Delta$  por un subgrupo de  $\text{Aut}(\Delta)$  que opera sin puntos fijos.

**Ejercicio 3.8.** Sea  $S$  una superficie de Riemann compacta y  $\hat{S}$  su revestimiento universal. Demuestre que: si  $\hat{S} \cong \hat{C}$  entonces  $S \cong \hat{C}$ ; si  $\hat{S} \cong C$  entonces  $S$  es un toro analítico complejo o bien un cilindro; si  $\hat{S} \cong H \cong \Delta$  y  $\pi_1(S)$  es conmutativo entonces

$$S \cong \Delta - \{0\} \quad \text{o} \quad S \cong \{z \in \Delta / r < |z| < 1\} \quad (0 < r < 1)$$

Evidentemente, pueden existir subgrupos  $G$  de  $\text{Aut}(\Delta)$  que operen con puntos fijos en  $\Delta$ . El ejercicio que sigue invita al lector a estudiarlos.

**Ejercicio 3.9.** Caracterizar los elementos de orden finito en  $\text{Aut}(\Delta)$ .

**Definición 3.1:** Sea  $G$  un subgrupo de  $\text{Aut}(\hat{C})$ ,  $z_0 \in \hat{C}$ ; diremos que  $G$  actúa de manera propiamente discontinua en  $z_0$  si:

1. El subgrupo de isotropía de  $G$  en  $z_0$ ,  $G_{z_0} = \{g \in G / g(z_0) = z_0\}$  es finito.
2. Existe una vecindad  $U$  de  $z_0$  tal que  $g(U) = U$  para cada  $g \in G_{z_0}$  y  $g(U) \cap U = \emptyset$  para cada  $g \in G - G_{z_0}$ .

**Ejercicio 3.10.** Verifique que un subgrupo finito de  $\text{Aut}(\hat{C})$  opera de manera propiamente discontinua en  $\hat{C}$ . Sea  $G$  el subgrupo de  $\text{Aut}(\hat{C})$  generado por  $\varphi(z) = 2z$ . Demuestre que  $G$  opera de manera propiamente discontinua sobre  $\hat{C} - \{0, \infty\}$ .

**Definición 3.2.** Diremos que un subgrupo  $T$  de  $\text{Aut}(\Delta)$  es fuchsiano si  $T$  es un subgrupo discreto de  $\text{Aut}(\Delta)$ .

Puede demostrarse que un subgrupo discreto (fuchsiano) de  $\text{Aut}(\Delta)$  opera de manera propiamente discontinua (este resultado no es válido, por ejemplo, en  $\hat{C}$ ). Esto, junto al hecho que el subgrupo de isotropía, cuando no es trivial, es cíclico finito permite obtener la siguiente proposición.

**Proposición 3.2:**

Sea  $T$  un grupo fuchsiano, entonces  $\Delta/T$  es una superficie de Riemann y el epimorfismo canónico

$$\pi : \Delta \rightarrow \Delta/T$$

es una aplicación analítica.

Ahora esbozaremos las ideas para fabricar superficies de Riemann  $S$  compactas admitiendo ciertos grupos de automorfismos.



Para ello partimos de un subgrupo  $T$  de  $\text{Aut}(\Delta)$  con una presentación:

$$T_P = \langle a, b / a^m = b^n = (ab)^\ell = 1 \rangle$$

Sean  $m \geq n \geq \ell$  y  $1/m + 1/n + 1/\ell < 1$ , entonces: como  $a$  es elíptico de orden  $m$ , llamaremos  $q_1$  el único punto fijo de  $a$  en  $\Delta$  y hagámoslo coincidir con  $0 \in \Delta$ , como  $b$  también es elíptico de orden  $n$ , llamaremos  $q_2$  al único punto fijo de  $b$  en  $\Delta$  y, finalmente, sea  $q_3$  el único punto fijo de  $ba$ , entonces tenemos el siguiente cuadrilátero hiperbólico:

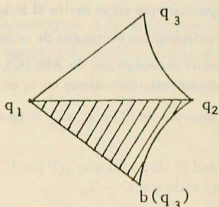


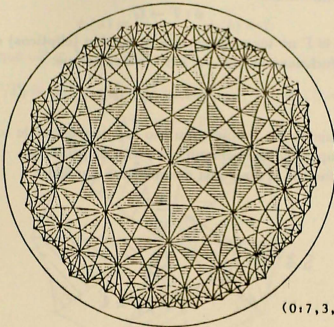
Fig. 3.2

donde el triángulo  $\Delta(q_1, q_2, q_3)$  tiene ángulos  $\pi/m$ ,  $\pi/n$  y  $\pi/\ell$  respectivamente (luego existe!).

Otro notable teorema de Poincaré garantiza que el disco  $\Delta$  puede ser pavimentado con los triángulos  $\Delta(q_1, q_2, q_3)$  y además  $\pi : \Delta \rightarrow \Delta/T$  es un revestimiento ramificado sobre la esfera de Riemann con 3 puntos de ramificación de órdenes  $m, n$  y  $\ell$  respectivamente.

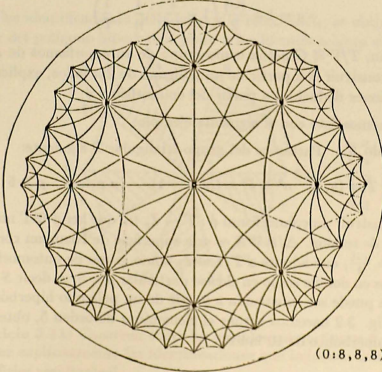
A continuación presentamos dos pavimentaciones del disco  $\Delta$  con grupos fuchsianos.

Pavimentación 1



(0:7,3,2)

Pavimentación 2



(0:8,8,8)

Supongamos que nos haya sido dado un grupo abstracto  $G$ ; si construimos un epimorfismo:

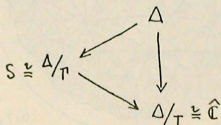
$$\phi : T \rightarrow G$$

tal que  $\ker \phi \cong \Gamma$  no tenga elementos de torsión (elípticos) entonces  $\Gamma$  es un subgrupo fuchsiano normal en  $T$  y tendremos que:

$$\pi_\Gamma : \Delta \rightarrow \Delta/\Gamma \cong S$$

es un revestimiento sin ramificación (no hay elementos de torsión) y  $S \cong \Delta/\Gamma$  es una superficie de Riemann compacta de género  $g$ .

Además tenemos el diagrama conmutativo siguiente:



de donde por el teorema de Riemann-Hurwitz

$$g = 1 + \frac{|G|}{2} \left( 1 - \frac{1}{m} - \frac{1}{n} - \frac{1}{\ell} \right).$$

Más aún,  $T/\Gamma \cong G$  actúa como grupo de automorfismos de  $\Delta/\Gamma \cong S$ . Podemos construir  $S$  a partir de un polígono de  $2m$  lados, explicitando las identificaciones deducidas a partir del epimorfismo  $\phi$ .

Ilustraremos esto con el siguiente ejemplo:

**Ejemplo 3.1:** Partamos del grupo triangular  $T$  siguiente:

$$T = \langle a, b/ \quad a^p = b^p = (ab)^p = 1 \rangle \quad p \text{ primo} \quad p \geq 5$$

Es fácil construir un epimorfismo  $\phi : T \rightarrow \mathbb{Z}_p$  tal que  $\ker \phi \cong \Gamma$  no contenga elementos de torsión.  $\Delta/\Gamma \cong S$  es una superficie de Riemann compacta de género  $g = \frac{p-1}{2}$ , que admite a  $T/\Gamma \cong \mathbb{Z}_p$  como grupo de automorfismos.

Veamos en detalle cómo en el caso particular  $p = 5$ , es decir  $S$  de género  $g = 2$ , ella puede ser construida a partir de un polígono hiperbólico en  $\Delta$ . Si en la Fig. 3.2 hacemos actuar el elemento  $a$  de orden 5, obtenemos un polígono hiperbólico de 10 lados.

Denotamos  $\mathbb{Z}_5$  multiplicativamente  $\mathbb{Z}_5 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  y consideremos el epimorfismo  $\phi_1 : T \rightarrow \mathbb{Z}_5$  definido por:

$$\phi_1(a) = 1 \quad \phi_1(b) = 1.$$

Se tiene que  $ab^4 \in \ker \phi_1 \cong \Gamma_1$  y

$$T/\Gamma_1 \cong \langle \bar{a}, \bar{b} \mid \bar{a}^5 = \bar{b}^5 = (\bar{a}\bar{b})^5 = 1, \quad R_1 : \bar{a} = \bar{b} \rangle$$

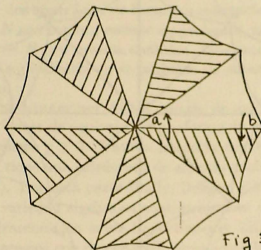


Fig 3.3

Leyendo las identificaciones dictadas por la relación  $R_1$ , se obtiene  $S$  como cociente del polígono hiperbólico junto a las identificaciones siguientes:

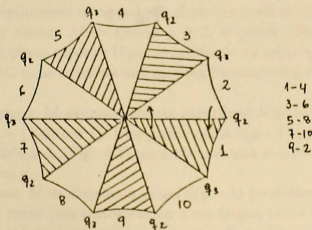


Fig. 3.4

**Ejercicio 3.11:** Construir todos los posibles epimorfismos  $\phi : T \rightarrow \mathbb{Z}_5$  y determinar explícitamente las identificaciones que inducen. Son diferentes las superficies resultantes?





## §4. Superficies de Riemann de género dos

En esta sección clasificaremos las superficies de Riemann de género 2; ésto nos servirá para ilustrar lo desarrollado en las secciones anteriores. Para ello, comenzaremos desarrollando algunos preliminares sobre el espacio de módulos de Riemann.

Sean  $M$  y  $N$  dos superficies de Riemann compactas de género  $g \geq 2$ ; diremos que  $M$  y  $N$  son conformemente equivalentes, si existe una aplicación analítica  $\varphi : M \rightarrow N$  con inversa analítica. Obviamente con ello se define una relación de equivalencia en el conjunto de superficies de Riemann de género  $g \geq 2$  fijo.

Es tradicional denotar por  $\mathcal{M}_g$  al espacio de módulos de Riemann que parametriza las clases de equivalencia conforme de superficies de Riemann compactas de género  $g \geq 2$ . Usando la teoría de Teichmüller, Bers demostró que  $\mathcal{M}_g$  tiene una estructura de espacio analítico complejo normal de  $\dim_{\mathbb{C}}(3g - 3)$ . Por otra parte Bailly, Deligne y Mumford demostraron que  $\mathcal{M}_g$  es una variedad algebraica cuasi-projectiva de  $\dim_{\mathbb{C}}(3g - 3)$ .

No profundizaremos en estos importantes y difíciles resultados, sino que nos contentaremos con dar un bello argumento heurístico, que debiera convencer al lector sobre el número de módulos necesarios para describir el espacio  $\mathcal{M}_g$ .

Consideremos el teorema de uniformización de Poincaré y Koebe y la existencia del revestimiento universal. Es claro que cada superficie de Riemann compacta y conexa  $M$  de género  $g \geq 2$ , se puede obtener como el cociente del semi-plano superior  $\mathbb{H}$  por la acción de un subgrupo discreto  $G$  de  $PGL(2, \mathbb{R})$ ,  $\mathbb{H}/G$  tiene entonces una métrica Riemanniana con curvatura negativa.

Se puede construir  $M$  pegando ciertas superficies hiperbólicas básicas: los pantalones ( $\hat{\mathbb{C}} - \{3 \text{ discos}\}$ ). Uno puede pegar  $2(g - 1)$  pantalones a lo largo de las geodésicas  $\ell_i$  (Fig. 4.1) para obtener una superficie compacta y conexa de género  $g$ .

Para determinar  $M$  se dispone a priori  $6(g - 1)$  geodésicas  $\ell_i$ , es decir  $6(g - 1)$  números reales que corresponden a sus largos; como se identifican geodésicas con el mismo largo, sólo se necesitan  $3(g - 1)$  reales. Antes de identificarlas uno puede rotarlas, entonces también tiene  $3(g - 1)$  números reales, correspondientes a los ángulos de la rotación, obteniendo finalmente  $3(g - 1)$  números complejos.

**Ejercicio 4.1:** Verifique que  $\mathcal{M}_3$  puede asimilarse a la variedad de cuárticas planas en  $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ .

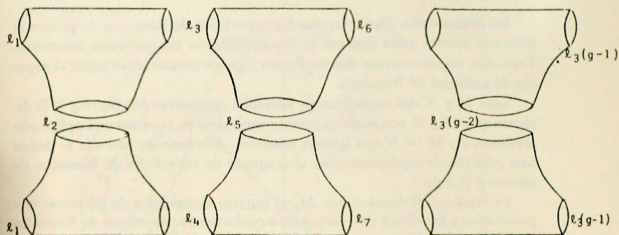


Fig. 4.1

Es evidente que las superficies de Riemann hiperelípticas constituyen un subconjunto de  $\mathcal{M}_g$ , que denotaremos por  $\mathcal{H}_g$ .

**Proposición 4.1**

Si  $\mathcal{H}_g$  denota la subvariedad de  $\mathcal{M}_g$  correspondiente a las superficies hiperelípticas, entonces  $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H}_g = 2g - 1$ , en particular  $\mathcal{M}_2 = \mathcal{H}_2$ .

**Demostración** Sea  $M \in \mathcal{H}_g$ , entonces  $M$  se realiza como un revestimiento analítico ramificado de grado 2

$$\pi : M \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$$

con  $2g + 2$  puntos de ramificación diferentes, sean ellos  $\{p_1, p_2, \dots, p_{2g+2}\} \subset \hat{\mathbb{C}}$ . Luego  $M$  está completamente determinada por ellos; como siempre es posible, por medio de un automorfismo  $\varphi$  de  $\hat{\mathbb{C}}$ , tener  $\varphi(p_1) = 0, \varphi(p_2) = \infty, \varphi(p_3) = 1, \varphi(p_i) = q_i$ , entonces  $M$  está determinada por los  $2g - 1$  puntos  $q_1, \dots, q_{2g-1}$ . Siendo  $\mathcal{H}_2$  una subvariedad de  $\dim_{\mathbb{C}} 3$  de  $\mathcal{M}_2$  que es irreducible de dimensión 3, se tiene entonces  $\mathcal{H}_2 \cong \mathcal{M}_2$ .

Ahora procederemos a estudiar las superficies de Riemann de  $\mathcal{M}_2$  que admiten grupos de automorfismos no triviales. Recordemos que como consecuencia del lema , tenemos que si  $M \in \mathcal{M}_2$  entonces  $|\text{Aut}(M)| \leq 48$ . Primero comenzaremos estudiando la estructura algebraica de  $\text{Aut}(M) \cong G$ . Como caso particular de resultados más generales sobre curvas  $p$ -gonales [9], se tiene:

**Proposición 4.2**

Sea  $M \in \mathcal{H}_g$ , entonces  $\text{Aut}(M)$  es isomorfo a un subgrupo finito de  $\text{Aut}(\hat{C})$  o a una extensión de  $\mathbb{Z}_2$  por un subgrupo finito de  $\text{Aut}(\hat{C})$ .

**Demostración**

Sea  $\pi : M \rightarrow \hat{C}$  el revestimiento ramificado de orden 2 que caracteriza  $M$ . Cada  $f \in \text{Aut}(M)$  induce un automorfismo  $\phi(f)$  en  $\text{Aut}(\hat{C})$  por el diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & M \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ \hat{C} & \xrightarrow{\phi(f)} & \hat{C} \end{array}$$

de donde tenemos la sucesión exacta de grupos:

$$\{e\} \rightarrow \ker \phi \rightarrow \text{Aut}(M) \rightarrow \text{Im } \phi \rightarrow \{e\}$$

Es fácil verificar que  $\ker \phi$  es isomorfo a  $\{e\}$  o bien a  $\mathbb{Z}_2$ , de donde se tiene la proposición.

Diremos que  $G$  es un grupo reducido de automorfismos de  $M$  si  $G \cong \text{Aut}(M)/\langle J \rangle$ , donde  $J$  es la involución hiperelíptica de  $M$ .

Ahora podemos demostrar el siguiente teorema.

**Teorema 4.3**

Las subvariedades 0 dimensionales de  $\mathcal{M}_2$  que admiten grupos de automorfismos no triviales son:

1.  $y^2 = x^6 - 1$  con  $D_6$  como grupo reducido.
2.  $y^2 = x(x^5 - 1)$  con  $\mathbb{Z}_5$  como grupo reducido.
3.  $y^2 = x(x^4 - 1)$  con  $\mathfrak{S}_4$  como grupo reducido.

**Demostración :**

Los únicos grupos de automorfismos de  $M$  que pueden aparecer son  $\mathbb{Z}_2$  o  $\{e\}$  extensiones de subgrupos finitos de  $\text{Aut}(\hat{C})$  estabilizando  $2g + 2$  puntos diferentes de  $\hat{C}$ . Es bien conocido que los únicos subgrupos finitos de  $\text{Aut}(\hat{C})$  son cíclicos, diédricos,  $\mathfrak{A}_4$ ,  $\mathfrak{S}_4$  y  $\mathfrak{A}_5$ .

Para determinar las sub-variedades 0-dimensionales de  $\mathcal{M}_2 \cong \mathcal{H}_2$  admitiendo grupos maximales de automorfismos, debemos situar 6 puntos en  $\hat{C}$  rígidamente y con el máximo de simetría.



1. Situando 6 puntos simétricamente en el Ecuador, obtenemos la ecuación algebraica  $y^2 = x^6 - 1$ , admitiendo  $Z_6$ , pero los 6 puntos son también estabilizados por la involución de  $\hat{C}$  que intercambia los polos y se obtiene  $y^2 = x^6 - 1$  con  $D_6$  como grupo reducido maximal.
2. Situando 5 puntos simétricamente en el Ecuador y otro en el polo sur, obtenemos la ecuación  $y^2 = x(x^5 - 1)$  con  $Z_5$  como grupo reducido maximal.
3. Situando 4 puntos simétricamente en el Ecuador, uno en el Polo Norte y otro en el Polo Sur, obtenemos la superficie de Riemann de ecuación  $y^2 = x(x^4 - 1)$  con  $D_4$  como grupo de automorfismos, pero si buscamos el grupo maximal, los 6 puntos pueden ser considerados como los vértices de un octaedro regular inscrito en  $\hat{C}$ , obteniéndose  $S_4$  como grupo reducido maximal.

Vale la pena señalar que la idea de esta demostración, no sólo es válida en  $\mathcal{H}_2 \cong \mathcal{M}_2$ , sino que también puede ser generalizada y aplicada al espacio de módulos hiperelíptico  $\mathcal{H}_g$  con  $g$  arbitrario [7].

## §5. Discusión

En esta sección complementaremos algunos de los resultados anteriores y discutiremos brevemente ciertos problemas abiertos.

Como se vió en §1, no toda superficie de Riemann se realiza como una curva plana no singular. Sin embargo, como consecuencia del Teorema de Riemann-Roch [2], cada superficie de Riemann compacta de género  $g \geq 2$ , no hiperelíptica, se realiza como una curva  $C_S$  no singular de grado  $2g - 2$  en  $P_{g-1}(C)$ . Esta curva  $C_S$ , llamada curva canónica, está contenida en la intersección de hipersuperficies cuádricas en la "mayoría" de los casos (Teorema de Petri [2]).

Explicitar las curvas (superficies de Riemann) que admiten grupos grandes de automorfismos, y caracterizarlos, es una área activa de investigación; Accola, Bujalance, Harvey, Maclachlan, Patra y varios otros matemáticos han hecho contribuciones en esta dirección. Cabe mencionarse que Accola está preparando una monografía acerca del tema, que aparecerá próximamente.

Los teoremas de Riemann y Hurwitz de §2 y el resultado de Macbeath [6] son clásicos de la teoría. Sin embargo, subsisten algunos problemas relacionados con determinar el número máximo de automorfismos de ciertas superficies de Riemann (curvas algebraicas). Al respecto, el autor ha probado que la curva de Fermat  $F_n$  admite siempre al grupo  $G \cong \mathbb{Z}_n \oplus \mathbb{Z}_n \rtimes \mathfrak{S}_3$  de orden  $6n^2$ , y que este grupo es el grupo máximo de automorfismos si  $n = 4$  y  $n = 5$ . Existe  $G \subseteq \text{Aut}(F_n)$  con  $|G| > 6n^2$ , si  $n > 5$ ?

Los métodos vistos en §3, que permiten a partir de un grupo fuchsiano

$$T = \langle a, b : a^m = b^n = (ab)^l = 1 \rangle$$

uniformizar superficies de Riemann admitiendo grupos de automorfismos cíclicos, son casos particulares de los desarrollados por González, Riera y Rodríguez [9]. Al respecto surgen interesantes problemas, relacionados con determinar el número de diferentes clases de equivalencia conforme de superficies de Riemann que admiten un grupo de automorfismos prefijado  $G$ . Se conocen sólo resultados en el caso  $G \cong \mathbb{Z}_p$ . También resulta de interés realizar dichas clases de equivalencia conforme a través de curvas algebraicas con propiedades geométricas particulares.

La clasificación dada en §4 se remonta a la caracterización explícita de  $\mathcal{M}_2$ , hecha por Igusa [3] (única conocida hasta ahora). Sin embargo, hemos

presentado una demostración a la Riemann, basada en ideas de González e Hidalgo [7], que permiten caracterizar las curvas del espacio de módulos hiperelíptico admitiendo grupos maximales de automorfismos.

Terminemos mencionando que un tratamiento a la Poincaré de éste problema fue desarrollado por Riera y Rodríguez [14].

## References

- [1] Farkas, H. M., and Kra, I., *Riemann Surfaces*. G.T.M. 71 Springer-Verlag, Berlin 1980.
- [2] Griffiths, P., and Harris, J., *Principles of Algebraic Geometry*. Wiley-Interscience, New York 1978.
- [3] Accola R. D. M., *On the number of automorphisms of a closed Riemann surface*. Trans. Amer. Math. Soc. 131 (1968) 398-408.
- [4] Bers, L. *Finite dimensional Teichmüller spaces and generalizations*. Bull. Amer. Math. Soc. (1981) 131-172.
- [5] Castro, A. *Uniformización de curvas de Fermat y variedades jacobianas*. Tesis de Magister en Matemática, U. Santa María (1989).
- [6] Deligne, P., and Mumford, D. *The irreducibility of the space of curves of given genus* Publ. I.H.E.S. 36 (1970) 75-109.
- [7] González, V. and Hidalgo, R. *On automorphisms of hyperelliptic Riemann surfaces* Preprint (1988)
- [8] González, V., Riera, G. and Rodríguez, R. *On Riemann matrices and uniformizations of Riemann Surfaces with automorphisms* Preprint (1989).
- [9] González, V., and Rodríguez, R. *On automorphisms of curves and linear series*. To appear in Complex Geometry Seminar, U. Santa María, Valparaíso Chile, Vol III.
- [10] Harvey, W. J. *Cyclic groups of automorphisms of compact Riemann surfaces*. Quart J. Math. Oxford (2) 17 (1966) 86-97.
- [11] Harvey, W. J. *On branch loci in Teichmüller space*. Transactions of the A.M.S., Vol 153 (1971) 387-398.
- [12] Hurwitz, A. *Über algebraische Gebilde mit eindeutigen Transformationen in sich*. Math. Ann. 41 (1892) 403-442.
- [13] Igusa, J. *Arithmetic variety of moduli for genus two*. Ann. Math. 72 (1960) 612-649.
- [14] Macbeath, A. M., *On a theorem of Hurwitz*. Proc. Glasgow Math. Assoc. 5 (1961) 90-96.



- [15] Maclachlan, A. *Abelian groups of automorphisms of compact Riemann surfaces*. Proc. London Math. Soc. 19 (1965) 699-712.
- [16] Riera, G. and Rodríguez, R. *Uniformization of surfaces of genus two with automorphisms*. Complex Geom. Sem. U. Santa María Vol.II (1986) 135-164.

1980 Mathematics subject classifications: primary 14C20; secondary 30F10