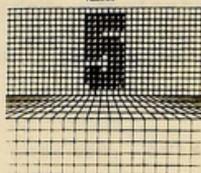


QUINTA
JORNADA DE
MATEMÁTICA
SEPTIEMBRE 27 - 30 - 1988
VALDIVIA



PROBLEMAS ESPECTRALES (DIFERENCIALES) EN INGENIERIA

(CURSO B1)

Dr. Carlos Conca
(U. DE CHILE)

PROBLEMAS ESPECTRALES EN INGENIERIA

CARLOS CONCA¹

1.- Introducción. El propósito de este curso es presentar algunos modelos matemáticos que aparecen en el análisis espectral de ciertas estructuras del tipo sólido-fluido, y estudiar con detalle los más simples de entre ellos.

Se trata de un conjunto de problemas diferenciales de valores propios que modelan las vibraciones de una estructura metálica sumergida en un fluido, y más precisamente, los problemas que estudiaremos gobiernan las frecuencias y modos propios de un haz de tubos metálicos inmerso en un fluido.

La simplicidad o complejidad de los distintos modelos matemáticos que se han propuesto para abordar este problema físico depende, esencialmente, del tipo de hipótesis simplificadoras que se impongan sobre el proceso. Así por ejemplo, los modelos más simples se obtienen suponiendo que el fluido es un fluido perfecto incompresible, cuyo movimiento es irrotacional, y que los tubos son rígidos, ensamblados elásticamente, y que tan sólo admiten oscilaciones pequeñas,

en determinadas direcciones.

En general, se trata de modelos relativamente poco realistas, pero que tanto desde un punto de vista teórico como numérico, se los puede tratar con cierta facilidad. Conforme se van gradualmente tomando en cuenta menos hipótesis simplificadoras sobre el problema físico en cuestión, se van obteniendo un grupo ordenado de modelos, de dificultad y de complejidad crecientes. Los modelos más realistas son aquellos que consideran la compresibilidad y viscosidad del fluido, y que permiten deformaciones elásticas de los tubos. Incluso, existen autores que han tratado numéricamente modelos que incorporan la posibilidad de desplazamiento relativo de la estructura metálica respecto del fluido.

El problema de determinar las frecuencias propias de un haz de tubos sumergido en un fluido es de gran importancia en ingeniería, pues este aparece en forma natural en la concepción y simulación de diversos equipos industriales tales como: intercambiadores de calor, condensadores, estanques de combustible en los núcleos de ciertos reactores nucleares, etc. Desde los trabajos pioneros que llevó a cabo J.Connors [Co], los ingenieros han hecho numerosos esfuerzos en estos últimos años en la investigación experimental y teórica de este tipo de problemas. Entre otros trabajos, cabe destacar los artículos y publicaciones de R.D.Blevins [B11], [B12], S.S.Chen [Ch1], [Ch2], D.J.Gorman [Ge], M.J.Pettigrew [Pe], M.P.Paidoussis [Pa] y J.Planchard [Pl1],..., [Pl4]. Recientemente, J.Planchard [Pl5] ha escrito un artículo que compila parte importante

del aporte de los ingenieros al estudio de esta clase de problemas, y al cual referimos al lector para consulta de bibliografía suplementaria sobre el tema.

Desde un punto de vista matemático, todos los modelos que consideraremos son problemas diferenciales de valores propios, en los cuales, los operadores que intervienen corresponden a ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden, del tipo elípticas. Su estudio involucra cuestiones de existencia de soluciones, distribución y localización de los valores propios, y comportamiento asintótico de los mismos, cuando el número de tubos tiende a infinito. Ocurre que en las aplicaciones se requiere resolver este tipo de modelos para el caso de estructuras tubulares con una gran cantidad de tubos. El análisis numérico de estos problemas, y en particular, el cálculo efectivo de los valores propios y sus correspondientes funciones propias es altamente costoso y complejo, pues el dominio en el cual se formulan los modelos es difícilmente discretizable. Esta dificultad es superada estudiando el comportamiento asintótico de las soluciones, y del modelo mismo, cuando el número de tubos tiende a infinito. En cada caso, se trata de probar la existencia de un problema espectral límite que describa este comportamiento asintótico, el cual, en general, es fácil de resolver, o al menos, no presenta la dificultad antes mencionada sobre su discretización.

Como se mencionara anteriormente, el más simple de los modelos es aquél en el cual el fluido es supuesto incompresible y perfecto, además de otras hipótesis sobre los tubos. Este modelo es bastante popular, habiendo sido

motivo de estudio de varios autores, entre los cuales cabe señalar los trabajos de M.Ibnou Zahir Y J.Planchard [Ib-Pl], J.Planchard [Pl1], [Pl2], y los de F.Aguirre y C.Conca [Ag-Co] y C.Conca y M.Vanninathan [Co-Va]. Parte importante del curso está destinada justamente al estudio de este modelo, siguiendo los desarrollos y las ideas que se exponen en estos últimos dos artículos. Posteriormente, en el curso estudiaremos el caso de un fluido compresible, siguiendo los trabajos de C.Conca, J.Planchard y M.Vanninathan [Co-Pl-Va], y las referencias ahí mencionadas.

Sobre otros modelos más sofisticados que tratan corrientemente los ingenieros es muy poco lo que existe respecto a estudios sistemáticos y rigurosos desde un punto de vista matemático. Sobre ellos, limitaremos entonces nuestro estudio y discusión a consideraciones de índole general.

Como veremos, tanto en el caso incompresible, como en el compresible, se trata de problemas de valores propios elípticos, con una condición en los límites no local sobre la frontera de cada tubo. Ambos problemas son tratados haciendo uso de técnicas de Análisis Funcional Lineal. El punto de partida del estudio de ambos casos son los teoremas de existencia, los cuales son probados de acuerdo a la siguiente estrategia: se demuestra que los valores propios del problema original no son otros más que los valores característicos de un operador lineal a rango finito, en un caso, y compacto en el otro, que actúa sobre un espacio de Hilbert. La existencia y distribución de los valores propios deriva entonces fácilmente de resultados generales de la teoría espectral de operadores lineales compactos.

Algo similar ocurre con los resultados de localización, los cuales son también demostrados haciendo uso de la teoría general de localización de valores propios de operadores lineales compactos sobre espacios de Hilbert, y de estimaciones standards de los valores propios y característicos de este tipo de operadores, basadas en la noción de cociente de Rayleigh y en el Principio de Minimax.

Por el contrario, las técnicas utilizadas para "pasar al límite", mediante las cuales se estudiará el comportamiento asintótico de los valores propios cuando el número de tubos tiende a infinito, son no standard. Se trata de métodos de la teoría espectral de operadores autoadjuntos, no compactos. La forma de probar que los valores propios de los problemas convergen, cuando el número tiende a infinito, hacia los valores propios de un problema espectral límite consiste en probar que la familia espectral correspondiente al operador asociado al problema original converge (en el sentido de las distribuciones temperadas) hacia la familia espectral del problema límite.

La importancia principal de estos resultados de convergencia es justificar que el problema original puede ser aproximado por este problema espectral límite, y la ventaja de ellos radica en el hecho que no es difícil, numéricamente, calcular el espectro de este problema. De hecho, como veremos, este cálculo involucra simplemente la resolución de una familia de problemas de valores propios "pequeños" sobre un dominio de referencia, con una condición de periodicidad generalizada sobre el borde. Los vectores

propios correspondientes a estos problemas se conocen como las ondas de Bloch asociadas al problema de partida, y fueron introducidos en el artículo [Ag-Co]. Los resultados de convergencia fueron demostrados por [Co-Va], siguiendo las ideas generales contenidas en los trabajos de E.Sánchez-Palencia [Sa], capítulo 12, y J.Sánchez-Hubert y N.Turbe [Sa-Tu]: En primer lugar, el problema diferencial de valores propios es reducido a encontrar los valores característicos de un operador S_n , siendo n un parámetro de la medida del número de tubos que contiene la estructura metálica. De manera similar, se le asocia un operador S al problema límite. La demostración de la convergencia tiene 2 etapas: En la primera se considera al problema de Cauchy asociado al operador de ondas correspondiente a S_n , y se prueba que su (única) solución converge en L^{∞} débil * hacia la solución del problema de Cauchy asociado al operador de ondas asociado a S . El segundo paso consiste en interpretar el resultado precedente en términos de las familias espectrales asociadas a los operadores S_n . Esto se hace a través de la transformada de Fourier.

2.- Descripción de los principales modelos matemáticos. Para describir los modelos que ocuparán nuestra atención en todo lo sucesivo, refirámonos de forma breve al problema físico que está en el origen de este estudio. Para ello, imaginemos en primer lugar que el fluido está contenido en una cavidad tridimensional, la cual, por simplicidad ²supondremos que es

1) Todo lo que veremos a continuación vale también para configuraciones de forma cualquiera.

de sección rectangular, de lados paralelos a los ejes. Por otra parte, supongamos que los tubos son todos paralelos entre ellos, y que están hechos del mismo material. En la práctica, además de estos supuestos, es frecuente que además todos los tubos sean idénticos, y que estén repartidos de manera periódica al interior de la cavidad. (ver figuras 2.1 y 2.2)

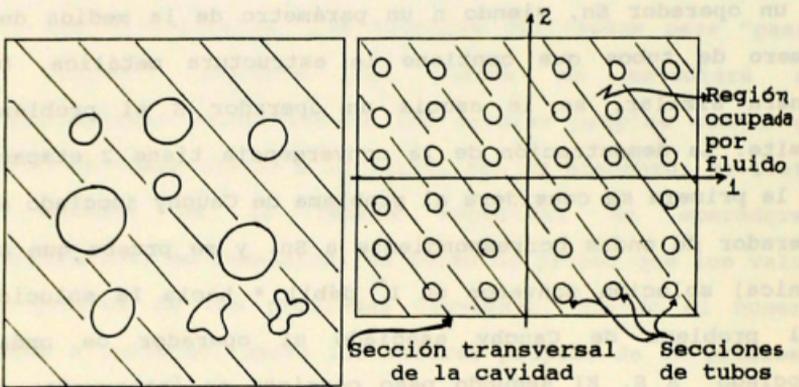


Figura 2.1

Figura 2.2

Se supone además que los tubos son rígidos y que están ensamblados (o montados) elásticamente (para fijar ideas, se puede pensar que los tubos están conectados entre ellos por resortes), y que ellos son infinitamente largos, o lo suficientemente largos como para no tener que considerar efectos tridimensionales en la modelización, y poder estudiar el problema sobre cualquiera de las secciones transversales de la cavidad.

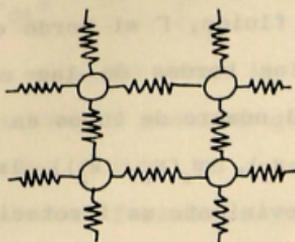


Figura 2.3: Sistema de resortes conectando los tubos

En estas condiciones, uno considera oscilaciones del fluido en torno a un estado de reposo. Puesto que se ha supuesto que los tubos están ensamblados elásticamente, todo el haz oscilará conjuntamente con el fluido. El problema que nos interesa estudiar a lo largo de este curso es determinar las frecuencias y movimientos propios de vibración del sistema sólido-fluido que forman el fluido y el haz de tubos.

a) **Caso de un fluido perfecto e incompresible.** El modelo más simple que permite estudiar las vibraciones de este sistema, y que ha sido propuesto por diversos autores, (cf. por ejemplo, [P12], [P13]), se deduce introduciendo las siguientes hipótesis físicas simplificadoras. En primer lugar, sólo son permitidas oscilaciones pequeñas del fluido en torno a su estado de reposo (lo cual hace posible suponer que el fluido es irrotacional; la velocidad del fluido proviene entonces, en este caso, de un potencial), y en segundo lugar, se supone que el fluido es perfecto (esto es, no viscoso) e incompresible.

Denotemos Ω la región de la sección transversal de la cavidad ocupada por el fluido, Γ el borde exterior de Ω , y por γ_i , $i = 1, \dots, K$ los bordes de las secciones de los tubos; donde K denota el número de tubos en Ω .

Sea $\vec{u} = (u_1(x_1, x_2), u_2(x_1, x_2))$ la velocidad del fluido. Puesto que el movimiento es irrotacional, $\text{rot } \vec{u} = 0$, lo que implica que existe una función ϕ , potencial de velocidad, tal que:

$$\vec{u} = \nabla \phi$$

Como además el fluido es incompresible, $\text{div} \vec{u} = 0$, y entonces

$$\Delta \phi = 0$$

en Ω . Veamos a continuación las condiciones en los límites para ϕ . En primer lugar, sobre las paredes rígidas los fluidos perfectos satisfacen la condición de no penetración al exterior, esto es, $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$, donde \vec{n} denota el vector normal exterior a Γ . En términos de ϕ , esta condición se escribe.

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0$$

sobre Γ .

Sobre γ_i imponemos que las velocidades normales de fluido y del tubo coinciden, esto es:

$$\vec{u} \cdot \vec{n} = \frac{\partial \phi}{\partial n} = \frac{d\vec{s}}{dt} \cdot \vec{n}$$

donde $\vec{s} = \vec{s}(t)$ denota el vector desplazamiento del tubo i (\vec{s} no depende de x , pues se ha supuesto que éste es rígido, no deformable por la acción del fluido).

La ecuación del movimiento para los tubos supondremos que es simplemente la ecuación de un oscilador armónico con término forzante igual a la presión que ejerce el fluido sobre el tubo. Así, se tendrá que:

$$(2.1) \quad m_1 \frac{d^2 \vec{s}}{dt^2} + k_1 \vec{s} = \int_{\gamma_1} p(x, t) \vec{n} ds$$

donde m_1 , es la masa del tubo i , k_1 es la constante de elongación del sistema de resortes que sostiene al tubo i , y p es la presión del fluido. En esta ecuación aplicamos la teoría del oscilador forzado bajo las condiciones más simples que consisten en suponer que el término forzante es periódico, de la forma:

$$p(x, t) = p_0(x) \cos \omega t \quad (\text{ó } p_0 \cos(\omega t + \theta), \theta = \text{base}).$$

donde ω es una medida del período de la fuerza (presión), y por consiguiente de las oscilaciones del tubo, como veremos una vez que explicitemos la solución de la ecuación para \vec{s} .

La solución (2.1) es la suma de las soluciones de la ecuación homogénea (oscilaciones libres), más cualquier solución particular de la ecuación no homogénea (oscilación forzada). En nuestra solución supondremos que no hay oscilaciones libres, lo cual equivale a suponer que en algún momento, digamos $t = 0$, tanto \vec{s} como $\dot{\vec{s}}$ son nulas. Como se puede ver, por ejemplo, en el libro de J.J Stoker [St], si $\omega^2 \neq k/m$ y $\theta = 0$, la solución particular de (2.1) es:

$$\vec{s} = \frac{1}{k_1 - m_1 \omega^2} \left(\int_{\gamma_1} p_0(x) \vec{n} ds \right) \cos \omega t$$

y entonces

$$(2.2) \quad \frac{d\vec{s}}{dt} \cdot \vec{n} = - \frac{\omega}{k_1 - m_1 \omega^2} \left(\int_{\gamma_1} p_0(x) \vec{n} ds \right) \text{sen} \omega t \cdot \vec{n}$$

2) Note que esta ecuación lleva implícito el hecho que todo efecto de roce debido a la viscosidad del fluido, ha sido despreciado. Si no, veríamos aparecer un término en $d\vec{s}/dt$.

Reemplazando (2.2) en la condición sobre γ_1 , se deduce la condición que debe cumplir ϕ sobre γ_1 , pero, en términos de la presión. Veamos entonces como se ligan ϕ y p . Hay varias formas de hacerlo, y una de ellas es a partir de las leyes de conservación de la Mecánica. La ley de conservación del momentum lineal, o ecuación del movimiento del fluido, en ausencia de fuerzas externas se escribe:

$$(2.3a) \quad \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \rho \frac{du_i}{dt} \quad \forall i = 1, 2,$$

donde $\rho = \rho(x, t)$ es la densidad del fluido, y σ_{ij} es la componente (i, j) del tensor de esfuerzos. Por otro lado, por definición de fluido perfecto se tiene que:

$$(2.3b) \quad \sigma_{ij} = -p\delta_{ij} \quad \forall i, j$$

donde δ_{ij} es el símbolo de Kronecker. Combinando ambas ecuaciones y suponiendo que el fluido es homogéneo, esto es, que ρ es independiente de x , y despreciando términos cuadráticos en \vec{u} , de modo que $d\vec{u}/dt = \partial\vec{u}/\partial t$, sigue que:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ p + \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} \right\} = 0 \quad \forall i = 1, 2$$

pues $u_i = \frac{\partial \phi}{\partial x_i}$. Sigue entonces que

$$p = -\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} + \text{cte},$$

donde la constante la escogeremos igual a cero, (aunque ello no tiene mayor importancia pues p siempre va definida salvo por una constante).

De acuerdo a la forma que asumimos para p , sigue que ϕ verifica:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = p_0(x) \cos \omega t$$

y por lo tanto

$$\phi(x, t) = \phi_0(x) \sin \omega t$$

con $\phi_0(x) = -p_0(x)/\rho\omega$, pues ρ es también independiente de t , ya que el fluido se ha supuesto incompresible. Así, (2.2) se reduce a:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{s}}{dt} \cdot \vec{n} &= - \frac{\rho\omega^2}{k_1 - m_1\omega^2} \left(\int_{\gamma_1} \phi_0(x) \vec{n} ds \right) \text{sen}\omega t \cdot \vec{n} \\ &= \frac{\rho\omega^2}{k_1 - m_1\omega^2} \left(\int_{\gamma_1} \phi \vec{n} ds \right) \cdot \vec{n} \end{aligned}$$

que combinada con la ecuación sobre γ_1 para ϕ se concluye finalmente que ϕ sobre γ_1 debe verificar:

$$\frac{\partial\phi}{\partial n} = \frac{\rho\omega^2}{k_1 - m_1\omega^2} \left(\int_{\gamma_1} \phi \vec{n} ds \right) \cdot \vec{n} \quad \text{sobre } \gamma_1$$

Notemos que esta ecuación la verifica tanto ϕ como ϕ_0 , esto es, como la parte de ϕ que sólo depende de x . Cabe remarcar que esta condición en los límites es no-local, pues hace intervenir la media de $\phi \vec{n}$ sobre γ_1 .

En lo sucesivo no haremos distinción entre ϕ y ϕ_0 , suponiendo en todo momento que se trata de funciones que sólo dependen de x . Recopilando las ecuaciones para ϕ y ω se concluye que estas deben ser solución del siguiente problema de valores propios. Encontrar $\omega \in \mathbb{C}$ o en \mathbb{R} , para las cuales existe una función ϕ , no idénticamente constante, tales que:

$$(2.4a) \quad \Delta\phi = 0 \quad \text{en } \Omega$$

$$(2.4b) \quad \frac{\partial\phi}{\partial n} = \frac{\rho\omega^2}{k_1 - m_1\omega^2} \left(\int_{\gamma_1} \phi \vec{n} ds \right) \cdot \vec{n} \quad \text{sobre } \gamma_1, \quad i = 1, K$$

$$(2.4c) \quad \frac{\partial\phi}{\partial n} = 0 \quad \text{sobre } \Gamma$$

En este problema, ω denomina(n) la(s) frecuencia(s) propias de vibración de la estructura fluido-sólido, y ϕ es

la función movimiento propio. Puesto que la integral de \vec{n} sobre γ_1 es $\vec{0}$, $\phi = \text{Cte}$ es solución de (2.4) para cualquier $\omega \in \mathbb{R}$. Bien entendido, estas soluciones triviales no nos interesan, y las hemos eliminado imponiendo explícitamente la condición que ϕ no sea idénticamente constante. Eso sí, podemos remarcar que las soluciones ϕ de (2.4) sólo pueden definirse salvo por una constante aditiva.

b) Caso de un fluido perfecto compresible.- Un modelo matemático más realista que (2.4) se obtiene ignorando la hipótesis (simplificadora) de que el fluido es incompresible.

El punto de partida para reducir el modelo en este caso son las ecuaciones (2.3), válidas para cualquier fluido perfecto. Despreciando términos cuadráticos en la velocidad, estas ecuaciones combinadas se escriben:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \nabla p = 0 \text{ en } \Omega$$

Respecto de la densidad del fluido, supondremos que esta experimenta sólo variaciones pequeñas en torno a un valor de equilibrio ρ_0 . Esto permite escribir ρ en la forma:

$$\rho = \rho_0 + \rho',$$

con el supuesto que $\rho' \ll \rho_0$. Sea p_0 la presión correspondiente a la densidad ρ_0 . Se tendrá también que $\rho = \rho_0 + \rho'$, con $p' \ll p_0$ y la ecuación de Euler linealizada en torno a p_0 se escribe:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \nabla p' = 0$$

al igual que en el caso precedente, si ϕ denota el potencial de velocidad. de esta ecuación se concluye que:

$$p' = - \rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

Por otra parte, la ecuación de continuidad de la masa, afirma que:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{u}) = 0$$

y como $\rho = \rho_0 + \rho'$, despreciando cantidades de 2^{do} orden, se reescribe como sigue:

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \text{div} \vec{u} = 0,$$

ecuación que escribiremos en función de p. En efecto, recordemos que en un fluido perfecto todo movimiento es adiabático, de modo que una pequeña variación p' de la presión esta ligada a una pequeña variación ρ' de la densidad por la ecuación:

$$p' = - \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{p=p_0, \dot{u}=cte} \rho'$$

Combinando esta ecuación con la ecuación de continuidad, sigue que:

$$\frac{\partial p'}{\partial \rho} \rho_0 \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{\rho=\rho_0} \text{div} \vec{u} = 0$$

Denotando $c^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{\rho=\rho_0}$, esta ecuación en términos del potencial ϕ se escribe:

$$(2.5) \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - c^2 \Delta \phi = 0,$$

conocida como la ecuación de ondas. Tomando gradiente en esta ecuación, se encuentra que c/u de las componentes de la velocidad también satisfacen la ecuación de ondas, y derivando (2.5) respecto al tiempo, se prueba que la presión también (y por consiguiente la densidad ρ') satisface la

ecuación de ondas.

Al igual que en el caso incompresible, el potencial de velocidades lo buscamos de la forma:

$$\phi(x, t) = \phi_0(x) \text{sen} \omega t$$

que reemplazado en (2.5) implica que ϕ_0 y ω deben satisfacer la ecuación de Helmholtz:

$$C^2 \Delta \phi_0 + \omega^2 \phi_0 = 0 \text{ en } \Omega.$$

[La constante C es la velocidad de sonido en el fluido.

Calculemos la velocidad del sonido de un gas perfecto (en el sentido termodinámico del término). La ecuación de estado de un gas perfecto es:

$$PV = \frac{mp}{\rho} = \frac{RT}{\mu}$$

donde R es constante de los gases y μ la masa molecular. Se obtiene para la velocidad del sonido la expresión:

$$C^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_S = \frac{C_p}{C_v} \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_T = \sqrt{\gamma \frac{RT}{\mu}}$$

donde $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$]

Respecto de las condiciones en los límites para ϕ ó ϕ_0 , en este caso se razona exactamente de la misma manera que en el caso incompresible. Se concluye entonces que ω y ϕ deben resolver el problema de: encontrar $\omega \in \mathbb{C}$ o \mathbb{R} , para el cual existe una función ϕ , no idénticamente constante, tales que:

(2.6a) $C^2 \Delta \phi + \omega^2 \phi = 0 \text{ en } \Omega.$

(2.6b) $\frac{\partial \phi}{\partial n} = \frac{\rho \omega^2}{k_1 - m_1 \omega^2} \left(\int_{\gamma_1} \phi \vec{n} ds \right) \cdot \vec{n} \text{ sobre } \gamma_1, \text{ vi} = 1, \dots, K$

(2.6c) $\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \text{ sobre } \Gamma$

Notemos que en este caso el potencial no queda determinado salvo por una constante. como es el caso del

problema (2.4).

c) Caso de un fluido viscoso incompresible.- La otra hipótesis simplificadora que contiene el modelo (2.4) es aquella que supone que el fluido es un fluido perfecto. Ignorando esta suposición, pero guardando sin embargo la condición de incompresibilidad (¡nunca es bueno mezclar todas las dificultades!), el modelo matemático que rige las frecuencias propias de vibración de la estructura sólido-fluido hace ahora intervenir las ecuaciones de Stokes en régimen estacionario, en lugar de Laplace o Helmholtz, como es el caso en los modelos precedentes. Más precisamente, si \vec{u} y p denotan la velocidad y la presión del fluido, el problema consiste en encontrar $\omega \in \mathbb{C}$ ó \mathbb{R} para las cuales existe $\{\vec{u}, p\}$ tales que:

$$(2.7a) \quad -\nu \Delta \vec{u} + \nabla p = 0 \text{ en } \Omega$$

$$(2.7b) \quad \operatorname{div} \vec{u} = 0 \text{ en } \Omega$$

$$(2.7c) \quad \vec{u} = \frac{-\omega \rho}{k_1 - m_1 \omega^2} \int_{\gamma_1} p \vec{n} ds \quad \text{sobre } \gamma_1, \quad i = 1, \dots, K$$

$$(2.7d) \quad \vec{u} = \vec{0} \text{ sobre } \Gamma.$$

donde, en (2.7a), ν representa la viscosidad cinemática del fluido.

El estado del arte actual sobre estudios matemáticos del problema (2.7) es bastante precario, existiendo muy poco escrito y desarrollado al respecto. En el curso no trataremos este modelo, remitiendo al lector al libro de J. Planchard [P15] para consultar lo que actualmente se conoce respecto de la solución de (2.7).

d) Sobre otros modelos.- Existen numerosos otros modelos que

los ingenieros han propuesto para tratar el problema físico que nos interesa, sin embargo, la gran mayoría de estos modelos aun no han sido estudiados rigurosamente desde un punto de vista matemático, y por lo tanto, no caben dentro de los propósitos de este curso. Sobre ellos digamos que se trata de modelos que incorporan diferentes elementos no considerados por los modelos vistos en las secciones precedentes. Así por ejemplo, los ingenieros han estudiado el caso en que se admite la posibilidad que los tubos se deformen elásticamente (tubos no rígidos), el caso en que los tubos o el fluido, además de oscilar, se desplazan los uno con respecto del otro, el caso de tubos flexibles,...etc.

3.- Resultados de existencia para los casos incompresible y compresible. Como veremos, los resultados de existencia para el modelo (2.4) se pueden deducir como un subproducto de resultados análogos en el caso compresible. A lo largo de esta sección, centramos entonces nuestra atención sobre el caso compresible, modelo (2.6).

Como lo mencionáramos en la Introducción, el problema de la existencia de soluciones es tratado usando técnicas de Análisis Funcional. Se reduce el problema diferencial de valores propios al problema de encontrar los valores característicos de un operador lineal compacto que actúa sobre un espacio de Hilbert. El operador natural que se puede asociar al problema (2.6) es no autoadjunto, sin embargo, veremos que es muy fácil probar que existe otro operador autoadjunto que posee los mismos valores característicos. De este modo, se concluirá que el operador

asociado a (2.6) es, por así decirlo, **simetrizable**, y que el espectro de (2.6) está formado por un conjunto numerable de valores propios que tienden a más infinito. Para el caso incompresible, problema (2.4), deduciremos al pasar que el espectro lo forma un conjunto finito de valores propios, de cardinalidad $2K$; siendo K el número de tubos en Ω .

El coeficiente de \vec{n} en (2.6b) lo usaremos con frecuencia en lo que sigue; lo denotaremos entonces de modo especial por:

$$\lambda_1 = \lambda_1(\omega) = \frac{\rho\omega^2}{k_1 - m_1\omega^2}.$$

Por el momento, en el estudio del problema (2.6) sólo consideraremos aquellas soluciones para las cuales $\omega^2 \neq (k_1/m_1)$ $\forall i = 1, \dots, K$, de modo que los λ_1 sean no singulares. Los otros posibles valores de ω , esto es, $\omega^2 = \frac{k_j}{m_j}$, algún $j=1, K$, juegan un rol especial en este estudio, que explicitaremos más tarde.

a) Algunos espacios funcionales.- En la resolución de (2.6) requeriremos de algunos espacios de Sobolev que introducimos en esta subsección. El primero de ellos es el espacio $H^1(\Omega)$, definido por:

$$H^1(\Omega) = \left\{ \psi \in L^2(\Omega) \mid \nabla \psi \in L^2(\Omega)^2 \right\},$$

dotado de la norma usual:

$$(\psi)_{1,\Omega} = \left\{ \int_{\Omega} |\psi|^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla \psi|^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}}$$

El conjunto de funciones q en $L^2(\Omega)$ a media nula en Ω lo denotaremos $L^2_0(\Omega)$. y lo equiparemos de la norma usual de

$L^2(\Omega)$.

En $H^1(\Omega)$, el subespacio de funciones constantes lo identificaremos con \mathbb{C} y denotaremos H el espacio $H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega)$ esto es:

$$H = \left\{ \phi \in H^1(\Omega) \mid \int_{\Omega} \phi dx = 0 \right\}$$

Recordemos que la semi-norma:

$$|\phi|_{1,\Omega} = \left\{ \int_{\Omega} |\nabla \phi|^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}}$$

es una norma en H , equivalente a la norma inducida por $H^1(\Omega)$ sobre H . Dotamos H de esta norma.

Notemos que tanto H como \mathbb{C} son de este modo subespacios cerrados de $H^1(\Omega)$, su intersección es (0) , y su suma es $H^1(\Omega)$.

Más aún, H es el complemento ortogonal de \mathbb{C} en $H^1(\Omega)$.

b) Formulación variacional del problema (2.6).-

Multiplicando la ecuación (2.6a) por $\bar{\psi}$ en $H^1(\Omega)$ e integrando por partes en Ω , es fácil deducir que una formulación variacional de (2.6) es:

(3.1a) Encontrar $\omega \in \mathbb{C}$ y

(3.1b) $\phi \in H^1(\Omega)$, $\phi \neq 0$, tales que

$$(3.1c) \quad c^2 \int_{\Omega} \nabla \phi \cdot \nabla \bar{\psi} dx - \omega^2 \int_{\Omega} \nabla \bar{\psi} dx = \sum_{i=1}^K \lambda_i \left(\int_{\gamma_i} \phi \vec{n} ds \right) \cdot \left(\int_{\gamma_i} \bar{\psi} \vec{n} ds \right) \quad \forall \psi \in H^1(\Omega)$$

Notemos que este problema posee una solución trivial que es $\omega = 0$ y $\phi = \text{constante}$, es decir, cero es un valor propio de (2.6) y las funciones constantes son las correspondientes funciones propias. Es directo comprobar que $\omega=0$

es un valor propio simple. Más aún, se verifica fácilmente que toda otra solución de (3.1) es ortogonal a ésta, y más precisamente, toda solución (ω, ϕ) de (2.6) satisface:

$$(3.2) \quad \omega^2 \int_{\Omega} \phi dx = 0$$

y entonces toda función propia asociada a un valor propio no nulo es a media nula en Ω . De hecho, pertenece a H . Así, sigue que si (ω, ϕ) es solución de (3.1) o (2.6), entonces (ω, ϕ) resuelve:

$$(3.3a) \quad \text{Encontrar } \omega \in \mathbb{C} \text{ y}$$

$$(3.3b) \quad \phi \in H, \phi \neq 0 \text{ tales que}$$

$$(3.3c) \quad C^2 \int_{\Omega} \nabla \phi \cdot \nabla \bar{\psi} dx - \omega^2 \int_{\Omega} \nabla \bar{\psi} dx = \sum_{i=1}^k \lambda_i \left(\int_{\gamma_i} \phi \vec{n} ds \right) \cdot \left(\int_{\gamma_i} \bar{\psi} \vec{n} ds \right) \quad \forall \psi \in H$$

Inversamente, usando la descomposición $H^1(\Omega) = H \oplus \mathbb{C}$, se prueba fácilmente que toda solución de (3.3) es también solución de (3.1). Sigue entonces que (3.1), (3.3) son equivalentes en el sentido que poseen los mismos valores propios y funciones propios, con la única excepción del valor propio cero.

c) El operador lineal no autoadjunto asociado al problema (3.3).- Al problema (3.3) asociaremos un operador T , definido sobre el espacio de Hilbert (producto) $L_0^2(\Omega) \times \mathbb{C}^{2k}$, cuyos valores característicos resultaran ser los valores propios de (3.3). El operador T es lineal, compacto, y simetrizable, en el sentido que se puede encontrar otro operador lineal, compacto y autoadjunto que posee los mismos valores característicos que T .

Siguiendo la misma numeración usada para numerar los

tubos en Ω , si \vec{s} es un vector de C^{2K} , vamos a agrupar sus componentes en sub-vectores \vec{s}_i , $i = 1, \dots, K$, cada $\vec{s}_i \in C^2$, asociada al hoyo i de Ω . La norma y el producto escalar usuales de C^{2K} lo denotaremos $\|\cdot\|_{2K}$ y $\langle \cdot, \cdot \rangle_{2K}$ respectivamente.

Comenzamos definiendo un operador Q que nos permitirá luego definir T . Q lo definimos como sigue:

$$(3.4a) \quad Q: L^2(\Omega) \times C^{2K} \rightarrow L^2(\Omega) \times C^{2K}$$

$$(3.4b) \quad Q(\phi, \vec{s}) = \left(\phi, \left[\int_{\gamma_i} \phi \vec{n} ds \right]_{i=1, \dots, K} \right) \quad \forall (\phi, \vec{s}) \in L^2_0 \times C^{2K}$$

donde ϕ es la única solución de:

$$(3.5a) \quad C^2 \Delta \phi + \phi = 0 \text{ en } \Omega$$

$$(3.5b) \quad \frac{\partial \phi}{\partial n} = \vec{s}_i \cdot \vec{n} \text{ sobre } \gamma_i, \quad i = 1, \dots, K$$

$$(3.5c) \quad \frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \text{ sobre } \Gamma$$

$$(3.5d) \quad \int_{\Omega} \phi dx = 0$$

Note que (3.5) posee solución única $\phi \in H$, por el Lema de Lax-Milgram.

Como $\omega = 0$ no puede ser solución de (3.3), es directo verificar que si (ω, ϕ) es solución de (3.3) con $\omega^2 = k_i/m_i$ $\forall i$, entonces

$$(3.6) \quad Q(\phi, \vec{s}) = \left(\frac{1}{\omega^2} \phi, \left(\frac{\vec{s}_i}{\lambda_i(\omega^2)} \right)_{i=1, \dots, K} \right)$$

donde $\vec{s} = (\vec{s}_i)_{i=1, \dots, K}$ lo hemos definido por:

$$(3.7) \quad \vec{s}_i = \frac{\lambda_i(\omega^2)}{\omega^2} \int_{\gamma_i} \phi \vec{n} ds, \quad i = 1, \dots, K$$

Inversamente, si $(\omega, \phi, \vec{s}) \in C \times L^2_0(\Omega) \times C^{2K}$ satisface (3.6) y si $\omega^2 = k_i/m_i$ $\forall i = 1, \dots, K$ entonces (ω, ϕ) es solución de

(3.3), y \vec{s} satisface (3.7). Así, (3.3) y la ecuación (3.6) son equivalentes si $\omega^2 \neq k_i/m_i \forall i$.

Veamos a continuación que (3.6) se puede poner como un problema standard de valores propios en $L_0^2(\Omega) \times \mathbb{C}^{2K}$. En efecto, pongamos:

$$\mu^2 = \frac{1}{\omega^2}$$

Expresando λ_i en términos de $\mu^2 \left(\lambda_i = \frac{\rho}{k_i \mu^2 - m_i} \right)$, (3.6) se

escribe:

$$(3.8a) \quad \varphi = \mu^2 \phi$$

$$(3.8b) \quad \left(\int \varphi \vec{n} ds \right)_{i=1, K} = \mu^2 \frac{1}{\rho} \text{ddiag}(k_i) \vec{s} - \frac{1}{\rho} \text{ddiag}(m_i) \vec{s}$$

donde $\text{ddiag}(k_i)$ y $\text{ddiag}(m_i)$ son las matrices diagonales $2K \times 2K$, en cuyas diagonales llevan los elementos $(k_1, k_1, \dots, k_K, k_K)$ y $(m_1, m_1, \dots, m_K, m_K)$ respectivamente.

Puesto que las constantes k_i son todas > 0 , $\text{ddiag}(k_i)$ es no singular y (3.8) es equivalente a:

$$\varphi = \mu^2 \phi$$

$$\rho \text{ddiag}(k_i^{-1}) \left(\int \varphi \vec{n} ds \right)_{\gamma_i} + \text{ddiag} \left(\frac{m_i}{k_i} \right) \vec{s} = \mu^2 \vec{s}$$

Definiendo entonces T por:

$$(3.9a) \quad T = L_0^2(\Omega) \times \mathbb{C}^{2K} \rightarrow L_0^2(\Omega) \times \mathbb{C}^{2K}$$

$$(3.9b) \quad T(\phi, \vec{s}) = \left(\varphi, \rho \text{ddiag}(k_i^{-1}) \left(\int \varphi \vec{n} ds \right)_{\gamma_i} + \text{ddiag} \left(\frac{m_i}{k_i} \right) \vec{s} \right)$$

se concluye que (3.8) no es más que el problema de encontrar los valores de T:

$$(3.10a) \quad \text{Encontrar } \mu \in \mathbb{C} \text{ y}$$

$$(3.10b) \quad (\phi, \vec{s}) \in L_0^2(\Omega) \times \mathbb{C}^{2K}, (\phi, \vec{s}) \neq (0, \vec{0}) \text{ tales que}$$

$$(3.10c) \quad T(\phi, \vec{s}) = \mu^2(\phi, \vec{s})$$

Así, (3.10) y (3.3) son equivalentes si $\omega^2 \neq k_j/m_j$. Consideremos ahora el caso eventual que, para algún j , $1 \leq j \leq K$, $\frac{k_j}{m_j}$ fuera un valor característico. Denote (ϕ, \vec{s}) el correspondiente vector propio. Por (3.8) sigue que $((k_j/m_j), \phi, \vec{s})$ satisface:

$$(3.11a) \quad C^2 \Delta \phi + (k_j/m_j) \phi = 0 \text{ en } \Omega$$

$$(3.11b) \quad \frac{\partial \phi}{\partial n} = \vec{s}_i \cdot \vec{n} \text{ sobre } \gamma_i, \quad \forall i = 1, \dots, K$$

$$(3.11c) \quad \frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \text{ sobre } \Gamma$$

$$(3.11d) \quad \int \phi dx = 0$$

$$(3.12e) \quad \int_{\gamma_i} \phi \vec{n} ds = 0 \quad \forall i \text{ tal que } k_1/m_1 = k_j/m_j$$

$$(3.12f) \quad \vec{s}_i = \frac{\rho}{k_1 - m_1(k_j/m_j)} \int_{\gamma_i} \phi \vec{n} ds \quad \forall i \text{ tal que } k_1/m_1 \neq k_j/m_j$$

lo cual motiva la siguiente definición:

Definición 1.- Sea $1 \leq j \leq K$ y $\phi \in H$. Diremos que $(k_j/m_j, \phi)$ resuelve (2.6) ó (3.3) si existe $\vec{s} \in \mathbb{C}^{2K}$ tal que $(k_j/m_j, \phi, \vec{s})$ satisfacen (3.12).

Con esto, los problemas (3.3) y (3.6) se hacen equivalentes para todo $\omega \in \mathbb{C}$, y más precisamente.

Teorema 3.1.- Sea (ω, ϕ) solución de (3.3). Si $\omega^2 \neq (k_j/m_j) \forall j$, defina \vec{s} por (3.7), si no, sea \vec{s} dado por la definición 1. Luego $\omega \neq 0$, $(1/\omega^2)$ es un valor propio de T , y (ϕ, \vec{s}) es un vector propio correspondiente a este valor propio.

Inversamente, si $(\phi, \vec{s}) \in L_0^2(\Omega) \times \mathbb{C}^{2K}$ es un vector propio de T correspondiente a un valor propio μ^2 , entonces μ^2 no es

cero, $(1/\mu^2, \phi)$ es solución de (3.3). Si $(1/\mu^2) \neq (k_j/m_j) \forall j$, entonces \vec{s} verifica (3.7) y si no, (3.12e) y (3.12f) se cumplen. ■

En lo sucesivo supondremos que toda solución es entendida en el sentido de este teorema. El estudio de (3.3) se reduce entonces a estudiar al espectro de T.

d) Representación matricial de T.- En esta sección estudiaremos algunas propiedades de T que nos serán muy útiles en los sucesivos.

Sea φ la solución de (3.5), y descomongámosla como $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$, donde $\varphi_1 = \varphi_1(\phi)$, $\varphi_2 = \varphi_2(\vec{s})$ están definidos por:

$$(3.12a) \quad C^2 \Delta \varphi_1 + \phi = 0 \text{ en } \Omega$$

$$(3.12b) \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = 0 \text{ sobre } \bigcup_{i=1}^K \gamma_i, \quad \varphi_1 \in H, \text{ y}$$

$$(3.13a) \quad C^2 \Delta \varphi_2 = 0 \text{ en } \Omega$$

$$(3.13b) \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} = \vec{s}_i \cdot \vec{n} \text{ sobre } \gamma_i, \quad i = 1, \dots, K$$

$$(3.13c) \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} = 0 \text{ sobre } \Gamma, \quad \varphi_2 \in H$$

De este modo, el operador puede escribirse en notación matricial como sigue:

$$T(\phi, \vec{s}) = \begin{bmatrix} \varphi_1 + \varphi_2 \\ \rho \text{ddiag}(k_1^{-1}) \left(\int_{\gamma_1} \varphi_1 \vec{n} ds \right) + \rho \text{ddiag}(k_1^{-1}) \left(\int_{\gamma_1} \varphi_2 \vec{n} ds \right) + \text{ddiag} \left(\frac{m_1}{k_1} \right) \vec{s} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} T_{11} \phi + T_{12} \vec{s} \\ \rho \text{ddiag}(k_1^{-1}) T_{21} \phi + T_{22} \vec{s} \end{bmatrix}$$

donde hemos definido T_{ij} por:

$$T_{11}: L_n^2(\Omega) \rightarrow L_n^2(\Omega) \quad T_{11} \phi = \varphi,$$

$$\begin{aligned}
 T_{12} : \mathbb{C}^{2K}(\Omega) &\rightarrow L_0^2(\Omega) & T_{12} \vec{s} &= \varphi_2 \\
 T_{21} : L_0^2(\Omega) &\rightarrow \mathbb{C}^{2K} & T_{21} \phi &= \left(\int_{\gamma_1} \varphi_1 \vec{n} ds \right)_{1=1, K} \\
 T_{21} S = \mathbb{C}^{2K} &\rightarrow \mathbb{C}^{2K} & T_{22} \vec{s} &= \rho \text{ddiag}(k_1^{-1}) \left(\int_{\gamma_1} \varphi_2 \vec{n} ds \right)_{1=1, K} \\
 & & &+ \text{ddiag} \left(\frac{m_1}{k_1} \right) \vec{s}
 \end{aligned}$$

Notemos, en primer lugar, que T_{11} no es más que el inverso de $-\Delta$ con condiciones de Neumann homogéneas sobre $\Gamma \cup \gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_K$ en el subespacio de $H^1(\Omega)$ de funciones a media nula. Sus valores propios, junto al cero, son los conocidos valores propios de Neumann del dominio Ω . Puesto que la inyección de H en $L_0^2(\Omega)$ es compacta, T_{11} también lo es. Así, T_{11} es un operador lineal compacto y autoadjunto. Sus valores característicos forman un conjunto numerable de reales positivos que convergen a $+\infty$, y cada uno es de multiplicidad finita.

Respecto de T_{22} , veamos que este no es otro que el operador asociado al caso incompresible. En efecto, si $e^2 \in \mathbb{C}$ es un valor característico de T_{22} , con vector propio $\vec{s} \in \mathbb{C}^{2K}$, entonces denotando $\varphi_2 = T_{12} \vec{s}$, sigue que φ_2 y e^2 satisfacen:

$$\rho \text{ddiag}(k_1^{-1}) \left(\int_{\gamma_1} \varphi_2 \vec{n} ds \right)_{1=1, K} + \text{ddiag} \left(\frac{m_1}{k_1} \right) \vec{s} = \frac{1}{e^2} \vec{s}$$

y por lo tanto, $\forall i = 1, \dots, K$

$$\int_{\gamma_1} \varphi_2 \vec{n} ds = \frac{k_1}{\rho e^2} \vec{s}_1 - \frac{m_1}{\rho} \vec{s}_1 = \frac{k_1 - m_1 e^2}{\rho e} \vec{s}_1$$

lo que implica

$$\vec{s}_1 = \frac{\rho e^2}{k_1 - m_1 \rho} \int_{\gamma_1} \varphi_2 \vec{n} ds$$

Con esta expresión para \vec{s}_1 , de la definición de φ_2 sigue trivialmente que (e^2, φ_2) es solución del problema correspondiente al caso incompresible. Inversamente, si (e^2, φ_2) es solución del caso incompresible, entonces e^2 es un valor característico de T_{22} . Como primera conclusión de lo anterior podemos deducir que el caso incompresible admite, a los más, $2K$ valores propios, incluyendo las multiplicidades. Veamos a continuación que estos son exactamente $2K$. Reescribamos T_{22} como sigue:

$$T_{22} \vec{s} = \rho_0 \text{ddiag}(k_1^{-1}) S \vec{s} + \text{ddiag} \begin{pmatrix} m_1 \\ k_1 \end{pmatrix} \vec{s}$$

donde

$$S : \mathbb{C}^{2K} \rightarrow \mathbb{C}^{2K}, S \vec{s} = \left(\int_{\gamma_1} \varphi_2 \vec{n} ds \right)$$

En el artículo [Ag-Co] se prueba que S es un operador lineal autoadjunto y coercivo, de modo que T_{22} no es en general autoadjunto, pues los operadores $\text{ddiag}(k_1^{-1})$ y S no conmutan, excepto si S es diagonal, o si $k_1 = \dots = k_k$. A pesar de ello, veamos que el espectro de S es como el de un operador coercivo, autoadjunto.

En efecto, sea $e^2 \in \mathbb{C}$ un valor característico de T_{22} , de vector propio $\vec{s} \in \mathbb{C}^2$. Luego,

$$\rho \text{ddiag}(k_1^{-1}) S \vec{s} + \text{ddiag} \begin{pmatrix} m_1 \\ k_1 \end{pmatrix} \vec{s} = \left(\frac{1}{e^2} \right) \vec{s}$$

y definamos \vec{t} por:

$$\vec{t} = \text{ddiag} \left(k_1^{\frac{1}{2}} \right) \vec{s}, \text{ luego}$$

$$\rho \text{ddiag} \left(k_1^{\frac{1}{2}} \right) \text{Sddiag} \left(k_1^{\frac{1}{2}} \right) \vec{e} + \text{ddiag} \left(\frac{m_1}{k_1} \right) \vec{e} = \left(\frac{1}{e^2} \right) \vec{e}$$

y por lo tanto e^2 es un valor característico del operador $(T_{22})_*$ definido por:

$$(3.14) \quad (T_{22})_* = \rho \text{ddiag} \left(k_1^{\frac{1}{2}} \right) \text{Sddiag} \left(k_1^{\frac{1}{2}} \right) + \text{ddiag} \left(\frac{m_1}{k_1} \right),$$

el que es autoadjunto y coercivo. Inversamente, es directo ver que todo valor característico de $(T_{22})_*$ también lo es de (T_{22}) . Así, $(T_{22})_*$ es un "simetrizado" de (T_{22}) . Como $(T_{22})_*$ admite exactamente $2K$ valores propios estrictamente positivos, se concluye la:

Proposición 3.2.- El conjunto de valores propios del caso incompresible, o de valores característicos de T_{22} consiste de $2K$ reales estrictamente positivos. Los correspondientes vectores propios de T_{22} forman una base de \mathbb{C}^{2K} . ■

Puesto que $(T_{22})_*$ y T_{22} son estrictamente más grandes (en el sentido de los operadores positivos) que el operador $\text{ddiag} \left(\frac{m_1}{k_1} \right)$, sigue que todo valor propio ω^2 del caso incompresible verifica:

$$1/\omega^2 \geq \text{Min} \left\{ \frac{m_1}{k_1} \right\}_{1 \leq i \leq K}$$

y por lo tanto

$$0 \leq \omega^2 \leq \text{Max} \left\{ \frac{k_1}{m_1} \right\}_{1 \leq i \leq K}$$

Las constantes (k_1/m_1) son las frecuencias de vibración de los tubos en el vacío, en ausencia de fuerzas exteriores forzadas (véase la ecuación del péndulo con lado derecho nulo).

Pasemos a continuación a estudiar T_{12} y T_{21} . Se trata de dos operadores lineales continuos. Más aún, se tiene la:

Proposición 3.3. - $T_{12}^* = T_{21}$, e inversamente. ■

Dem: Sean ϕ y \vec{s} dados. Usando Green en la definición de φ_1 y φ_2 se tiene que:

$$\begin{aligned} \langle T_{12}^* \phi, \vec{s} \rangle_{2K} &= \int_{\Omega} \phi \bar{\varphi}_2 dx = c^2 \int_{\Omega} \nabla \varphi_1 \cdot \nabla \bar{\varphi}_2 dx \\ &= c^2 \int_{\Omega} \nabla \varphi_2 \cdot \nabla \bar{\varphi}_1 dx = \overline{\sum_{i=1}^k \vec{s}_i \cdot \int_{\gamma_i} \bar{\varphi}_1 \vec{n} ds} = \overline{\langle \vec{s}, T_{21} \phi \rangle} \\ &= \langle T_{21} \phi, \vec{s} \rangle \end{aligned}$$

y entonces $T_{12}^* \phi = T_{21} \phi$. Tomando * a ambos lados sigue que $T_{12}^{**} = T_{12} = T_{21}^*$, lo que completa la prueba de la propiedad 3.3. ■

e) Simetrización del operador T.- La proposición 3.3 muestra que en realidad T no es autoadjunto. Sin embargo, usando exactamente el mismo procedimiento que utilizamos para simetrizar T_{22} , se puede simetrizar T. En efecto, definamos T_s por:

(3.15a) $T_s : L_0^2(\Omega) \times \mathbb{C}^{2K} \rightarrow L_0^2(\Omega) \times \mathbb{C}^{2K}$

(3.15b) $T_s = \begin{bmatrix} T_{11} & \rho^{1/2} T_{12} \text{ddiag}(k_1^{-1/2}) \\ \rho^{1/2} \text{ddia}(k_1^{-1/2}) T_{21} & (T_{22})_s \end{bmatrix}$

Usando exactamente el mismo tipo de argumentos que en el caso incompresible, y las definiciones de los operadores que intervienen en la definición de T_s , se prueba la:

Proposición 3.4.- Un complejo μ^2 es valor propio de T con vector propio $(\phi, \vec{s}) \in L_0^2(\Omega) \times \mathbb{C}^{2k}$ si y sólo si μ^2 es valor propio de $T_{\mathbb{S}}$ con vector propio $(\phi, e^{-\frac{1}{2} \text{ddiag}(k_1^{\frac{1}{2}})} \vec{s}) \in L_0^2(\Omega) \times \mathbb{C}^{2k}$. ■

Probemos ahora que $T_{\mathbb{S}}$ posee las siguientes propiedades:

Proposición 3.5.-

(i) $T_{\mathbb{S}}$ es un operador compacto autoadjunto de $L_0^2(\Omega) \times \mathbb{C}^{2k}$

(ii) $T_{\mathbb{S}}$ es definido positivo en el sentido que:

$$(3.16) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} (T_{11} \phi + \rho_0^{\frac{1}{2}} T_{12} \text{ddiag}(k_1^{-1/2}) \vec{r}) \vec{\phi} \bar{d}x + \\ \langle \rho_0 \text{ddiag}(k_1^{-1/2}) T_{21} \phi + (T_{22})_{\mathbb{S}} \vec{r}, \vec{r} \rangle_{2k} > 0 \quad \forall (\phi, \vec{r}) \neq (0, \vec{0}). \quad \blacksquare \end{array} \right.$$

Dem: El hecho que $T_{\mathbb{S}}$ sea simétrico es obvio, y la prueba de que es compacto en consecuencia directa del hecho que T_{11} lo sea. Remitámonos entonces a probar que es definido positivo.

Denotemos A el lado izquierdo de (3.16). Puesto que $T_{12}^* = T_{21}$ y $\text{ddiag}(k_1^{-1/2})$ es diagonal, A se puede escribir como sigue:

$$A = \int_{\Omega} (T_{11} \phi) \bar{\phi} dx + 2\rho_0^{1/2} \text{Re} \langle T_{21} \phi, \text{ddiag}(k_1^{-1/2}) \vec{r} \rangle_{2k} + (T_{22})_{\mathbb{S}} \vec{r}, \vec{r} \rangle_{2k}$$

Multiplicando la ecuación que verifica ϕ_1 por ϕ_1 , e integrando por partes se tiene que:

$$(3.17a) \quad \int_{\Omega} \phi (\overline{T_{11} \phi}) dx = \int_{\Omega} \phi \phi_1 = c^2 \int_{\Omega} |\nabla \phi_1|^2 dx$$

Por otra parte, sea $\varphi \in H$, definida como $\varphi = T_{12} \text{ddiag}((k_1^{-1/2}) \vec{r})$, esto es, φ es la única solución en H del problema:

$$\left\{ \begin{array}{l} C \Delta \varphi = 0 \text{ en } \Omega \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}} = k_1^{-1/2} \vec{r}_i \cdot \vec{n} \text{ sobre } \gamma_i, \quad i = 1, K \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}} = 0 \text{ sobre } \Gamma \end{array} \right.$$

Multiplicando por φ_1 , e integrando por partes, se obtiene:

$$(3.17b) \quad \begin{aligned} c^2 \int_{\Omega} \nabla \varphi \cdot \nabla \bar{\varphi}_1 \, dx &= \sum_{l=1}^k k_1^{-1/2} \vec{r}_1 \cdot \int_{\vec{r}_1} \bar{\varphi}_1 \vec{n} \, ds \\ &= \langle \text{ddiag}(k_1^{-1/2}) \vec{r}, T_{21} \phi \rangle_{2k} \end{aligned}$$

Multiplicando la misma ecuación por φ , integrando por partes, y notando que $\text{Sddiag}(k_1^{-1/2}) \vec{r} = \langle \int_{\vec{r}_1} \varphi \vec{n} \, dx \rangle_{l=1, k}$ sigue que:

$$\begin{aligned} c^2 \int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 \, dx &= \langle \text{ddiag}(k_1^{-1/2}) \vec{r}, \text{Sddiag}(k_1^{-1/2}) \vec{r} \rangle = \\ &= \langle \vec{r}, \text{ddiag}(k_1^{-1/2}) \text{Sddiag}(k_1^{-1/2}) \vec{r} \rangle \end{aligned}$$

Por otro lado, de la definición de $(T_{22})_*$ es claro que para todo $\vec{r} \in \mathbb{C}^{2k}$,

$$\langle (T_{22})_* \vec{r}, \vec{r} \rangle_{2k} \geq \rho \langle \text{ddiag}(k_1^{-1/2}) \text{Sddiag}(k_1^{-1/2}) \vec{r}, \vec{r} \rangle$$

y entonces se concluye que

$$(3.17c) \quad \langle (T_{22})_* \vec{r}, \vec{r} \rangle \geq \rho c^2 \int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 \, dx$$

Combinando la definición de A con (3.17a,b,c) se concluye que:

$$\begin{aligned} A &\geq c^2 \left\{ \int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 \, dx + 2\rho^{1/2} \text{Re} \int_{\Omega} \nabla \varphi \cdot \nabla \bar{\varphi}_1 \, dx + \rho_0 \int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 \, dx \right\} \\ &\geq c^2 \int_{\Omega} |\nabla \varphi_1 + \rho^{1/2} \varphi|^2 \, dx = c^2 |\varphi_1 + \rho^{1/2} \varphi|_{1, \Omega}^2 > 0, \end{aligned}$$

si $(\phi, \vec{r}) \neq (0, \vec{0})$; lo que termina la prueba de la Proposición 3.5. ■

Nota: Si uno hila más fina la estimación hacia abajo de la cantidad A , se puede concluir que en realidad se tiene que:

$$\begin{aligned}
 A &\geq C^2 |\varphi_1 + \rho^{1/2} \varphi| + \langle \text{ddiag} \left(\frac{m_1}{k^1} \right) \vec{r}^2, \vec{r}^2 \rangle \\
 &\geq C^2 \int_{\Omega} |\varphi_1 + \rho^{1/2} \varphi|^2_{1,\Omega} + \text{Min} \left\{ \frac{m_1}{K_1} \right\} \vec{r}^2_{2k}.
 \end{aligned}$$

De esta última proposición y de resultados standard de Análisis Funcional se concluye que el espectro de T (y también el de T_n) consiste de una sucesión numerable de reales estrictamente positivos que convergen a cero. Denotemos los valores propios de T por:

$$\mu_1^2 \geq \mu_2^2 \geq \dots \geq \mu_l^2 \geq \dots \rightarrow 0,$$

donde las eventuales multiplicidades > 1 se denotan repitiendo el valor propio correspondiente de acuerdo a su multiplicidad. Los vectores propios correspondientes lo denotamos $(\phi_1, \vec{s}_1), \dots, (\phi_l, \vec{s}_l), \dots$. Ellos forman una base hilbertiana de $L^2_0(\Omega) \times \mathbb{C}^{2k}$. Puesto que los vectores propios de T_n son ortogonales, los de T también, pero, con respecto al producto escalar siguiente:

$$(3.18) \quad \int_{\Omega} \phi_l \bar{\phi}_l dx + \rho_0 \langle \text{ddiag}(k_1^{-1}) \vec{s}_l, \vec{s}_l \rangle_{2k} = \delta_{ll}$$

En resumen, si definimos ω_1^2 por $\omega_1^2 = 1/\mu_1^2$, en esta sección hemos probado el:

Teorema 3.6.- Los tripletes $((\omega_1^2, \phi_1, \vec{s}_1))_{1 \leq l}$ verifican:

- i) Para todo $l \geq 1$, (ω_1^2, ϕ_2) es solución de (3.3).

- (ii) El conjunto $(\phi_1, \vec{s}_1)_{1 \geq 1}$ forma una base hilbertiana de $L_0^2(\Omega) \times C^{2k}$, que es ortogonal en el sentido de (3.18).
- (iii) Los pares $(\omega_1^2, \phi_1)_{1 \geq 1}$ son las únicas soluciones de (3.3) en el sentido que si (ω^2, ϕ) es solución de (3.3), entonces existe $l \geq 1$ tal que $\omega^2 = \omega_l^2$ y ϕ se puede escribir como combinación lineal de todos los ϕ_1 para los cuales $\omega^2 = \omega_l^2$. ■

Este teorema dá una descripción completa del espectro del problema (3.3). En particular prueba que (3.3) posee una cantidad numerable de valores propios que convergen a $+\infty$. Esto hace la diferencia principal entre el caso incompresible y el compresible.

4. Comportamiento asintótico de los valores propios en el caso incompresible.- En esta sección estudiaremos el comportamiento asintótico de los valores propios del problema (2.4) (caso incompresible) cuando el número de tubos tiende a infinito. El estudio lo haremos bajo el supuesto que todos los tubos son idénticos, y que están distribuidos periódicamente al interior de la cavidad.

Como se mencionara en la Introducción, en las aplicaciones uno requiere de resolver el problema (2.4) o (2.6) para valores de K enormemente altos (del orden de 10.000 a 50.0000 tubos). Así, el análisis numérico de estos problemas, y en particular, el cálculo sobre computador de los valores propios, y de sus correspondientes funciones propias, se hace sumamente costoso, e incluso, en muchos casos imposible de llevar a cabo, pues el dominio en que el problema se formula no se puede discretizar de manera simple,

necesitándose para ello computadores con gran capacidad de memoria.

Desde un punto de vista matemático, la técnica que aquí proponemos para sobrellevar esta dificultad consiste en pasar al límite las soluciones de los modelos, y los modelos mismos, cuando $K \rightarrow \infty$, y ello, con la esperanza de obtener resultados razonables, en el sentido que los valores propios de (2.4) converjan hacia un límite, el cual sea caracterizable, y en lo posible, fácil de aproximar numéricamente.

Efectivamente, como veremos, al menos para el caso incompresible, esta estrategia funciona bien, pues se prueba la existencia de un problema espectral límite, cuyos valores propios son límite de los valores propios (2.4), cuando $K \rightarrow \infty$, en un sentido que precisaremos en detalle más adelante. Digamos por el momento simplemente que se trata a groso modo de una convergencia en el sentido de las distribuciones "temperadas" de las familias espectrales asociadas a los problemas (2.4), hacia la familia espectral del problema límite.

El cálculo numérico del espectro del problema límite no es difícil, pues como se verá, este se reduce a la resolución de una familia de problemas "pequeños" de valores propios (cada uno posee sólo 2 valores propios, es un problema como (2.4) con $K = 1$) sobre un dominio de referencia, y con una condición de periodicidad generalizada sobre el borde.

Esta forma de proceder para resolver el espectro del problema límite fué propuesto por Aguirre-Conca [Ag-Co],

mientras que los resultados de convergencia son debidos a Conca-Vanninathan [Co-Va]. Los vectores propios asociados a los valores propios de la familia de problemas "pequeños" involucrados en la solución del problema límite se conocen como las ondas de Bloch asociadas al problema (2.4).

a) Notaciones y resultados preliminares.- En todo lo que sigue de esta sección supondremos que los tubos están repartidos periódicamente, que son idénticos, y que están dispuestos dentro de Ω de modo simétrico con respecto a los ejes de coordenadas; véase figura 4.1.

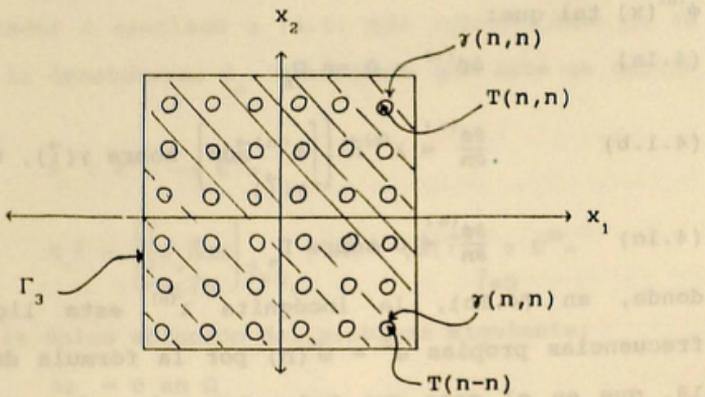


Figura 4.1: El dominio Ω_n y sus componentes

$$\Gamma_n, \gamma(\vec{i}), \vec{i} \in Q_n, \text{ para } n=3.$$

Sea n un parámetro entero que designa el número de tubos en la dirección $0x_1$ y $0x_2$, de modo que el dominio Ω contiene un total de $K_n = (2n)^2$ secciones de tubos. Puesto que la región ocupada por el fluido depende ahora de n , la denotaremos Ω_n , y su frontera exterior Γ_n . Las secciones de

los tubos las denotaremos $(T(\vec{\Gamma}))_{\vec{\Gamma} \in Q'_n}$, donde

$$Q'_n = \{ \vec{\Gamma} \in \mathbb{Z}^2 \mid -n \leq \Gamma_i \leq n \quad \forall i = 1, 2 \}.$$

Para cada $\vec{\Gamma} \in Q'$, la frontera de $T(\vec{\Gamma})$ la denotaremos $\gamma(\vec{\Gamma})$, ver figura 4.1.

Bajo estas condiciones, nuestro interés es estudiar el comportamiento asintótico de las soluciones del problema (2.4), formulado en $\Omega = \Omega_n$, cuando $n \rightarrow +\infty$. Puesto que ahora el problema depende de n , cambiaremos ligeramente la notación de modo de explicitar esta dependencia, y lo escribiremos como sigue: Encontrar $\lambda^{(n)}$ en \mathbb{C} , para los cuales exista una función no idénticamente constante $\phi^{(n)} = \phi^{(n)}(x)$ tal que:

$$(4.1a) \quad \Delta \phi^{(n)} = 0 \text{ en } \Omega_n$$

$$(4.1.b) \quad \frac{\partial \phi^{(n)}}{\partial n} = \lambda^{(n)} \vec{n} \cdot \left[\int_{\gamma(\vec{\Gamma})} \phi^{(n)} \vec{n} ds \right] \text{ sobre } \gamma(\vec{\Gamma}), \quad \forall \vec{\Gamma} \in Q'_n$$

$$(4.1c) \quad \frac{\partial \phi^{(n)}}{\partial n} = 0 \text{ sobre } \Gamma_n$$

donde, en (4.1b), la incógnita $\lambda^{(n)}$ esta ligada a las frecuencias propias $\omega^2 = \omega^2(n)$ por la fórmula de la página 18, que en el caso que todos los tubos sean idénticos se escribe simplemente:

$$\lambda^{(n)} = \frac{\rho \omega^2(n)}{k - m \omega^2(n)},$$

donde k es la constante (común para todos los tubos) de elongación del sistema de resortes que soporta a cada tubo, y m es la masa (también común para todos los tubos) de cada tubo. ρ , como antes, es la densidad específica del fluido.

Como la remarcáramos en la Sección 2, las funciones propias de (2.4) sólo son definibles salvo por una

constante aditiva. Para determinar de manera única esta constante, impondremos que las funciones propias sean a media nula en Ω_n , esto es, agregaremos la condición suplementaria:

$$(4.1d) \quad \phi^{(n)} \in H.$$

Así, usando los resultados de la Sección 3, y particularmente, la Proposición 3.2, sabemos que el problema (4.1) admite exactamente $2K_n$, esto es, $8n^2$ valores propios. Estos valores los denotaremos:

$$0 < \lambda_1^{(n)} \leq \lambda_2^{(n)} \leq \dots \leq \lambda_{2K_n}^{(n)}.$$

Las correspondientes funciones propias serán denotadas por

$$\phi_1^{(n)}, \phi_2^{(n)}, \dots, \phi_{2K_n}^{(n)}.$$

El operador S asociado a (4.1) que introdujimos en la Sección 3d, lo denotaremos S_n . Recordemos que este se define por:

$$(4.2a) \quad S_n : \mathbb{C}^{2K_n} \rightarrow \mathbb{C}^{2K_n}$$

$$(4.2b) \quad S_n \vec{a} = \left(\int_{\gamma(\vec{\tau})} \varphi_n \vec{n} ds \right)_{\vec{\tau} \in Q_n}, \quad \forall \vec{a} = (\vec{a}(\vec{\tau}))_{\vec{\tau} \in Q_n} \in \mathbb{C}^{2K_n}$$

donde φ_n es la única solución del problema siguiente:

$$(4.3a) \quad \Delta \varphi_n = 0 \text{ en } \Omega_n$$

$$(4.2a) \quad \frac{\partial \varphi_n}{\partial n} = \vec{a}(\vec{\tau}) \cdot \vec{n} \text{ sobre } \gamma(\vec{\tau}), \quad \forall \vec{\tau} \in Q_n$$

$$(4.3c) \quad \frac{\partial \varphi_n}{\partial n} = 0 \text{ sobre } \Gamma_n, \quad \varphi_n \in H.$$

En (4.2b), y en todo lo que sigue, las componentes de un vector \vec{a} de \mathbb{C}^{2K_n} las agruparemos en subvectores $\vec{a}(\vec{\tau}) \in \mathbb{C}^2$, $\vec{\tau} \in Q_n$, de modo que cada $\vec{a}(\vec{\tau})$ vaya asociado a una sección de tubo $T(\vec{\tau})$.

El operador S_n juega un rol fundamental en el estudio de (4.1), pues este permite caracterizar las soluciones de

(4.1). Más precisamente, se cumple que $(\lambda^{(n)}, \phi^{(n)})$ es solución de (4.1) si y solamente si $\lambda^{(n)}$ es un valor

característico de S_n , de vector propio $\left(\int_{\gamma(\vec{l})} \varphi^{(n)} \vec{n} ds \right)_{\vec{l} \in Q_n}$

Como se mencionara en la Sección 3, en el artículo [Ag-Co] se prueba que S_n , a n fijo, es un operador lineal, autoadjunto y coercivo. De ahí que (4.1) admita exactamente $2K_n$ soluciones. Más aún, puesto que los k_1 son todos iguales a k , el operador S y $\text{ddiag}(k_1^{-1})$ conmutan, y entonces las funciones propias de (4.1) se puede escoger ortogonales con respecto al producto escalar usual, esto es, tales que:

$$\int_{\Omega_n} \nabla \bar{\varphi}_i^{(n)} \cdot \nabla \bar{\varphi}_j^{(n)} dx = \delta_{ij}, \quad \forall i, j = 1, \dots, 2K_n$$

Para los fines de estudiar el comportamiento asintótico de los valores característicos de S_n (o valores propios de (4.1)) necesitaremos una propiedad de uniforme coercividad de los operadores S_n , que estableceremos en la proposición siguiente, pero antes, introduzcamos una última notación relativa al dominio Ω_n .

El dominio Ω_n es periódico de período $\Psi \in]0, 1]^2$, el cual lo llamaremos el período de base, ó celda de referencia. Igualmente, al hoyo que queda en Ψ , esto es, $T(0,0)$ lo denotaremos simplemente T , y definiremos la celda de referencia perforada al dominio Ψ^* definido por:

$$\Psi^* = \Psi \setminus \bar{T}$$

Los trasladados de Ψ^* o de Ψ a la posición $\vec{l} \in \mathbb{Z}^2$ los denotaremos por $\Psi^*(\vec{l})$ ó $\Psi(\vec{l})$, respectivamente:

$$\Psi^*(\vec{l}) = \vec{l} + \Psi^* \quad \text{e} \quad \Psi(\vec{l}) = \vec{l} + \Psi.$$

Ciertamente, esta notación es coherente con la notación que estamos empleando para las perforaciones $T(\vec{\Gamma})$, pues $T(\vec{\Gamma}) = (\vec{\Gamma}) + T$.

Pasemos ahora a probar la:

Proposición 4.1. - Existe una constante $\alpha > 0$, independiente de n , tal que:

$$(4.4) \quad \langle S_n \vec{a}, \vec{a} \rangle_{2K_n} \geq \alpha \vec{a}^2_{2K_n} \quad \forall \vec{a} \in \mathbb{C}^{2K_n}.$$

Dem: Es claro que la mejor constante de coercividad de S_n es el más pequeño de sus valores propios. Denotándolo $\mu_1^{(n)}$, por el Principio de Minimax, $\mu_1^{(n)}$ verifica:

$$\begin{aligned} \mu_1^{(n)} &= \text{Min}_{\vec{a} \in \mathbb{C}^{2K_n}} \left\langle \frac{S_n \vec{a}, \vec{a}}{\vec{a}^2} \right\rangle \\ &= \text{Min}_{\vec{a} \in \mathbb{C}^2} \frac{\nabla \varphi_n^2_{0, \Omega_n}}{\vec{a}^2} \end{aligned}$$

Sea $\vec{a} \in \mathbb{C}^{2K_n}$. Para todo $\vec{\Gamma} \in Q_n$ se puede escoger $\psi_{\vec{\Gamma}} = \psi_{\vec{\Gamma}}(\vec{a}(\vec{\Gamma}))$ en $H^1(\Psi^*(\vec{\Gamma}))$ tal que:

$$(4.5a) \quad \int_{\Psi^*(\vec{\Gamma})} \psi_{\vec{\Gamma}} \vec{n} ds = \vec{a}(\vec{\Gamma})$$

$$(4.5b) \quad \exists C_0, \quad \nabla \psi_{\vec{\Gamma}}|_{0, \Psi^*(\vec{\Gamma})} \leq C_0 \vec{a}(\vec{\Gamma})^2$$

$$(4.5c) \quad \psi_{\vec{\Gamma}} = 0 \text{ sobre } \partial \Psi(\vec{\Gamma})$$

(Para construir $\psi_{\vec{\Gamma}}$ basta trabajar sobre la celda de referencia Ψ^* , y usar que la aplicación $\xi \rightarrow \int \xi \vec{n} ds$ es sobreyectiva de las funciones $H^1(\Psi^*)$, nulas sobre $\partial \Psi$, sobre \mathbb{C}^2 .)

Definamos luego $\psi \in H^1(\Omega)$ como igual a $\psi_{\vec{\Gamma}}$ sobre $\Psi^*(\vec{\Gamma})$.

Claramente ψ se anula sobre Γ_n . Multiplicando (4.3a) por $\bar{\psi}$, integrando por partes, y usando (4.5a,b) se tiene que:

$$\vec{a}^2 = \int_{\Omega_n} \nabla \varphi_n \cdot \nabla \bar{\psi} dx \leq C_0 \vec{a} \quad \nabla \varphi_n \text{ en } \Omega_n$$

y entonces

$$\mu_1^{(n)} \geq 1/C_0^2$$

lo cual prueba la proposición con $\alpha = 1/C_0^2$.

Los valores propios de S_n los denotaremos $0 < \mu_1^{(n)} \leq \mu_2^{(n)} \leq \dots \leq \mu_{2K_n}^{(n)}$. De acuerdo a como denotamos los valores propios de (4.1), se tendrá entonces que:

$$\mu_j^{(n)} = \frac{1}{\lambda_{2K_n - j + 1}} \quad \forall j = 1, 2, \dots, 2K_n$$

Los correspondientes vectores propios los denotaremos $\vec{v}_1^{(n)}, \dots, \vec{v}_{2K_n}^{(n)}$; ellos forman automáticamente una base ortogonal de \mathbb{C}^{2K_n} . Supondremos que, además, son ortogonales. Respecto de las funciones propias de (4.1) se cumple la relación:

$$\vec{v}_j^{(n)} = \left\{ \mu_j^{(n)} \right\}^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\vec{\gamma}(\vec{o})} \phi_{2K_n - j + 1}^{(n)} \vec{n} ds \right)_{\vec{\gamma} \in Q_n} \vec{v}_j$$

Así, la familia espectral $E(S_n, \cdot)$ asociada al operador S_n es la aplicación (constante por pedazos) definida por:

$$(4.6a) \quad E(S_n, \cdot): \mathbb{R} \longrightarrow \rightarrow(S_n, S_n)$$

$$(4.6b) \quad E(S_n, \mu) \vec{v} = \sum_{\substack{j: \mu_j^{(n)} \leq \mu}} \langle \vec{v}, \vec{v}_j^{(n)} \rangle_{2K_n} \vec{v}_j^{(n)} \quad \forall \vec{v} \in \mathbb{C}^{2K_n}$$

b) Descripción del problema límite y de su espectro.- Como veremos en las secciones siguientes, la sucesión de familias espectrales $E(S_n, \cdot)$ convergen hacia la familia espectral de un operador S que introduciremos a continuación: Sea $l \in \mathbb{C}^2$

el espacio de las sucesiones $\vec{a} = \{\vec{a}(\vec{\gamma})\}_{\vec{\gamma} \in \mathbb{C}^2}$ con valores en \mathbb{C}^2 , de cuadrados sumables. Denotemos Ω la unión de los dominios $\{\Omega_n | n \in \mathbb{N}\}$.

El operador S se define por:

$$(4.7a) \quad S : l_2(\mathbb{C}^2) \longrightarrow l_2(\mathbb{C}^2)$$

$$(4.7b) \quad S\vec{a} = \left\{ \int_{\gamma(\vec{\gamma})} \psi \vec{n} ds \right\} \quad \forall \vec{a} \in l_2(\mathbb{C}^2)$$

donde ψ es la solución única (definida salvo por una cte.) del problema siguiente:

$$(4.8a) \quad \Delta\psi = 0 \text{ en } \Omega$$

$$(4.8b) \quad \frac{\partial\psi}{\partial n} = \vec{a}(\vec{\gamma}) \cdot \vec{n} \text{ sobre } \gamma(\vec{\gamma}), \quad \forall \vec{\gamma} \in \mathbb{Z}^2$$

$$(4.8c) \quad \nabla\psi \in L^2(\Omega)$$

Se prueba de manera relativamente simple que el operador S , así definido, es un operador lineal continuo y autoadjunto de $l_2(\mathbb{C}^2)$ en sí mismo, esto es, $S \in \mathcal{L}(l_2(\mathbb{C}^2))$.

Por el teorema espectral, a S podemos asociar una familia espectral $E(S, \cdot)$ que es una aplicación de \mathbb{R} en $\mathcal{L}(l_2(\mathbb{C}^2))$ verificando las propiedades siguientes:

$$(4.9a) \quad E(S, \cdot) \text{ es continua a la derecha, esto es, } E(S, \mu) \rightarrow E(S, \lambda), \text{ cuando } \mu \rightarrow \lambda^+, \text{ en } \Lambda(l_2(\mathbb{C}^2)).$$

$$(4.9b) \quad E(S, \lambda)B = B E(S, \lambda) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \forall B \in \mathcal{L}(l_2(\mathbb{C}^2)); \quad SB = BS.$$

$$(4.9c) \quad E(S, \lambda) = 0 \quad \forall \lambda < m_-, \quad E(S, \lambda)B = I \quad \forall \lambda \geq m_+$$

donde

$$m_- = \inf_{\vec{a} \in l_2(\mathbb{C}^2)} \frac{\langle S\vec{a}, \vec{a} \rangle}{\|\vec{a}\|^2} \quad m_+ = \sup_{\vec{a} \in l_2(\mathbb{C}^2)} \frac{\langle S\vec{a}, \vec{a} \rangle}{\|\vec{a}\|^2}$$

$$(4.9d) \quad E(S, \lambda) \geq E(S, \mu) \quad \forall \lambda \geq \mu, \text{ en el sentido que } R(E(S, \lambda)) \supset R(E(S, \mu)).$$

$$(4.9e) \quad \forall f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \text{ continua sobre un intervalo abierto que contenga } [m_-, m_+], \text{ se tiene:}$$

$$f(S) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) d E(S, \lambda),$$

donde la integral es la integral en el sentido de Riemann-Stieljes para una medida a valores en un espacio de Banach.

También se tiene que:

$$f(S)\vec{a} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) d E(S, \lambda)\vec{a}, \quad \forall \vec{a} \in l_2(\mathbb{C}^2)$$

y

$$\langle f(S)\vec{a}, \vec{b} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) d \langle E(S, \lambda)\vec{a}, \vec{b} \rangle \quad \forall \vec{a}, \vec{b} \in l_2(\mathbb{C}^2).$$

Si $\vec{a} \in l_2(\mathbb{C}^2)$, denotaremos $\vec{a}_n^{2K} \in \mathbb{C}^{2K}$ la proyección canónica de \vec{a} sobre \mathbb{C}^{2K} , esto es, $\vec{a}_n(\vec{v}) = \vec{a}(\vec{v}) \quad \forall \vec{v} \in Q_n$. Inversamente, si $\vec{a} \in \mathbb{C}^{2K}$, denotaremos \vec{a} la extensión por cero de \vec{a} a $l(\mathbb{C}^2)$.

c) Resultados de convergencia.-

Teorema 4.2.- La familia espectral de S_n converge hacia la de S en el sentido siguiente : $\forall \vec{a}, \vec{v} \in l_2(\mathbb{C}^2)$:

$$(4.10) \quad \langle E(S_n^{1/2}, \cdot)\vec{a}_n, \vec{v}_n \rangle_{2K_n} \longrightarrow \langle E(S, \cdot)\vec{a}, \vec{v} \rangle,$$

cuando $n \rightarrow \infty$, en el sentido de las distribuciones (temperadas) en \mathbb{R} . ■

El resultado (4.10) involucra los operadores $S_n^{1/2}$ y $S^{1/2}$. Este se puede escribir en términos de S_n y S , considerando las relaciones siguientes:

$$E(S_n, \tau) = \begin{cases} 0 & \text{si } \tau \leq 0 \\ E(S_n^{1/2}, \tau^{1/2}) & \text{si } \tau > 0 \end{cases}$$

y una fórmula análoga vale para $E(S, \tau)$.

Demostración.- Paso 1. Sea $\vec{a} \in l_2(\mathbb{C}^2)$. Para cada n , consideremos el otro problema de Cauchy para el operador de ondas asociado a S_n :

$$(4.11a) \quad u_n''(t) + S_n u_n(t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$(4.11b) \quad u_n(0) = \vec{0}$$

$$(4.11c) \quad u_n'(0) = \vec{a}_n$$

$$(4.11d) \quad u_n, u_n' \in L_{loc}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^{2k_n}).$$

que no es más que un sistema lineal de e.d.o.'s, y que por lo tanto admite una solución global única $u_n \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}^{2k_n})$.

Multiplicando (4.11a) por u_n' se obtiene:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} u_n'^2 + \langle S_n u_n(t), u_n'(t) \rangle_{2k_n} = 0$$

y como S_n es un operador autoadjunto, sigue que:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\{ u_n'^2_{2k_n} + \langle S_n u_n(t), u_n \rangle_{2k_n} \right\} = 0$$

y entonces

$$u_n'(t)^2_{2k_n} + \langle S_n u_n(t), u_n(t) \rangle_{2k_n} = a_n^2_{2k_n} \leq \vec{a}^2$$

Usando la uniforme coercividad de los operadores S_n , se deduce de esta invarianza en t que existe M , independiente de n , tal que:.

$$u_n \in L^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}^{2k_n}) \leq M$$

$$u_n' \in L^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}^{2k_n}) \leq M$$

Denotemos $\tilde{u}_n(t)$ y $\tilde{u}'_n(t)$ las extensiones por cero de u_n y u'_n fuera de Q_n . Ciertamente, ellas pertenecen a $l_2(\mathbb{C}^2)$.

Sigue que $\{\tilde{u}_n\}$ y $\{\tilde{u}'_n\}$ están acotadas en $L^\infty(\mathbb{R}, l_2(\mathbb{C}))$. Se puede entonces extraer subsucesiones tales que:

$$\tilde{u}_n \rightarrow u \text{ en } L^\infty(\mathbb{R}, l_2(\mathbb{C}^2)) - \text{débil}^*, n \rightarrow \infty$$

$$\tilde{u}'_n \rightarrow u' \text{ en } L^\infty(\mathbb{R}, l_2(\mathbb{C}^2)) - \text{débil}^*, n \rightarrow \infty$$

Veamos que u y u' satisfacen al siguiente problema de Cauchy asociado al operador de ondas para S :

$$(4.12a) \quad u''(t) + S(t)u = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$(4.12b) \quad u(0) = 0$$

$$(4.12c) \quad u'(0) = \vec{a} \quad u, u' \in L^2_{loc}(\mathbb{R}, l_2(\mathbb{C}^2)).$$

Para pasar el límite recordemos que u_n se caracteriza como la solución del siguiente problema variacional:

$$(4.13a) \quad - \int_0^{+\infty} \langle u'_n(t), \psi'(t) \rangle_{2K_n} dt + \int_0^{+\infty} \langle S_n u_n(t), \psi(t) \rangle_{2K_n} dt + \langle \vec{a}_n, \psi(0) \rangle_{2K_n} = 0.$$

$$(4.13b) \quad u_n(0) = \vec{0}$$

$$(4.13c) \quad u_n(t) = -u_n(-t) \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

donde la función $\psi(t)$ es de la forma $\phi(t)\vec{v}_n$, con ϕ función regular a soporte compacto en $[0, +\infty)$, y \vec{v}_n es un elemento cualquiera de \mathbb{C}^{2K_n} .

Sea $\vec{v} \in l_2(\mathbb{C}^2)$ y \vec{v}_n su proyección sobre \mathbb{C}^{2K_n} . Para toda ϕ se tiene que:

$$(4.14) \quad - \int_0^{+\infty} \langle \tilde{u}'_n(t), \phi'(t)\vec{v} \rangle dt + \int_0^{+\infty} \langle \tilde{u}_n(t), \phi(t)S_n \vec{v}_n \rangle dt - \langle \vec{a}_n, \phi(0)\vec{v} \rangle = 0$$

Usando que $\tilde{u}'_n \rightarrow n'$ en L^∞ - débil * se pasa al límite en el primer término. Por otro lado, $\vec{a}_n \rightarrow \vec{a}$ en $l_2(\mathbb{C}^2)$ - fuerte, luego el 3^{er} término pasa al límite.

Para pasar al límite en el segundo término usaremos que $\tilde{u}_n \rightarrow u$ en L^∞ - débil * y el siguiente lema:

Lema 4.3.-

(i) $\forall \vec{v} \in l_2(\mathbb{C}^2), (S_n \vec{v}_n) \rightarrow S\vec{v}$ en $l_2(\mathbb{C}^2)$ -fuerte, $n \rightarrow \infty$

(ii) $\forall \vec{v} \in L_2(\mathbb{C}^2)$, $\langle S\vec{v}, \vec{v} \rangle \geq \alpha \|\vec{v}\|^2$, donde $\alpha \geq 0$ es la constante de la Proposición 4.1.

Pasando al límite en (4.14), se obtiene:

$$-\int_0^{\infty} \langle u'(t), \Phi'(t)\vec{v} \rangle dt + \int_0^{\infty} \langle u(t), S\vec{v}\Phi(t) \rangle dt - \langle \vec{a}, \Phi(0)\vec{v} \rangle = 0.$$

Por otro lado, la convergencia de \tilde{u}_n es en $W^{1,\infty}$ -débil * y por lo tanto, se puede pasar al límite en las condiciones (4.13b,c), concluyéndose que:

$$u(0)=0 \quad \text{y} \quad u(-t)=-u(t) \quad \forall t \in \mathbb{R} \text{ (c.t.p.)}.$$

Sigue entonces que u es solución de la formulación variacional de (4.12). Como este problema posee solución única, es toda la sucesión (\tilde{u}_n) y (\tilde{u}'_n) que converge hacia u y u' , respectivamente.

Paso 2.- En este paso traduciremos el resultado del paso 1 en términos de convergencia de las familias espectrales. Se usará para ello transformada de Fourier en tiempo.

El problema (4.11) tiene una solución explícita en términos de S_n que es:

$$u'_n(t) = \cos\left(S_n^{1/2}t\right) \vec{a}_n$$

y una fórmula análoga vale para la solución u del problema (4.12):

$$u'(t) = \cos\left(S^{1/2}t\right) \vec{a}$$

Puesto que $u'_n \rightarrow u'$, se tendrá que $\forall \vec{v} \in L_2(\mathbb{C}^2)$:

$$\langle \cos\left(S_n^{1/2}t\right) \vec{a}_n, \vec{v}_n \rangle_{2K_n} \rightarrow \langle \cos\left(S^{1/2}t\right) \vec{a}, \vec{v} \rangle \text{ en } L^\infty(\mathbb{R})\text{-débil } *, \quad n \rightarrow \infty,$$

lo que implica la convergencia en el sentido de las distribuciones temperadas. Luego, por Fourier:

$$(4.15) \quad \langle \cos\left(S_n^{1/2}t\right) \vec{a}_n, \vec{v}_n \rangle^\wedge(\tau) \rightarrow \langle \cos\left(S^{1/2}t\right) \vec{a}, \vec{v} \rangle^\wedge(\tau)$$

en el sentido de las distribuciones (temperadas), τ denota la variable de Fourier.

Pero,

$$\cos\left(S_n^{1/2}t\right) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \left\langle e^{i\tau t} + e^{-i\tau t} \right\rangle dE\left(S_n^{\frac{1}{2}}, \tau\right) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\tau t} d\left[E\left(S_n^{\frac{1}{2}}, \tau\right)\right] d\tau$$

y entonces

$$\left\langle \cos\left(S_n^{1/2}t\right) \vec{a}_n, \vec{v}_n \right\rangle = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\tau t} d\left[E\left(S_n^{\frac{1}{2}}, \tau\right) - E\left(S_n^{\frac{1}{2}}, -\tau\right)\right] \vec{a}_n, \vec{v}_n \rangle_{2\kappa_n} d\tau$$

y un resultado totalmente análogo vale para S . El lado derecho de esta igualdad no es nada más que la inversa de la transformada de Fourier de :

$$\frac{d}{d\tau} \left\langle \left[E\left(S_n^{1/2}, \tau\right) - E\left(S_n^{1/2}, -\tau\right) \right] \vec{a}_n, \vec{v}_n \right\rangle_{2\kappa_n}$$

Así, (4.15) es equivalente a:

$$\frac{d}{d\tau} \left\langle \left[E\left(S_n^{\frac{1}{2}}, \tau\right) - E\left(S_n^{\frac{1}{2}}, -\tau\right) \right] \vec{a}_n, \vec{v}_n \right\rangle_{2\kappa_n} \rightarrow \frac{d}{d\tau} \left\langle \left[E\left(S^{\frac{1}{2}}, \tau\right) - E\left(S^{\frac{1}{2}}, \tau\right) \right] \vec{a}, \vec{v} \right\rangle$$

en el sentido de las distribuciones. Usando luego que la

distribución $\frac{d}{d\tau} \left\langle E\left(S_n^{1/2}, \cdot\right) \vec{a}_n, \vec{v}_n \right\rangle$ se anula en $]0, \alpha^{1/2}[$,

lo que hace que las dos distribuciones del lado izquierdo tengan soportes disjuntos y entonces

$$\frac{d}{d\tau} \left\langle E\left(S_n^{1/2}, \cdot\right) \vec{a}_n, \vec{v}_n \right\rangle \rightarrow \frac{d}{d\tau} \left\langle E\left(S, \tau\right) \vec{a}, \vec{v} \right\rangle, \quad n \rightarrow \infty$$

en el sentido de las distribuciones.

Para terminar la demostración, notemos que las distribuciones $\left\langle E\left(S_n^{1/2}, \cdot\right) \vec{a}_n, \vec{v}_n \right\rangle$ tienen su soporte en el intervalo $[\alpha^{1/2}, +\infty[$, y por lo tanto se puede pasar de la convergencia de las derivadas a la convergencia anunciada en

el Teorema.

Para terminar la demostración del Teorema probaremos la Proposición 4.3.

Dem. Prop. 4.3.- Comenzaremos probando (i). Sea $\vec{v} \in L_2(\mathbb{C}^2)$.

Recordemos que $S_n \vec{v}_n$ está definido por:

$$S_n \vec{v}_n = \left(\int \varphi_n \vec{n} ds \right)_{\vec{\Gamma} \in Q_n} \vec{\Gamma}$$

donde φ_n es la solución (única) del siguiente problema:

$$(4.15a) \quad \Delta \varphi_n = 0 \text{ en } \Omega_n$$

$$(4.15b) \quad \frac{\partial \varphi_n}{\partial \vec{n}} = \vec{v}_n(\vec{\Gamma}) \cdot \vec{n} \text{ sobre } \gamma(\vec{\Gamma})$$

$$(4.15c) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}} = 0 \text{ sobre } \Gamma_n$$

Multiplicando (4.15a) por φ_n se deduce que:

$$\Delta \varphi_n \text{ en } \Omega_n \leq C \vec{v}_n \text{ en } \Omega_n \leq C \vec{v}$$

donde C sólo depende de Ψ^* . En lo que sigue de la demostración necesitaremos el siguiente resultado de prolongación, cuya prueba se puede consultar en la referencia [Cova, página 33]:

Lema de Extensión.- Existe una sucesión $\{P_n\}$ de operadores de extensión $P_n \in (H^1(\Omega_n), W)$ (W espacio de funciones $L^2_{loc}(\Omega)$, cuyo gradiente pertenece a $L^2(\Omega)^n$) tales que:

$$(4.16a) \quad P_n \psi(x) = \psi(x) \quad \forall x \in \Omega_n \quad \forall \psi \in H^1(\Omega_n).$$

Existe una constante $C > 0$, tal que:

$$(4.16b) \quad \nabla P_n \psi \text{ en } \Omega_n \leq C \psi \text{ en } \Omega_n \quad \forall \psi \in H^1(\Omega_n)$$

$$(4.16c) \quad P_n \psi(x) = 0 \text{ si } x \in \gamma(\vec{\Gamma}), \quad \forall \vec{\Gamma} \in Q_n.$$

Puesto que $\nabla \varphi_n \text{ en } \Omega_n$ está acotada, sigue de (4.16b) que la sucesión $\{P_n \varphi_n\}$ esta acotada en W. Podemos extraer una

subsucesión, aún denotada $P_n \varphi_n$, y existe $\varphi \in W$ tal que:

$$P_n \varphi_n \rightarrow \varphi \text{ en } W - \text{débil, } n \rightarrow \infty$$

Usando argumentos absolutamente clásicos, se pasa al límite en (4.15) y se deduce que φ es solución de:

$$(4.17a) \quad \Delta \varphi = 0 \text{ en } \Omega$$

$$(4.17b) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n} = \vec{v}(\vec{\Gamma}) \cdot \vec{n} \text{ sobre } \gamma(\vec{\Gamma}) \quad \forall \vec{\Gamma} \in \mathbb{Z}^2$$

Puesto que este problema admite solución única, se concluye que toda la sucesión $P_n \varphi_n$ converge hacia φ . Usando (4.16c) es claro que si $(S_n \vec{v}_n)^{\sim}$ denota la extensión por cero de $S_n \vec{v}_n$ a \mathbb{Z}^2 , entonces

$$(S_n \vec{v}_n)^{\sim} = \left(\int_{\gamma(\vec{\Gamma})} P_n \varphi_n \vec{n} ds \right)_{\vec{\Gamma} \in \mathbb{Z}^2}$$

$$\text{Ahora, el hecho que la aplicación } \psi \in W \rightarrow \left(\int_{\gamma(\vec{\Gamma})} \psi \vec{n} ds \right)_{\vec{\Gamma} \in \mathbb{Z}^2}$$

sea continua de W en $l_2(\mathbb{C}^2)$ implica que: $(S_n \vec{v}_n)^{\sim} \rightarrow S \vec{v}$ en $l_2(\mathbb{C}^2)$ - débil, $n \rightarrow \infty$.

Probemos a continuación que la convergencia es en realidad fuerte, para lo cual probaremos primero la convergencia de la energía:

$$\nabla \varphi_n^2_{0, \Omega_n} \rightarrow \nabla \varphi^2_{0, \Omega}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Multiplicando (4.15a) por φ_n , e integrando se tiene que:

$$\nabla \varphi_n^2_{0, \Omega_n} = \langle \vec{v}_n, S_n \vec{v}_n \rangle_{2K_n} = \langle \tilde{\vec{v}}_n, (S_n \vec{v}_n)^{\sim} \rangle$$

y puesto que $\tilde{\vec{v}} \rightarrow \vec{v}$ en $l_2(\mathbb{C}^2)$ - fuerte, sigue que:

$$\nabla \varphi_n^2_{0, \Omega_n} = \langle \vec{v}, S \vec{v} \rangle, \quad n \rightarrow \infty.$$

Pero, es directo de la definición de φ que $\langle \vec{v}, S \vec{v} \rangle$ no es otra cosa que $\nabla \varphi^2_{0, \Omega}$. Lo cual prueba la convergencia de la energía.

Ahora, $(S_n \vec{v}_n) \sim -S \vec{v}$ $^2 = \sum_{\vec{\gamma} \in Q_n} \left| \int_{\gamma(\vec{\gamma})} (\varphi_n - \varphi) \vec{n} ds \right|^2 + \sum_{\vec{\gamma} \in Q_n} \left| \int_{\gamma(\vec{\gamma})} \varphi \vec{n} ds \right|^2$

donde $\sum_{\vec{\gamma} \in Q_n} \left| \int_{\gamma(\vec{\gamma})} \varphi \vec{n} ds \right|^2 \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, pues $\varphi \in W$. Respecto del primer

término; se tiene la desigualdad:

$$\sum_{\vec{\gamma} \in Q_n} \left| \int_{\gamma(\vec{\gamma})} (\varphi_n - \varphi) \vec{n} ds \right|^2 \leq C^2 \nabla(\varphi - \varphi_n)_{0, \Omega_n}^2$$

Pero,

$$\nabla(\varphi - \varphi_n)_{0, \Omega_n}^2 = \nabla \varphi_{0, \Omega_n}^2 + \nabla \varphi_n_{0, \Omega_n}^2 - 2 \int_{\Omega_n} \nabla \varphi \cdot \vec{\varphi}_n dx$$

$\nabla \varphi_{0, \Omega}^2$ por convergencia la energía

Por otro lado,

$$-2 \int_{\Omega_n} \nabla \varphi \cdot \varphi_n dx = -2 \sum_{\vec{\gamma} \in Q_n} \vec{v}_n(\vec{\gamma}) \cdot \int_{\gamma(\vec{\gamma})} \varphi \vec{n} ds = -2 \langle \vec{v}_n, S \vec{v} \rangle$$

y pasando al límite:

$$-2 \int_{\Omega_n} \nabla \varphi \cdot \varphi_n dx \rightarrow -2 \langle \vec{v}, S \vec{v} \rangle = -2 \nabla \varphi_{0, \Omega}^2$$

lo que permite completar la prueba de (i) en la Proposición 4.3.

Para probar (ii) se razona como sigue: Sea $\vec{v} \in L_2(C^2)$;

luego:

$$\langle \vec{v}_n, (S_n \vec{v}) \rangle \geq \alpha \vec{v}_n^2_{2K_n}$$

y pasando al límite cuando $n \rightarrow \infty$:

$$\langle \vec{v}, S\vec{v} \rangle \geq \alpha \vec{v}^2$$

lo que completa la prueba de la proposición 4.3, y por consiguiente la del Teorema 4.2.

BIBLIOGRAFIA

- [Ag-co] Aguirre F. Conca C. *Eigenfrequencies of a tube bundle immersed in a fluid*, Applied Mathematics and Optimization 18(1), 1-38(1988).
- [B11] Blevins R.D. *Flow-Induced Vibrations*, Van Nostrand Reinhold, New York (1977).
- [B12] Blevins.R.D. *Sound induced by vortex shedding from cylinders*, Journal of Sound and Vibrations 92, 455-470(1984).
- [Ch1] Chen S.S. *Vibration of nuclear fuel bundles*, Nuclear Engineering Design 35, 399-422(1975).
- [Ch2] Chen S.S. *Vibration of a row of circular cylinders in a liquid*, Journal of Engineering Industry Trans. A.S.M.E., Serie B 97, 1212-1218(1975).
- [Co] Connors H.J. *Fluid elastic vibration of tube arrays excited by cross-flow*, in *Flow Induced Vibration in Heat Exchangers*, ed R.D.Reiff, A.S.M.E., New York(1950).
- [Co-va] Conca C., Vanninathan M. *A spectral problem arising in fluid-solid structures*. Computer Methods in Applied

Mechanics and Engineering 69(2), 215-242(1988).

- [Co-P1-v8] Conca C. Planchard J., Vanninathan M. *Existence and location of eigenvalues for fluid-solid structures*, to appear in Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering(1989).
- [Co] Gorman D.J. *Experimental study of peripheral problems to liquid flow-induced vibration in heat exchangers and steam generators*, paper F4/6, Trans Smirt, San Francisco (1977).
- [1b-P1] Ibnou-Zahir M, Planchard J. *Natural frequencies of a tube bundle in an incompressible fluid*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 41, 47-68(1983).
- [Pa] Paidoussis M.P. *Dynamics of flexible cylinders in axial flow theory Parts 1 and 2*, Journal of Fluid Mechanics 26, 717-751(1966).
- [Pe] Pettigrew M.J. *Flow induced vibration phenomena in nuclear power station components*, Power Industry Research 1, 97-133(1991).
- [P11] Planchard J. *Computation of the acoustic in eigenfrequencies of cavities containing a tube bundle*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 24, 125-135 (1980).
- [P12] Planchard J. *Eigenfrequencies of a tube bundle placed in a confined fluid*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 30, 75-93(1982).
- [P13] Planchard J. *Nuclear vibration of fuel assemblies: a simplified model*. Nuclear Engineering and Design 86, 383-391(1985).

- [P14] Planchard J. *Global behaviour of large elastic tube bundles immersed in a fluid*, Computational Mechanics 2, 105-198(1987).
- [P15] Planchard J. *Comportement dynamique des faisceaux de tubes immergés dans un fluide*, in *Aspects Théoriques et fluid Dynamiques des Structures*, ed. by J. Donea and Colls.; Collection de la Direction des Etudes et Recherches d'Electricité de France 70, 165-242, Eyralles, Paris(1988).

Preferentemente, CUBO pretende dar a conocer trabajos realacionados con el desarrollo de la matemática en Chile.

El precio de cada número es US\$10.-; pero es deseable el canje con otras publicaciones matemáticas periódicas.

Los artículos sometidos tendrán dos referatos y pueden ser presentados en castellano, portugués, francés o inglés. Son recibidos por cualquier miembro del Comité Editorial y por el Director de CUBO. En caso de usar una máquina de escribir, la superficie utilizable es 15,2cm.x 24,8cm en papel blanco. Si usa algún procesador de textos es recomendable adjuntar el archivo digitado. Los gráficos deben presentarse en tinta negra o bien en diapositivas. Toda correspondencia dirigirla a Director de la Revista CUBO en alguna de las siguientes direcciones:

CASILLA 54-D. CORREO DE TEMUCO,

UFRO@UCHCECVM.BITNET,

FAX 045-241231 o

TELEX 267038