CUBO, Vol. 3. Octubre 1987
Págs. 92-105

DETERMINACION DEL CENTRO DE $K[x;\delta]$.

Hugo Ramírez Passarge*

RESUMEN:

Se presenta el problema de la determinación del centro del anillo de las SKEW-Polinomials $K[x;\delta]$. Se determina que $C(K[x;\delta]) = \ker\delta$ si δ es trascendente sobre k; $C(K[x;\delta]) = (\ker\delta)[n(x)]$ si δ es algebraica sobre K, siendo $n(x)$ el polinomio minimal de δ sobre K. Este caso se da en car $(\ker\delta) = p > 0$, $[K:\ker\delta] = p^n$, y $n(x) = x^{p^n} + x^{p^{n-1}}\alpha_1 + \ldots + x\alpha_n$ ($\alpha_i \in \ker\delta$).

DEFINICION 1.

Dados un campo K y δ una derivación no nula definida sobre K, definimos el anillo de polinomios en x y coeficientes en K, con x no central, como el conjunto

$K[x;\delta] = \{ \sum_{i \in IN} x^i a_i \mid (a_i)_{i \in IN}$ es una sucesión en K de soporte finito $\}$, con igualdad, adición, y multiplicación definidas por:

1) $\sum_{i \in IN} x^i a_i = \sum_{i \in IN} b_i \Longleftrightarrow a_i = b_i \quad \forall i \in IN$

2) $(\sum_{i \in IN} x^i a_i) + (\sum_{i \in IN} x^i b_i) = \sum_{i \in IN} x^i (a_i + b_i)$

3) $(\sum_{i \in IN} x^i a_i)(\sum_{i \in IN} x^j b_j) = \sum_{(i,j,k) \in IN^3} \binom{j}{k} x^{i+k} a_i^{\delta^{j-x}} b_j$

$K[x;\delta]$ satisface las propiedades siguientes.

4) La función g: $K[x;\delta]^* \to IN$. $g(f(x)) = \max\{ i/a_i \neq 0 \}$ donde $f(x) \ \sum_{i \in IN} x^i a_i \neq 0$ es una función grado que satisface $g(f(x)-g(x) \leq \text{máx} \{g(f(x)); g(g(x))\}$ y $g(f(x).h(x)) = g(f(x)) + g(h(x))$.

5) $K[x;\delta]$ es un anillo íntegro que satisface algoritmo de división a la izquierda y a la derecha. Luego es un dominio de ideales principales izquierdos y derechos.

6) $\forall(A, a_o, \sigma)$ donde A es anillo; $\sigma : K \to A$ homomorfismo de anillos; y $a_o \in A$ satisface la condición (C)

$\forall a \in K,\ a^\sigma\ a_o = a_o\ a^\sigma + a^{\delta\sigma}\ \exists!\tilde{\sigma} : K[x;\delta] \to A$ que satisfa-ce $\tilde{\sigma}/_k = \sigma$ y $x^{\tilde{\sigma}} = a_o$. Además cuando $\tilde{\sigma}$ existe, $f(x)^{\tilde{\sigma}} = f^{\sigma}(a_o)$ donde $f^{\sigma}(a_o) \in A$ es obtenido al sustituir cada coeficiente de $f(x)$ por su imagen bajo σ, y x por a_o.

DEFINICION 2.

Sea A anillo. Entonces el conmutador de $a, b \in A$ es $[a,b] = ab - ba$ y satisface las propiedades.

7) $[\ ,\ ] : A \times A \to A$ es bi-aditiva.

8) $\forall a, b \in A$ las funciones $\delta a, \delta b : A \to A$ definidas por

$\delta_a = [a, .]$, y $\delta_b = [., b]$ son las derivaciones internas inducidas por a y b.

9) Si $\sigma : A \to B$ es homomorfismo de anillos, entonces preserva conmutadores:

$\forall a, b \in A,\ [a,b]^\sigma = [a^\sigma, b^\sigma]$

DEFINICION 3.

Denotamos por k el sub-campo de K de las constantes:

$k = \ker \delta = \{a \in K \ /\ a^\delta = 0\}$

DEFINICION 4.

El centro de un anillo A es el subanillo $C(A) = \{ a \in A \mid [a,b] = 0, \forall b \in A \}$ cuyos elementos se llaman centrales.

PROPOSICION 1:

En $K[x;\delta]$ valen las igualdades:

10) $[a, x^n] = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} x^k a^{\delta^{n-k}}$, $\forall a \in A$, $\forall n \in IN^*$

Conviene destacar el caso $n = 1$: $[a,x] = a^{\delta}$ $\forall a \in K$

11) $[a,x^n] = 0$, $\forall a \in k$, $\forall n \in IN$

12) $[x^n a, x] = x^n [a,x]$ $\forall a \in K$, $\forall n \in IN$

13) $[\ ,\ ]: K[x;\delta] \times K[x;\delta] \to K[x;\delta]$ es k-bilineal

DEMOSTRACION:

10) Particularizando (3) con $a_0 = a$, $a_i = 0$, $\forall i \in IN^*$, $b_n = 1$, $b_j = 0$, $\forall_j \in IN - \{n\}$ resulta

$$ax^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k a^{\delta^{n-k}}$$

Luego $[a,x^n] = ax^n - x^n a = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k a^{\delta^{n-k}} - x^n a =$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} x^k a^{\delta^{n-k}}$$

11) Si $a \in k = \ker \delta \Longrightarrow a^{\delta} = 0 \Longrightarrow a^{\delta^i} = 0, \quad \forall i \in \mathbb{N}$.

Luego por (10) $[a,x^n] = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} x^k a^{\delta^{n-k}} = 0$

12) $[x^n a, x] = x^n ax - xx^n a = x^n ax - xx^n a = x^n ax - x^{n+1} a =$

$= x^n(ax-xa) = x^n [a,x]$, $\forall a \in k$

13) De (7) sabemos que $[\ ,\ ]$ es biaditiva. Sea $f \in k[x;\delta]$ entonces $\forall \lambda \in k$, $\forall a \in k$, $\forall i \in \mathbb{N}$,

$[\lambda . x^i a, f] = (\lambda . x^i a)^{\delta f} =$

$= \lambda^{\delta f} . x^i a + \lambda (x^i a)^{\delta f} = [\lambda, f] x^i a + \lambda [x^i a, f] = \lambda [x^i a, f]$

(pues $\lambda \in k$ es central: $[\lambda, \sum_{i=0}^{n} x^i a_i] = \sum_{i=0}^{n} [\lambda, x^i a_i] =$

$\sum_{i=0}^{n} (x^i a_i)^{\delta \lambda}$

$= \sum_{i=0}^{n} \{ (x^i)^{\delta \lambda} a_i + x^i a_i^{\delta \lambda} \} = \sum_{i=0}^{n} \{ [\lambda, x^i] a_i + x^i [\lambda, a_i] \} = 0)$

Luego $[\cdot, f]$ es homogénea sobre monomios $x^i a_i$ y por aditividad será homogénea sobre polinomios.

La homogeneidad de $[f, \cdot]$ se prueba del mismo modo.

PROPOSICION 2.

Sea $f(x) = \sum_{i=0}^{n} x^i a_i \in K[x;\delta]$. Entonces

a) $[f(x), x] = \sum_{i=0}^{n} x^i a_i^\delta$

b) $[a, f(x)] = a^\delta a_1 + \ldots + \sum_{k=0}^{i-1} \binom{i}{k} x^k a^{\delta^{i-k}} a_i + \ldots + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} x^k a^{\delta^{n-k}} a_n$

Si $a_i \in k$, $i = 0, \ldots n$ y $a \in k$

DEMOSTRACION:

a) $[f(x), x] = [\sum_{i=0}^{n} x^i a_i, x] = \sum_{i=0}^{n} [x^i a_i, x] = \sum_{i=0}^{n} x^i [a_i, x]$

$= \sum_{i=0}^{n} x^i a_i^\delta$

b) $[a, f(x)] = [a, a_0 + x a_1 + \ldots + x^i a_i + \ldots + x^n a_n]$

$= [a, a_0] + [a, x a_1] + \ldots + [a, x^i a_i] + \ldots + [a, x^n a_n]$

$= [a, x] a_1 + \ldots + [a, x^i] a_i + \ldots + [a, x^n] a_n$

$= a^\delta a_1 + \ldots + \sum_{k=0}^{i-1} \binom{i}{k} x^k a^{\delta^{i-k}} a_i + \ldots + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} x^k a^{\delta^{n-k}} a_n$

PROPOSICION 3.

El homomorfismo de anillo $R: K \to End(k, +)$ tal que $a \to a_R: b \to ba$ se extiende de modo únicon con $x^{\bar{R}} = \delta$ a $\bar{R}: K[x; \delta] \to End(K, +)$. Además $\bar{R}$ es K-lineal donde $End(K, +)$ es un K-espacio vectorial derecho vía la acción $f\lambda = f \circ \lambda_R$.

DEMOSTRACION:

Para extender R basta que cumpla la condición C de (6):

$$a^R \circ \delta = \delta \circ a^R + (a^\delta)^R \quad \forall a \in K$$

es decir, $a_R \circ \delta = \delta \circ a_R + (a^\delta)_R$ y estas funciones son iguales pues:

$$b^{\delta \circ a_R + (a^\delta)_R} = b^\delta a + ba^\delta = (ab)^\delta = b^{a_R \circ \delta} \quad \forall b \in K$$

$\bar{R}$ es k-lineal pues $(f(x)\lambda)^{\bar{R}} = f(x)^{\bar{R}} = \circ\ \lambda^{\bar{R}} = f(x)^{\bar{R}} \circ \lambda_R$
$= f(x)^{\bar{R}} \lambda$

PROPOSICION 4.

Sea $n \in IN^*$ y p un primo de IN tal que

$$\binom{n}{1} = \binom{n}{2} = \ldots = \binom{n}{n-1} = 0 \quad (\text{mod } p).$$

Entonces $t \in IN^*$ tal que $n = p^t$.

DEMOSTRACION:

Descompongamos $n = p^t m$ con $p \nmid m$ y

$t \geq 1$ ($\binom{n}{1} = n = 0(p)$)

$$\text{si} \quad m > 1 \implies 1 < p^t < n \implies \binom{p^t m}{p^t} \equiv m = 0 \pmod p$$

lo que es una contradicción.

PROPOSICION 5.

Sea A anillo y $a, b \in C(A)$, b cancelable.
Sea $C \in A$ tal que $a = bc$. Entonces $C \in C(A)$

DEMOSTRACION:

En efecto $\forall \alpha \in A$, $0 = \alpha a - a\alpha = \alpha bc - bc\alpha =$
$b(\alpha c - c\alpha) \implies \alpha c - c\alpha = 0$.

(JACOBSON-BOURBAKI) Sea K un campo. Entonces dado $A \ni 1$ sub-anillo de End$(K, +)$ tal que:

a) A es un sub-espacio vectorial derecho sobre K de End $(K,+)$.

b) $[A : K] = n$

Entonces $k = \{a \in K \, / \, a_R \circ f = f \circ a_R \, , \, \forall f \in A\}$
es un subcampo de K, $[K : k] = n$ y $A = \mathrm{End}_R(K,+)$.

DEFINICION 5.

Usando el homomorfismo lineal de anillos $\bar{R}$ de proposición (3) $\bar{R}: K[x;\delta] \to \mathrm{End}(K,+)$

$$\text{Sea} \quad K[\delta] = \mathrm{Im}\,\bar{R} = \{\sum_{i=0}^{n} \delta^i a_i \, / \, n \in \mathbb{N} \ \text{y} \ a_i \in K\}$$

donde $\delta^i a_i = \delta^i \circ (a_i)_R$

Luego $K[\delta]$ es un subanillo de $End(K,+)$ homomorfo a $K[x;\delta]$ que además es una espacio vecotiral derecho sobre K.

PROPOSICION 6.

Supongamos que existe un polinomio $f(x) \in K[x;\delta]$ de grado mínimo con. $f(\delta) = 0$.

Entonces $[K[\delta] : K] =$ grado $f(x)$. Además el algoritmo de división de $K[x,\delta]$ implica que si $g \in K[x,\delta]$ satisface $g(\delta) = 0 \Longrightarrow f(x)/g(x)$.

DEMOSTRACION:

Es obvio.

Finalmente enunciamos el resultado en un Teorema.

TEOREMA:

$C(K[x;\delta]) = k$ si δ es trascendente sobre K.

$C(K[x;\delta]) = k[n(x)]$ si δ es algebraica sobre K, siendo $n(x)$ el polinomio minimal de δ sobre K.

Este último caso se da necesariamente en car $k = p > 0$ y $[K:k] = p^n$. Además $n(x) = x^{p^n} : x^{p^{n-1}}\alpha_1 + \ldots + x$, $(\alpha_i \in k)$

DEMOSTRACION:

Primeramente un elemento $a \in K$ es central si y solo si $a \in k$. En efecto $a \in C(K[x;\delta]) \iff [f,x] = f^{\delta} = 0$

$$\iff f \in k.$$

Supongamos que $f(x) = \sum_{i=0}^{n} x^{i} a_i \in C(K[x;\delta])$.

Es claro que $f(x)$ ($a_n \neq 0$, gr $f \geq 1$) es central $\iff f(x)$ conmuta con x y con cada $a \in K$ $\iff [f(x),x] = [a,f(x)] = 0$. Usando PROPOSICION (2) estas condiciones son equivalentes a:

$$\sum_{i=0}^{n} x^{i} a_i = 0 \iff a_i \in k$$

$(i = 0, 1, \ldots, n)$ y a

$$a^{\delta} a_1 + \ldots + \sum_{k=0}^{i-1} \binom{i}{k} x^{k} a^{\delta^{i-k}} a_i + \ldots + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} x^{k} a^{\delta^{n-k}} a_n = 0,$$

$\forall a \in K$

Como este polinomio es nulo, su coeficiente de x^{i-1}

$$\binom{i}{i-1} a^{\delta} a_i + \binom{i+1}{i-1} a^{\delta^2} a_{i+1} + \ldots + \binom{n}{i-1} a^{\delta^{n-i+1}} a_n = 0,$$

$\forall a \in K \quad i = 1, 2, \ldots, n.$

Esta última ecuación es equivalente a:

$$\delta \binom{i}{i-1} a_i + \delta^2 \binom{i+1}{i-1} a_{i+1} + \ldots + \delta^{n-i+1} \binom{n}{i-1} a_n = \hat{0}$$

$i = 1, 2, \ldots, n$

En particular para $i = 1, n$ resulta:

$$\delta a_1 + \delta^2 a_2 + \dots + \delta^n a_n = \hat{0} \quad y \; \delta n a_n = \hat{0}$$

si $\delta n a_n = \hat{0}$, $\delta \neq 0 \implies n a_n = 0, (n 1_k) a_n = 0 \implies n 1_k = 0$

$\implies \operatorname{car} K = p > 0$, p primo. Además, si definimos

$g(x) = f(x) - f(0)$, $g(x)$ es central y $g(\delta) = 0$

Como suponemos que existe un polinomio no constante f tq $f(\delta) = 0$ podemos elegir un polinomio $n(x) \in K[x;\delta] = 0$ mónico, de grado minimal tal que $n(\delta) = 0$.

Pongamos $n(x) = \sum_{i=0}^{n} x^i a_i$ con $a_n = 1$.

Entonces $n(x)$ es central pues usando Proposición (2)

$[n(x), x] = \sum_{i=0}^{n} x_i a_i^{\delta} = \sum_{i=0}^{n-1} x_i a_i^{\delta}$ es de menor grado que $n(x)$ y $[n(x), x]^{\bar{R}} = [n(x)^{\bar{R}}, x^{\bar{R}}] = [n(\delta), \delta] =$

$$= [\hat{0}, \delta] = \hat{0}$$

$$\therefore [n(x), x] = 0$$

Por otro lado $\forall a \in K, [a, n(x)] =$

$$= a^{\delta} a_1 + \dots + \sum_{k=0}^{i-1} \binom{i}{k} x^k a^{\delta^{i-k}} a_i + \dots + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} x^k a^{\delta^{n-k}} a_n$$

es de menor grado que $n(x)$ y $[a, n(x)]^{\bar{R}} = [a^R, n(x)^{\bar{R}}]$

$$= [a_R, n(\delta)] = [a_R, \hat{0}] = \hat{0}$$

$$\Longrightarrow [a, n(x)] = 0, \quad \forall a \in K.$$

Ahora probamos por inducción sobre el grado de $f(x)$ lo siguiente:

si $f(x)$ es central, gr $f(x) \geq 1$, existe $g \in k[x]$ tal que

$$f(x) = g(n(x))$$

f central $\Longrightarrow (f-f(0))(\delta) = 0 \Longrightarrow {}^{n(x)}/f(x) - f(0) \Longrightarrow$

$f(x) - f(0) = n(x)\ f_1(x)$

por Proposición (5) $f_1(x)$ es central. Si $f_1(x) \in k$

$\Longrightarrow f(x) = f(0) + n(x)\ f_1$ y luego si,

$$g(x) = f(0) + f_1 x \in k[x]$$

$\Longrightarrow f(x) = g(n(x))$.

Si gr $f_1 \geq 1$ y como gr $f_1 <$ gr f

$\Longrightarrow$ por hipótesis inductiva $f_1 = g_1(n(x))$, $g_1 \in k[x]$

y luego $f(x) = f(0) + n(x)\ g_1(n(x))$

entonces si

$$g(x) = f(0) + x g_1(x) \in k[x]$$

se tiene que $f(x) = g(n(x))$.

o sea $C(k[x, \delta]) = k[n(x)]$.

Ahora determinemos la forma explícita de $n(x)$:

como $n(x)$ es central, si $n(x) = \sum_{i=0}^{n} x^i a_i$ entonces valen las igualdades

$$a^{\delta}\binom{i}{i-1}\alpha_i + a^{\delta^2}\binom{i+1}{i-1}\alpha_{i+1} + \dots + a^{\delta^{n-i+1}}\binom{n}{i-1}\alpha_n = 0$$

$\forall a \in K, \quad i = 2,3,\dots, n-1$

es decir los polinomios

$$f_i = x\binom{i}{i-1}\alpha_i + x^2\binom{i+1}{i-1}\alpha_{i+1} + \dots + x^{n-i+1}\binom{n}{i-1}\alpha_n$$

satisfacen $f_i(\delta) = 0$ y $1 \leq \mathrm{gr}\, f_i \leq n-1$ y luego

sus coeficientes son todos nulos. Estos coeficientes se pueden poner en el arreglo:

$$\begin{array}{lr}
\binom{2}{1}\alpha_2, \binom{3}{1}\alpha_3, \dots, \binom{j}{1}\alpha_j, \dots, \binom{n}{1}\alpha_n & (i = 2) \\
\binom{3}{2}\alpha_3, \dots, \binom{j}{2}\alpha_j, \dots, \binom{n}{2}\alpha_n & (i = 3) \\
\binom{j}{j-1}\alpha_j, \dots, \binom{n}{j-1}\alpha_n & (i = j) \\
\binom{n-1}{n-2}\alpha_{n-1}, \binom{n}{n-2}\alpha_n & (i = n-1)
\end{array}$$

luego si $\alpha_j \neq 0$ se deduce que

$$\binom{j}{1} = \binom{j}{2} = \dots = \binom{j}{j-1} = 0 \quad (P)$$

$\Longrightarrow j = p^t$. Es decir al considerar un monomio

$x^i \alpha_i$ de $m(x)$ en $\alpha_i \neq 0$ entonces $i = p^t$

$i \geq 2$

luego $n(x) = x^{p}\alpha_1 + x^{p^2}\alpha_2 + \dots + x^{p^n}$

Finalmente por proposición (6) y definición (5) sabemos que $K[\delta]$ es un subanillo de $End(k,+)$ que además es un sub-espacio vectorial derecho sobre K de $End(K,+)$ y $[K[\delta]: K] = gr\ n(x) = p^n$

Además $\{a \in K : a_R \circ A = A \circ a_R ,\ \forall A \in K[\delta]\}$

$= \{a \in K : a_R \circ \delta = \delta \circ a_R\} = ker\,\delta = k$

Luego por Jacobson-Bourbaki $[K : k] = p^n$ y $K[\delta] = End_k (K,+)$.

BIBLIOGRAFIA:

- JACOBSON N. : Lectures in Abstract Algebra, Vol.III.
- JATEGAONKAR A.: Skew polynomials over semisimple rings J. Algebra 19 (1971), 315 - 328.