that is

$$\left(\frac{1+r}{1+R}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)=e^{-s_f(n)}$$

where $s_f(n)$ is the rate of growth of the function f(n).

SRAFFINO SVOĐENJE PROMETNE VREDNOSTI NA UKUPNU KOLIČINU RADA: KOMENTAR

Stojan BABIĆ i Ladislav NOVAK

Rezime

Kod Sraffinog metoda izražavanja prometne vrednosti roba (kao sadašnje vrednosti sume ukupnih direktnih i indirektnih radova koji su uloženi u njihovu proizvodnju) ključnu ulogu imaju varijacije vrednosti odgovarajućih članova reda u zavisnosti od veličine profitne stope i vremenskog intervala, a u cilju eksplicitnog dokaza da se veličina kapitala ne može odrediti nezavisno od odnosa raspodele. U ovom radu razmatra se problem nalaženja onog člana reda koji za određenu vrednost profitne stope ima vrednost veću od bilo kog drugog člana tog reda. U radu je pokazano da se za slučaj specijalno izabrane »istorije« radova, koja član normira na proizvoljnu konstantu dobijaju rezultati identični onima koje je dobio Sraffa. Takođe je dat algoritam problema za proizvoljno izabranu »istoriju« radova. U analizi je razlikovan diskretan i kontinuelan slučaj.

JEDNA SPECIFIČNA PRIMENA DINAMIČKOG PROGRAMIRANJA: APROKSIMACIJA VREMENSKIH SERIJA ODSEČCIMA VIŠE PRAVIH LINIJA

*Radivoj PETROVIĆ i Sonja STOJANOVIĆ**

1. UVOD

Pri praćenju ponašanja ekonomskih pojava često se postavlja zadatak nalaženja »najbolje« aproksimacije vremenskih serija zadatim tipovima funkcija. Zadatak se može rešavati na razne načine, koristeći raznovrsne gradijentne postupke i tehnike numeričkog pretraživanja. U ovom radu je opisan postupak nalaženja »najbolje« aproksimacije vremenskih serija odsečcima više pravih linija. Ovakva aproksimacija poseduje sve dobre osobine linearnih aproksimacija tj. omogućava dalju linearnu analizu posmatranih pojava, pa je potreba za njom česta. Zatim, činjenica da vremensku seriju podataka, umesto jednom pravom, aproksimiramo pomoću odsečaka više pravih, govori da će ovakva aproksimacija biti kvalitetnija, naročito kada je u pitanju duža vremenska serija.

Uočavaju se dve vrste ovih zadataka. U prvoj vrsti polazni podaci su predstavljeni serijom originalnih podataka datih u obliku niza uređenih parova brojeva. U drugoj vrsti zadataka vremenska serija je već preliminarno analizirana i opisana nekom analitičkom nelinearnom krivom koja je dobijena aproksimacijom originalnih podataka, pa u sledećem aproksimativnom koraku u analizi, krivu treba »zameniti« odsečcima više pravih. Na primer, pojave koje pokazuju tendenciju stalnog rasta (kretanje društvenog proizvoda privrede u celini ili pojedinih privrednih grana, broj zaposlenih, učešće industrijske proizvodnje u ukupnom društvenom proizvodu) obično se najpre predstavljaju eksponencijalnim krivim, a zatim, u cilju dalje analize, aproksimiraju odsečcima više pravih linija.

U obe ove vrste zadataka reč »najbolja« aproksimacija odsečcima više pravih linija se odnosi na unapred izabranu meru kvaliteta aproksimacije. U praktičnim zadacima mera je najčešće suma kvadrata razlike aproksimacije i stvarne vrednosti. Međutim, mera kvaliteta mo-

* Institut »Mihailo Pupin«, Beograd.

že biti i drugačija funkcija, čak neanalitička, kao na primer: apsolutna vrednost maksimuma odstupanja aproksimacije od stvarne vrednosti.

Pri aproksimaciji vremenskih serija odsečcima više pravih linija, može se dopustiti da prave budu određene tako da u određenim vremenima — tačkama prekida važnosti jedne prave i otpočinjanja važnosti druge prave, te dve susedne prave nemaju iste ordinate. Postoji, naravno, i druga mogućnost — da se unapred zahteva da se aproksimacija vremenskih serija vrši odsečcima više pravih linija koje obrazuju poligonalnu liniju. Ovaj dopunski uslov, čini se, usložnjava postupak nalaženja rešenja, ali interesantno je da će u rešavanju ovog zadatka putem dinamičkog programiranja ukupan obim računanja biti manji.

U radu je kao primer, detaljno opisan postupak nalaženja najbolje aproksimacije kretanja vrednosti društvenog proizvoda elektroindustrije Jugoslavije odsečcima više pravih linija. Najbolja aproksimacija je nađena za oba, napred pomenuta, slučaja:

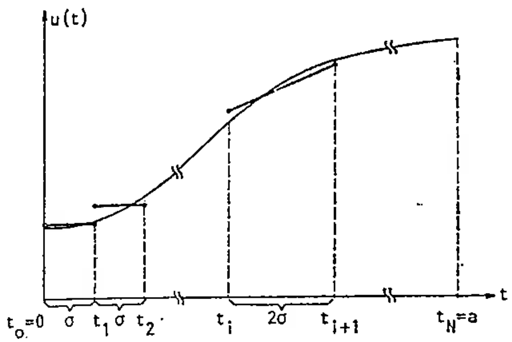
(a) direktnim korišćenjem originalnih podataka,

(b) korišćenjem analitičkih podataka dobijenih prethodnom aproksimacijom realnih podataka eksponencijalnom krivom rasta.

Izvršeno je poređenje najboljih aproksimacija u prvom i u drugom slučaju.

2. POSTAVKA ZADATKA

Postavka zadatka nalaženja najbolje aproksimacije neke funkcije vremena odsečcima više pravih linija je sledeća. Data je kriva $u(t)$, $t \varepsilon (0, a)$, definisana u normalizovanom vremenskom intervalu $(0, a)$. Zadatak se sastoji u tome da se zadata kriva $u(t)$ aproksimira u datom intervalu odsečcima više (u opštem slučaju $N = 1, 2, \ldots$) pravih linija $y(t, m_i, b_i) = m_i + b_i t$, tako da i-ti odsečak važi u intervalu (t_{i-1}, t_i), $i = 1, 2, \ldots, N$, (Slika 1.).



Slika 1.

Parametre m_i, b_i, t_i, $i = 0, 1, \ldots, N-1$, treba tako odrediti da se postigne minimum odabrane integralne mere odstupanja aproksimacije. Najčešće, mera odstupanja je suma kvadrata odstupanja tj.

$$R_N = \sum_{i=0}^{N-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} | u(t) - m_i - b_i t |^2 \, dt \tag{1}$$

gde je N broj odsečaka pravih linija kojima se vrši aproksimacija krive $u(t)$, a važi: $t_o = 0$, $t_N = a$. Treba uočiti da t_i, $i = 1, 2, \ldots, N-1$, nisu zadati unapred, već ih treba odrediti u procesu minimizacije R_N.

U slučaju da su, umesto krivom $u(t)$, polazni podaci dati serijom originalnih podataka u obliku homogenog niza uređenih parova brojeva $|t^k, u(t^k)|$, $k = 0, 1, \ldots, k_1, \ldots, k_r, \ldots, K_N = K$, $t^k = k\delta$, $t^o = 0$, $a = K\delta$, δ — korak na vremenskoj osi, mera odstupanja $\bar{R}_N$ je:

$$\bar{R}_N = \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{k=K_i}^{K_{i+1}} | u(t^k) - m_i - b_i t^k |^2 \tag{2}$$

gde je $K_o = 0$, $K_N = K$, a treba naći m_i, b_i, K_i, $i = 0, 1, \ldots, N-1$, tako da se postigne minimum $\bar{R}_N$ u (2). U ovom zadatku K_i, $i = 1, \ldots, N-1$ nisu unapred zadati već ih treba odrediti u procesu minimizacije $\bar{R}_N$.

Nalaženje minimuma R_N u (1), odnosno $\bar{R}_N$ u (2), je složen zadatak određivanja ekstremuma funkcije od $3N-1$ promenljivih, Kao što se vidi promenljive su m_i, b_i, t_i, odnosno m_i, b_i, K_i, za $i = 0, 1 \ldots, N-1$, uz zadato $t_o = 0$, odnosno $K_o = 0$.

3. POSTUPAK REŠAVANJA ZADATKA

Nalaženje najbolje aproksimacije odsečcima više pravih, svedeno u prethodnom odeljku na minimizaciju R_N, odnosno $\bar{R}_N$, efikasno će se rešiti putem dinamičkog programiranja.

Definišimo funkcije $f_N(a)$, smatrajući da je a promenljiva veličina i da uzima vrednosti između 0 i u zadatku date pozitivne vrednosti a.

$$\textit{Definicija:}\quad f_N(a) = \min_{\{m_i,\, b_i,\, t_i\}} R_N \qquad N = 1, 2, \ldots;\ i = 0, 1, \ldots, N-1 \tag{3}$$

Iz (3) sledi da pri izračunavanju vrednosti funkcije $f_N(a)$, za svako celobrojno $N = 1, 2, \ldots$, minimum R_N treba tražiti po kvim vrednostima koeficijenata pravih m_i i b_i i parametra t_i za sve vrednosti t_i, $i = 0, 1, \ldots, N-1$, i za svako $a \geq 0$.

Definišimo, takođe, funkciju dveju promenljivih $\Delta(t_i, t_{i+1})$

$$\Delta(t_i, t_{i+1}) = \min_{(m,b)} \int_{t_i}^{t_{i+1}} |u(t) - m - bt|^2 \, dt \qquad 0 \le t_i < t_{i+1} \le a \tag{4}$$

Kao posledica principa optimalnosti, funkcionalne jednačine dinamičkog programiranja koje povezuju funkcije $f_N(a)$ za $N = 1, 2, \ldots$ u (3) su sledeće:

$$f_1(a) = \Delta(0, a): \text{ sledi iz definicija (3) i (4).}$$

$$f_N(a) = \min_{0 \le t_{N-1} \le a} |f_{N-1}(t_{N-1}) + \Delta(t_{N-1}, a)|: \text{ direktno sledi iz principa optimalnosti.} \qquad \text{za } N = 2, 3, \ldots, N \tag{5}$$

Slično prethodnom, u slučaju da su polazni podaci vremenska serija data u obliku niza uređenih parova brojeva, definiše se funkcija:

Definicija:

$$f_N(K) = \min_{\{m_i, b_i, K_i\}} \overline{R}_N, \quad N = 1, 2, \ldots, \quad i = 0, 1, \ldots, N-1 \tag{6}$$

a zatim definišimo funkciju:

$$\Delta(K_i, K_{i+1}) = \min_{(m,b)} \sum_{k=K_i}^{K_{i+1}} \{u(t^k) - m - bt^k\}^2 \qquad 0 \le K_i < K_{i+1} \le K = \frac{a}{\delta} \tag{7}$$

pa shodno principu optimalnosti, rekurentne relacije dinamičkog programiranja glase:

$$f_1(K) = \Delta(0, K)$$

$$f_N(K) = \min_{0 \le K_{N-1} \le K} |f_{N-1}(K_{N-1}) + \Delta(K_{N-1}, K)| \qquad N = 2, 3, \ldots, N \tag{8}$$

Putem rekurentnih relacija (5) i (8), nalaze se funkcije $f_N(a)$, odnosno $f_N(K)$, koje za zadato a ili K, i neko N predstavljaju minimalnu vrednost srednjeg kvadrata odstupanja aproksimacije putem N odsečaka pravih i ulazne funkcije $u(t)$, odnosno vremenske serije date u obliku niza uređenih parova brojeva, respektivno.

Kao što se vidi, u primeni rekurentnih relacija (5), odnosno (8), koriste se funkcije $\Delta(t_i, t_{i+1})$ i $\Delta(K_i, K_{i+1})$, respektivno. Obe ove funkcije lako se računaju za bilo koji par argumenata. U rekurentnim relacijama (5) i (8), pak, sprovodi se jednodimenzionalno numeričko pretraživanje u cilju traženja minimuma i pri tome pamti funkcija jedne promenljive. Iz ovog sledi da primenjujući računski proces dinamičkog programiranja, umesto traženja minimuma funkcije 3N—1 promenljivih argumenta, funkcije R_N, odnosno $\overline{R}_N$, treba višestruko tražiti ekstremume funkcija samo jedne promenljive (rekurentne relacije (5) i (8)) i uzastopno rešavati jednostavne zadatke određivanja minimuma funkcija dve promenljive (sračunavanje funkcija $\Delta(t_i, t_{i+1})$, odnosno $\Delta(K_i, K_{i+1})$). Očigledno je da se primenom dinamičkog programiranja u računskom postupku može mnogo dobiti.

Primena dinamičkog programiranja u rešavanju ovog zadatka ima i sledeće dve prednosti:

(1) Nema nikakvih teškoća i u slučajevima kada su funkcije R_N, odnosno R_N, neanalitičke (na pr. $R_N = \max_{t_i \le t \le t_{i+1}} |u(t) - m_i - b_i t|$).

(2) Samo primena dinamičkog programiranja omogućava da direktni ulazni podaci budu nizovi uređenih parova brojeva $|t^k, u(t^k)|$.

4. PRIMER

Opšte napomene

U cilju ilustracije primene opisanog postupka dinamičkog programiranja posmatrano je kretanje društvenog proizvoda elektroindustrije Jugoslavije u dvadesetogodišnjem periodu (1955—1974. god.)[5]. Prilikom traženja najbolje aproksimacije kretanja društvenog proizvoda elektroindustrije Jugoslavije odsečcima više pravih linija, pošlo se od sledećeg:

1. Ceo dvadesetogodišnji period, u kome je posmatrano kretanje društvenog proizvoda elektroindustrije Jugoslavije, je podeljen na pet jednakih perioda (K = 5), tako da jedinična dužina vremenskog intervala iznosi 4 kalendarske godine ($\sigma = 4$);

2. Svaki od posmatranih intervala je definisan svojom donjom (t_i) i gornjom granicom (t_{i+1});

3. Kriva kretanja društvenog proizvoda elektroindustrije Jugoslavije se predstavlja sa najviše (K—1) odsečkom pravih linija. S obzirom da je, u posmatranom slučaju, broj jediničnih vremenskih intervala 5, to se posmatrana vremenska serija može aproksimirati sa najviše četiri odsečka pravih linija;

4. Mera za određivanje najbolje aproksimacije vremenske serije odsečcima više pravih linija je suma kvadrata odstupanja;

5. Prave kojima se vrši aproksimacija eksperimentalnih podataka ne moraju da obrazuju poligonalnu liniju, tj. u tačkama prekida dve susedne prave ne moraju imati istu ordinatu.

Zadatak je rešavan na dva načina:

(a) Kretanje društvenog proizvoda elektroindustrije Jugoslavije je opisano analitičkom krivom koja je dobijena aproksimacijom originalnih podataka. S obzirom da vrednost društvenog proizvoda privrede u celini ili pojedinih privrednih grana raste iz godine u godinu, to je pretpostavljeno da je kriva kretanja društvenog proizvoda elektroindustrije Jugoslavije eksponencijalnog tipa;

(b) Kretanje društvenog proizvoda elektroindustrije Jugoslavije je predstavljeno serijom originalnih podataka datih u obliku niza uređenih parova brojeva.

U daljem radu će postupak rešavanja zadatka biti detaljno prikazan samo za slučaj kada je posmatrana pojava prikazana analitičkom krivom eksponencijalnog tipa. Paralelno sa tim, daće se tumačenje postupka nalaženja optimalnog rešenja za slučaj kada su polazni podaci predstavljeni u obliku niza uređenih parova brojeva.

Postavka zadatka

Postavka zadatka je sledeća. Data je kriva kretanja društvenog proizvoda elektroindustrije Jugoslavije (za dvadesetogodišnji period)

$$u(t) = p\,e^{qt} \qquad p = 309{,}135, \qquad q = 0{,}135 \tag{9}$$

definisana u intervalu (0,20 godina). Zadatak se sastoji u tome da se zadata kriva aproksimira odsečcima više pravih linija $y(t, m_i, b_i) = m_i + b_i t$ od kojih svaki odsečak važi u intervalu (t_i, t_{i+1}). Koeficijente m_i, b_i i t_i, $i = 0, 1, 2, \ldots, N-1$, treba odrediti tako da se postigne minimum mere odstupanja tj.

$$R_5 = \sum_{i=0}^{4} \int_{t_i}^{t_{i+1}} |pe^{qt} - m_i - b_i t|^2\, dt \tag{10}$$

gde je $t_o = 0$, $t_N = 20$.

Rešavanje zadatka

Sam postupak nalaženja najbolje aproksimacije vremenske serije odsečcima više pravih linija ima dve faze:

U prvoj fazi sračunavaju se funkcije Δ u (4) ili (7), tj. vrši se aproksimacija krive u(t), ili originalnih podataka predstavljenih u obliku niza uređenih parova brojeva, odsečcima po jedne prave linije $y(t, m_i, b_i)$ u svakom od posmatranih intervala (t_i, t_{i+1}), $i = 0,1,\ldots, N-1$.

U drugoj fazi se, primenom rekurentnih relacija dinamičkog programiranja (5) ili (8), nalazi optimalno rešenje, odnosno najbolja aproksimacija originalnih podataka odsečcima više pravih linija.

Aproksimacija delova krive u(t) odsečcima po jedne prave linije

Za svaki od mogućih intervala (t_i, t_{i+1}) nađena je prava, tj. koeficijenti m i b, koja najbolje aproksimira krivu u(t) u smislu minimuma sume kvadrata odstupanja

$$I_i = \Delta(t_i, t_{i+1}) = \min_{(m,b)} \int_{t_i}^{t_{i+1}} |pe^{qt} - m - bt|^2\, dt \tag{11}$$

gde je $0 \leq t_i < t_{i+1} \leq t_N$ za svako $i = 0, 1, 2, 3, 4$; $t_o = 0$ a $t_N = 20$.

U slučaju da je kretanje društvenog proizvoda elektroindustrije Jugoslavije predstavljeno serijom originalnih podataka datih u obliku niza parova brojeva, I_i predstavlja sumu kvadrata odstupanja pravih od originalnih podataka tj.

$$I_i = \Delta(K_i, K_{i+1}) = \min_{(m,b)} \sum_{K_i}^{K_{i+1}} |u(t^k) - m - bt^k|^2 \qquad 0 \leq K_i < K_{i+1} \leq K = 5 \tag{12}$$

gode je $u(t^k)$ vrednost društvenog proizvoda u godini t^k.

Intervali (t_i, t_{i+1}), u kojima se traži minimalna vrednost sume kvadrata odstupanja, mogu da obuhvataju jedan, dva, do maksimalno pet jediničnih intervala.

Postupak nalaženja vrednosti parametara pravih (m, b) kojima se u posmatranim intervalima vrši aproksimacija podataka je prikazan na slici 2.

Ulazne veličine za ovu fazu računskog procesa su sledeće:

(a) Vrednosti koeficijenata eksponencijalne krive (p i q), sračunate na uobičajeni način, pa stoga postupak njihovog računanja ne treba posebno tumačiti[4]:

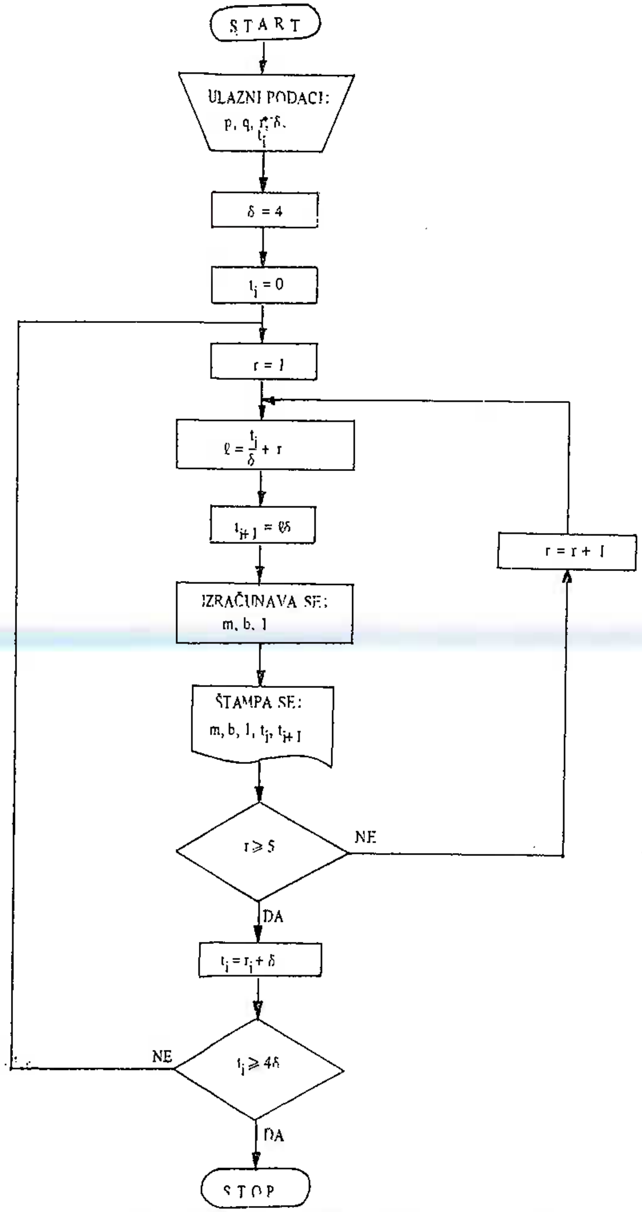
(b) Jedinična dužina vremenskog intervala (σ). Izbor ovog koraka je stvar iskustva i poznavanja procesa posmatrane pojave, i od njegove dužine zavisi tačnost i obim potrebnih računanja;

(c) Parametar (r) koji označava broj jediničnih vremenskih intervala u kojima se vrši aproksimacija krive u(t) jednom pravom ($r = 1, 2, \ldots, 5$).

U slučaju kada se posmatrana pojava predstavlja serijom originalnih podadaka datih u obliku niza parova brojeva, umesto parametara p i q ulaz je zadat tabelarno (niz uređenih parova brojeva).

Izlazne veličine ove faze računanja su:

(a) Koeficijenti (m, b) pravih kojima se, u posmatranom intervalu, vrši aproksimacija krive u(t). Ovi koeficijenti se sračunavaju na standardni način[4];



Slika 2. Dijagram toka operacija za odredjivanje pravih linija kojima se vrši aproksimacija eksperimentalne krive u(t) u posmatranim intervalima

(b) $\Delta(t_i, t_{i+1})$ — Minimalne vrednosti sume kvadrata odstupanja eksponencijalne krive u (t) od prave kojom se, u posmatranom intervalu, vrši aproksimacija.

Sračunate vrednosti parametara m i b kao korespondentne vrednosti $\Delta(t_i, t_{i+1})$ za sve intervale (t_i, t_{i+1}) su date u tabelama 1 i 2.

Druga faza računskog procesa: Nalaženje najbolje aproksimacije eksponencijalne krive u (t) odsečcima više pravih linija

U skladu sa postupkom rešavanja iznetim u ovom radu u rekurentnim relacijama (5) koriste se sračunate vrednosti $\Delta(t_i, t_{i+1})$:

$$f_N(a) = \min_{0 \leq t_{N-1} \leq a} \left| f_{N-1}(t_{N-1}) + \Delta(t_{N-1}, a) \right| \quad 2 \leq N \leq 4 \tag{13}$$

Dijagram toka operacija za nalaženje najbolje aproksimacije neke krive odsečcima više pravih linija dat je na slikama 3a i 3b.

Ulazne veličine za ovu fazu računskog procesa su sledeće:

(a) Parametri m, b i korespondentne veličine $\Delta(t_i, t_{i+1})$ čije su vrednosti dobijene u prvoj fazi rešavanja zadatka;

(b) Korak (ili priraštaj) koji iznosi četiri kalendarske godine;

(c) Gornja granica intervala a u kome se traži najbolja aproksimacija krive u (t), ili originalnih podataka, odsečcima više pravih linija.

Izlazne veličine ove faze računanja su:

(a) Vrednosti funkcija f_N (a);

(b) Donje granice intervala u kojima se nalaze prave koje najbolje aproksimiraju krivu u (t) — vrednosti t_{N-1} (opt);

(c) Gornje granice istih intervala — vrednosti a.

Treba napomenuti da je, u prvom koraku, kada se kriva u (t) predstavlja jednom pravom, rešenje zadatka trivijalno i svodi se na nalaženje vrednosti f_1 (a) = (0, a), pri čemu a može uzimati vrednosti 4, 8, 12, 16 i 20.

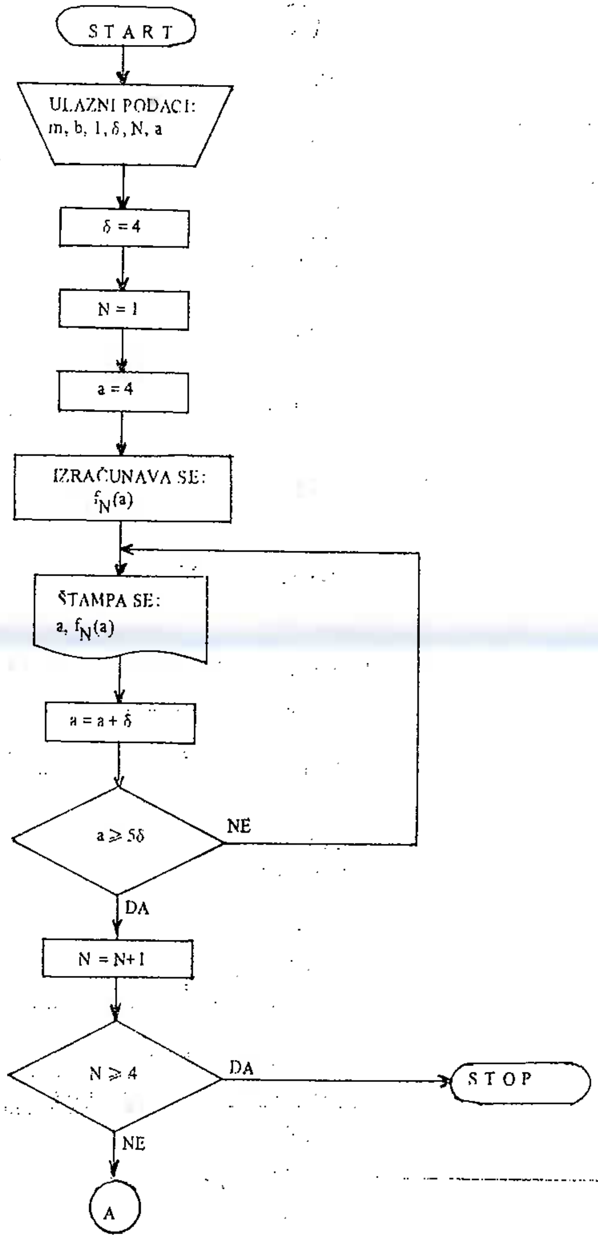
Sračunate vrednosti f_N (a) odnosno f_N (K) su date u tabelama 3 i 4. Najbolje aproksimacije odsečcima više pravih linija se iz ovih tabela mogu lako »pročitati«.

Tabela 1. Vrednosti parametara m, b i $\Delta(K_i, K_{i+1})$ za slučaj kada su polazni podaci serija originalnih podataka u obliku niza parova brojeva

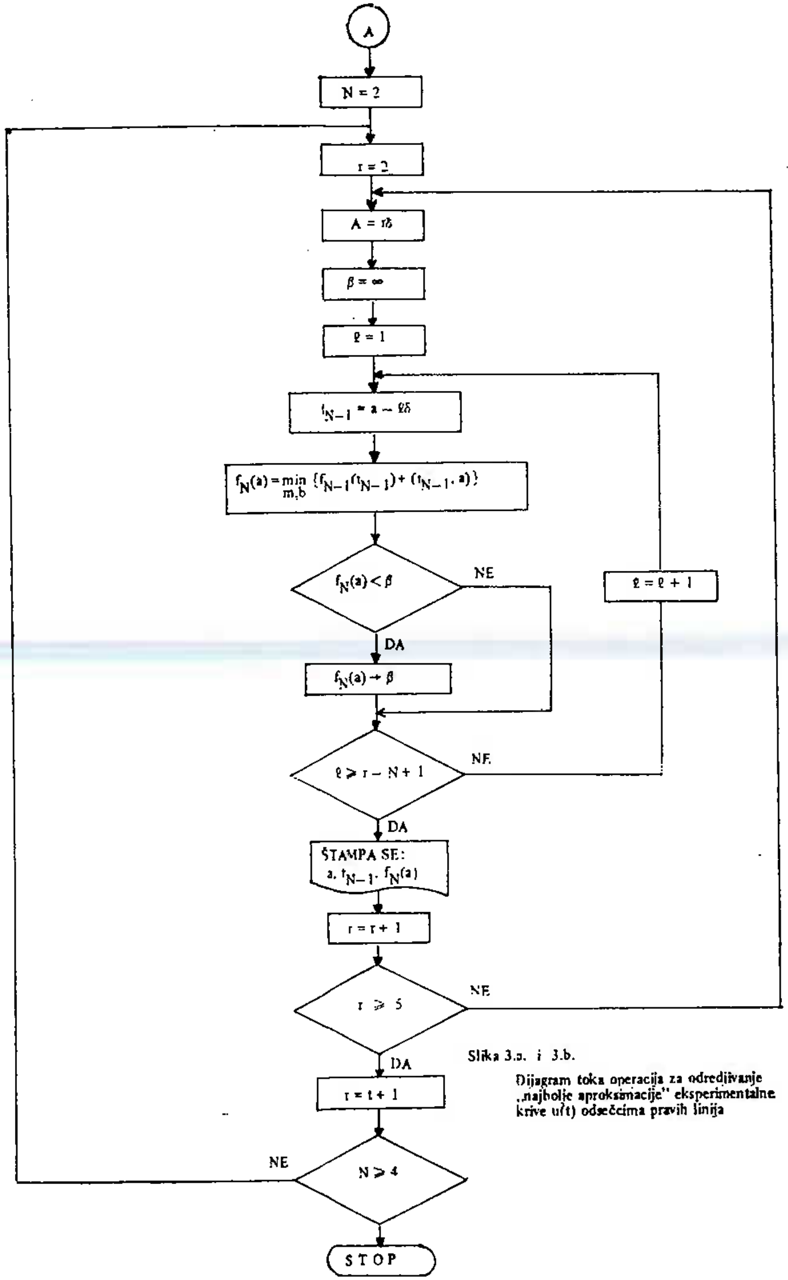
Gornja granica intervala (t_{i+1})	Parametar	Donja granica intervala (t_i) 0	4	8	12	16
4	m	84,50				
	b	118,53	—	—	—	—
	Δ	1201,52				
8	m	88,71	182,31			
	b	118,54	104,82	—	—	—
	Δ	7405	2502			
12	m	—16,20	—207,20	—295,9		
	b	146,59	167,35	177,3	—	—
	Δ	67540	38943	14021		
16	m	—87,62	—290,41	—450,73	—2141,82	
	b	159,35	176,44	188,99	303,41	—
	Δ	203343	131899	48148	8427	
20	m	—220,47	—462,17	—772,35	—1500,75	—1200,92
	b	179,89	198,55	216,43	258,58	241,92
	Δ	569094	315054	200691	81968	58045

Tabela 2. Vrednosti parametara m, b i $\Delta(t_i, t_{i+1})$ za slučaj kada su polazni podaci zadati krivom eksponencijalnog tipa

Gornja granica intervala (t_{i+1})	Parametar	Donja granica intervala (t_i) 0	4	8	12	16
4	m	299,1				
	b	55,4	—	—	—	—
	Δ	17,3				
8	m	261,98	163,16			
	b	73,69	90,17	—	—	—
	Δ	3836,29	806,44			
12	m	172,57	—57,25	—433,66		
	b	100,14	126,55	164,02	—	—
	Δ	64963,02	16267,12	3057,99		
16	m	—4,99	—391,19	—970,627	—1666,53	
	b	137,89	171,84	217,47	267,06	—
	Δ	487119,20	181256,61	35481,76	14335,61	
20	m	—334,02	—954,72	—1835,95	—3107,95	—5039,67
	b	192,32	239,56	293,83	370,10	477,44
	Δ	2843051,53	1435915,66	567484,50	143518,34	148,25



Slika 3.a.



Slika 3.a. i 3.b.

Dijagram toka operacija za određivanje „najbolje aproksimacije" eksperimentalne krive u(t) odsečcima pravih linija

Tabela 3. Vrednosti funkcija $f_N(a)$ u slučaju kada su polazni podaci kriva eksponencijalnog tipa

$f_N(a)$ t_i opt.	Gornja granica intervala (a)				
	4	8	12	16	20
$f_1(a)$	17,304	3836	64963	487119	2.843051
t_1 opt.	—	4	8	8	12
$f_2(a)$	—	824	6894	31318	208481
t_2 opt.	—	—	8	12	16
$f_3(a)$	—	—	3882	21229	39466
t_3 opt.	—	—	—	12	16
$f_4(a)$	—	—	—	18215	21378

Tabela 4. Vrednosti funkcija $f_N(K)$ u slučaju kada su polazni podaci vremenska serija u obliku niza parova brojeva

$f_N(K)$ t_i opt.	Gornja granica intervala (a)				
	4	8	12	16	20
$f_1(K)$	1201	4795	67540	203343	569094
t_1 opt.	—	4	8	8	12
$f_2(K)$	—	3703	18816	52943	149508
t_2 opt.	—	—	8	12	16
$f_3(K)$	—	—	17724	27243	110988
t_3 opt.	—	—	—	12	16
$f_4(K)$	—	—	—	26153	85288

5. ZAKLJUČNA RAZMATRANJA I TUMAČENJE REZULTATA

Zadatak određivanja najbolje aproksimacije vremenske serije odsečcima više pravih je rešavan na dva načina. U ovom delu će se dati tumačenje dobijenih rezultata i izvršiti poređenje istih.

Rešavanje zadatka nalaženja najbolje aproksimacije vremenske serije odsečcima više pravih linija, u slučaju kada su polazni podaci dati u obliku niza parova brojeva, je dalo mnogo bolje rezultate. Ovakav postupak rešavanja zadatka je jednostavniji jer ne zahteva početnu aproksimaciju originalnih podataka nekom krivom, pa se samim tim smanjuje i obim potrebnih pripremnih operacija.

U slučaju kada su polazni podaci predstavljeni analitičkom krivom u (t), nađeno rešenje ne predstavlja ustvari najbolju aproksimaciju vremenske serije već je to najbolja aproksimacija krive u (t) koja je već i sama jedna približna interpretacija originalnih podataka.

Stoga je razumljivo da su najbolje aproksimacije originalnih podataka odsečcima više pravih u slučaju kada su polazni podaci predstavljeni serijom podataka u obliku niza parova brojeva bolje od onih do kojih se dolazi polazeći od analitičke krive u (t). To se najbolje vidi ako se posmatra optimalna vrednost mere odstupanja (minimum sume kvadrata odstupanja) u zavisnosti od broja pravih kojima se vrši aproksimacija. U tabeli 5. date su minimalne vrednosti sume kvadrata odstupanja najboljih pravih od originalnih podataka za slučaj kada su polazni podaci dati u obliku niza parova brojeva (I slučaj) i analitičkom krivom u (t) (II slučaj).

Tabela 5. Minimalne vrednosti sume kvadrata odstupanja odsečaka pravih linija od originalnih podataka

Broj pravih kojima se vrši najbolja aproksimacija	Minimum sume kvadrata odstupanja	
	I slučaj	II slučaj
1	569.064	717.714
2	149.508	1.851.222
3	110.998	1.809.261
4	85.288	1.761.159

Iz tabele 5. se vidi da minimum sume kvadrata odstupanja odsečaka pravih, koje predstavljaju najbolju aproksimaciju kretanja društvenog proizvoda elektroindustrije Jugoslavije u posmatranom dvadesetogodišnjem periodu, od originalnih podataka veći u drugom nego u prvom slučaju. U slučaju da se kretanje društvenog proizvoda predstavljeno krivom u (t) aproksimira sa četiri »najbolja« odsečka pravih, minimalna vrednost mere aproksimacije je čak dvadeset puta veća nego u slučaju kada su polazni podaci dati nizom parova brojeva.

*

Grafički prikazi rezultata dobijenih rešavanjem napred opisanog zadatka dati su u prilozima.

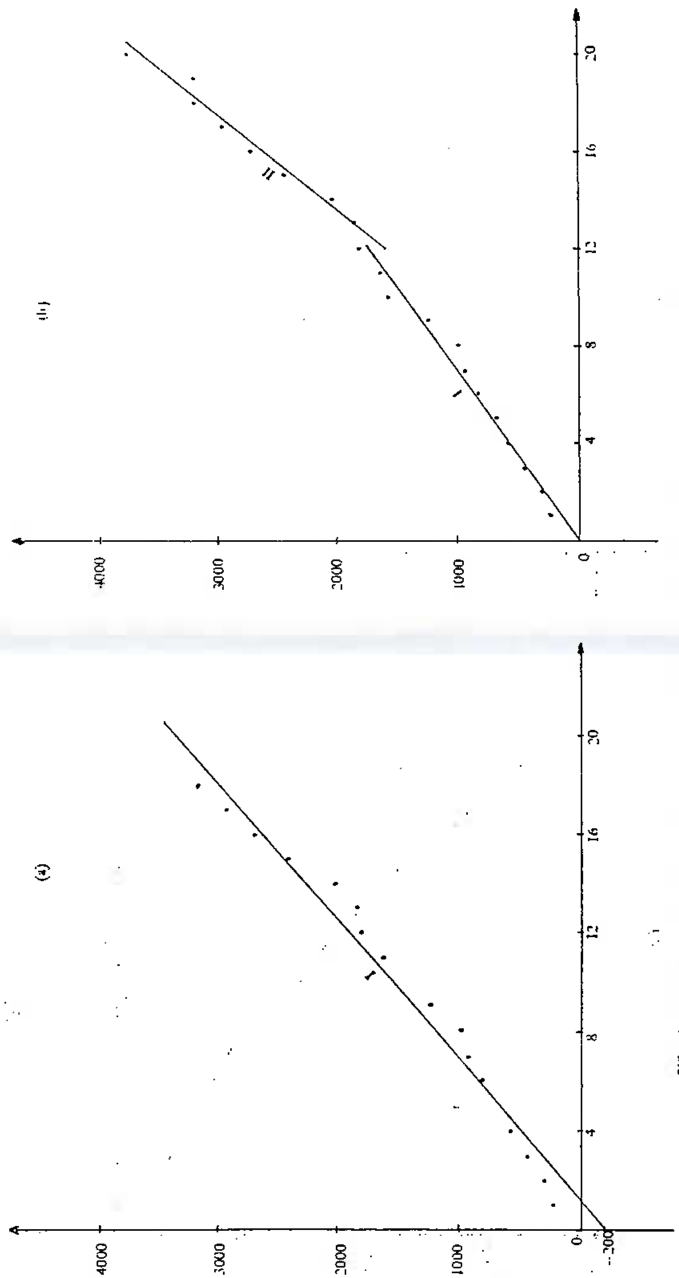
Prilog I sadrži prikaze rezultata zadatka rešenog na prvi način: polazni podaci su predstavljeni serijom parova brojeva.

Prilog II sadrži grafičke prikaze rezultata zadatka rešenog na drugi način, kada se pri nalaženju najbolje aproksimacije vremenskih serija odsečcima više pravih linija polazi od krive u (t).

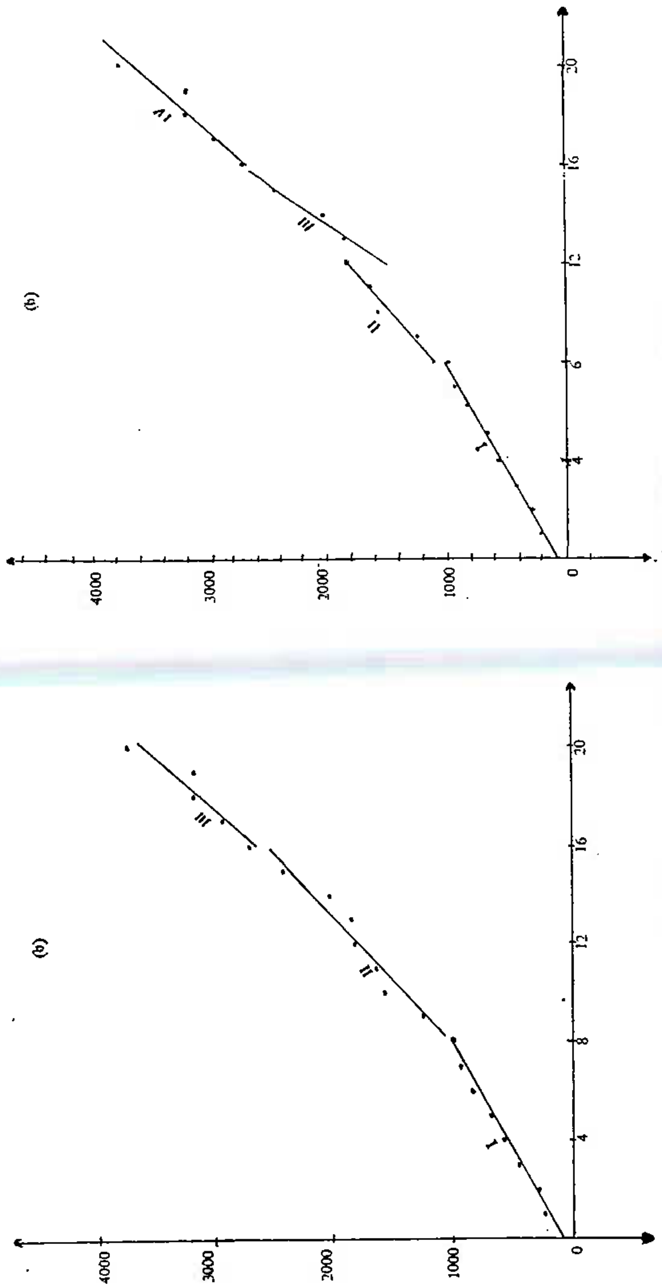
PRILOG I

GRAFIČKI PRIKAZI REZULTATA ZADATKA REŠENOG NA PRVI NAČIN

— Polazni podaci su predstavljeni serijom uređenih parova brojeva —



Slika 1. Najbolja aproksimacija kretanja društvenog proizvoda elektroindustrije Jugoslavije jednom pravom (a) i dvema pravama (b).

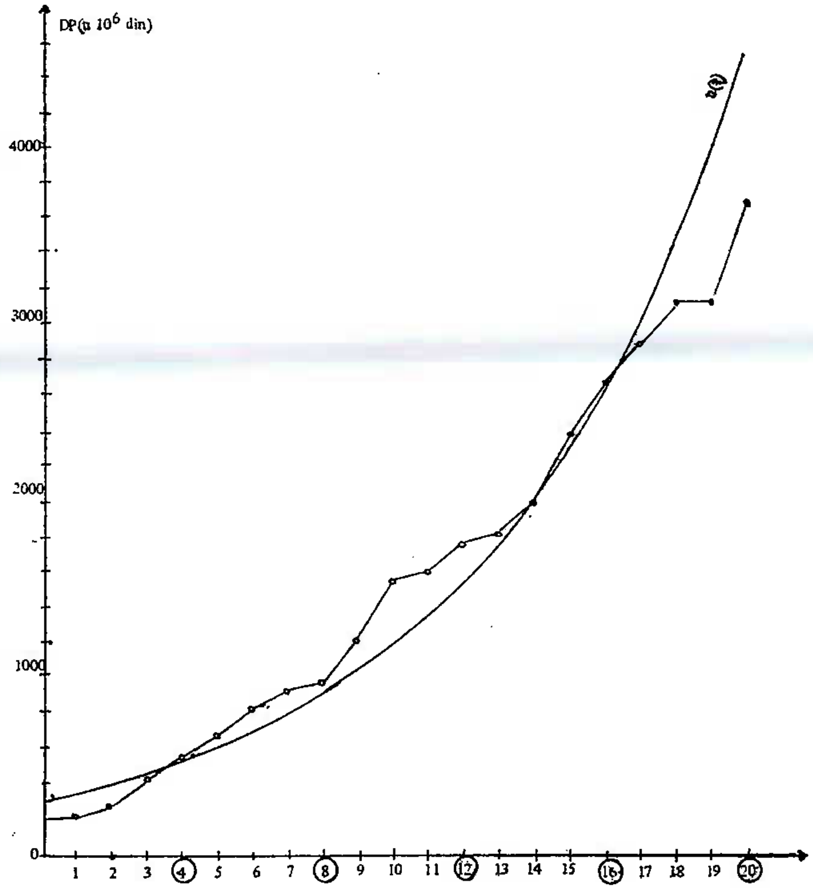


Slika 2. Najbolja aproksimacija kretanja društvenog proizvoda elektroindustrije Jugoslavije trima pravama (a) i sa četiri prave (b)

PRILOG II

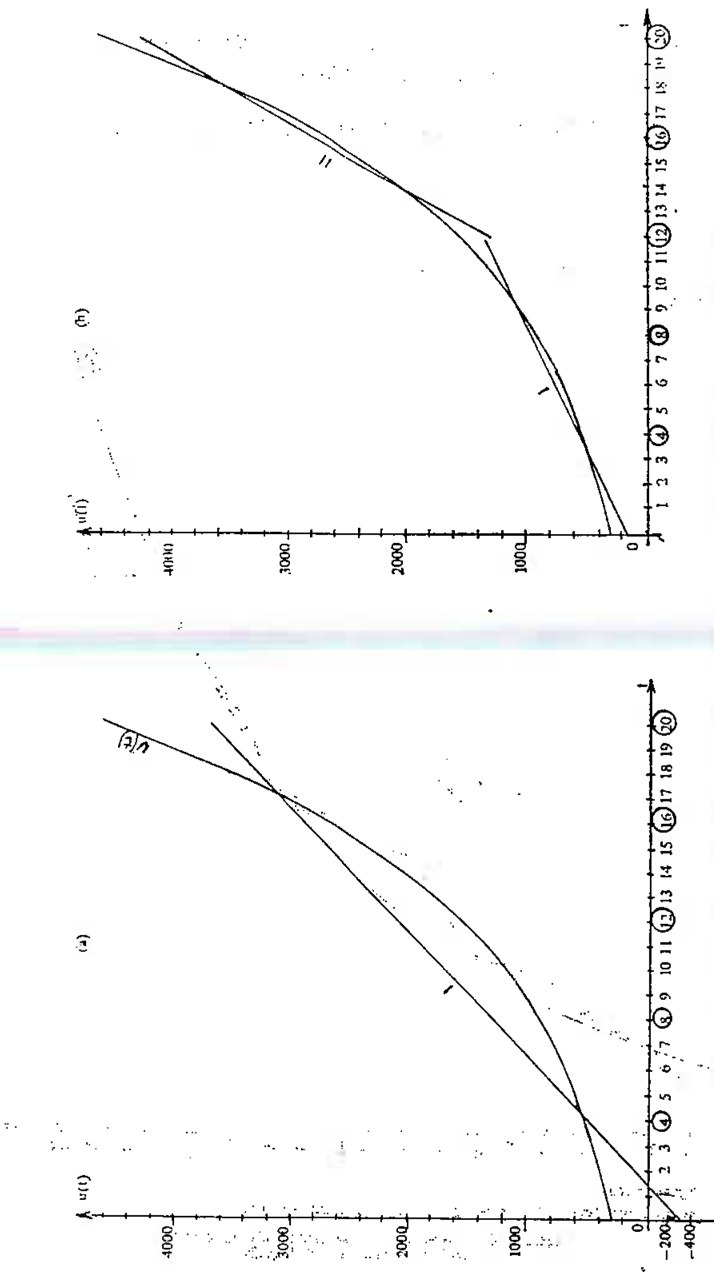
GRAFIČKI PRIKAZI REZULTATA ZADATKA REŠENOG NA DRUGI NAČIN

— Polazni podatak je analitička kriva eksponencijalnog tipa —

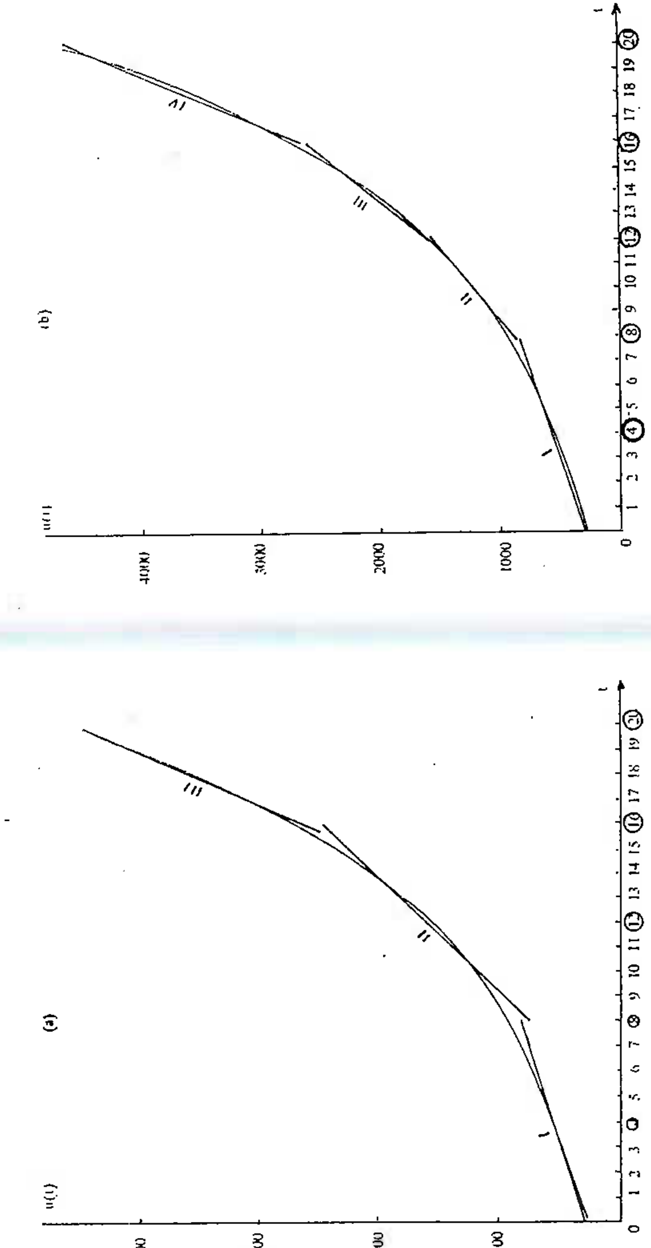


Originalni podaci
Eksperimentalna kriva u(t) dobijena aproksimacijom originalnih podataka

Slika 1. Kriva kretanja društvenog proizvoda elektroindustrije Jugoslavije u periodu 1955–1974. godine



Slika 2. Najbolja aproksimacija eksponencijalne krive kretanja društvenog proizvoda elektroindustrije Jugoslavije jednom pravom (a) i dvema pravama (b)



Slika 3. Najbolja aproksimacija eksponencijalne krive kretanja društvenog proizvoda elektroindustrije Jugoslavije trima pravam (a) i sa četiri prave (b)

LITERATURA

R. Bellman: DYNAMIC PROGRAMMING, SYSTEM IDENTIFICATION AND SUBOPTIMIZATION, J. Siam Control, Vol. 4, No. 1, 1966, USA.

R. Petrović: SPECIJALNE METODE U OPTIMIZACIJI SISTEMA, Glava I, Izdanje NIP »Tehnička knjiga«, Beograd, 1977.

R. Bellman, S. E. Dreyfus: APPLIED DYNAMIC PROGRAMMING, Princeton University Press, New Jersey, 1962.

B. Ivanović: TEORIJSKA STATISTIKA, Jugoslovenski institut za ekonomska istraživanja, Beograd, 1966.

STATISTIČKI GODIŠNJACI JUGOSLAVIJE, 1956—1976.

APPLICATION OF DP IN THE BEST POLYGONAL APPROXIMATION OF TIME-SERIES DATA

by

Radivoj PETROVIĆ and Sonja STOJANOVIĆ

Summary

The problem of the linearized approximation of time series, encountered frequently in the behavioral analysis of economic phenomena, is formulated and solved in this paper. The time series are approximated by polygonal lines. The mean square criterion is accepted as the approximation quality measure. The optimization method applied is the dynamic programming. The method is applicable to the case when the original data are of non-analytic form, e. g. tables, and also when the original data have already been approximated by a non-linear analytic function. The procedure of finding the Yugoslav electrical power industry growth is described in detail as an example.

NATURALNI PRISTUP K PROBLEMU AGREGACIJE

*Viljem RUPNIK**

Problematika agregacije je v ekonomiji še vedno zanimiv in pereč problem, ki se ga v praksi lotevamo tako, da uvajamo različne vrednostne kategorije (n. pr. cene), ki omogočajo agregiranje različnih količin v njihovih vrdnostnih ekvivalentov. Težave, ki pri tem nastajajo, v splošnem povzročajo popačenost rezultatov, ki ji ne moremo vselej ugotoviti smeri, še manj pa intenzitete. V predloženem razmišljanju pa se skušamo izogniti uporabi vrednostnih ekvivalentov raznorodnih količin in ugotoviti, v kolikšni meri lahko agregacijo izvedemo direktno, t. j. v naturalni obliki.

V ta namen vzemimo proizvodno funkcijo v precej poenostavljeni (1) obliki, namreč

$$q_i = f_i\,[x_{(i)}, y_{(i)}, z_{(i)}] \tag{1}$$

kjer je $x_{(i)}$ vektor, katerega komponente pomenijo količine naturalnih inputov v proizvod P_i s količino q_i, $y_{(i)}$ vektor, ki prikazuje potroške strojnega dela, in $z_{(i)}$ vektor, ki prikazuje količine vloženega živega dela. Proizvodna funkcija (1) je lahko podloga za različne kvantitativne študije, kot npr. za analizo produktivnosti (1). Če zapišemo (1) za i in j ≠ i, potem je temeljno vprašanje, kako definirati $q_i + q_j$. Do problema agregacije pride bodisi takrat, ko gre za fizično zelo različne proizvode, bodisi takrat, ko skušamo posamezne vrste proizvodov agregirati med panogami ali pa regijami. Dâ se uvideti, da je problem zanimiv pravzaprav le s praktičnega vidika. V tej smeri je praksa tista, ki ne dovoljuje poljubne agregacije, t. j. agregacije kakršniholi proizvodov. Najprej preidimo na zasnovo ideje o agregaciji naturalno izraženih proizvodov, nato pa bomo posebej razpravljali o izboru komponent, ki kot skupna vsebina omogočajo agregacijo in končno še obravnavo takšnih proizvodov, ki so si med seboj fizično popolnoma tuji.

Produkcijska funkcija (1) prikazuje količino proizvodnje q_i v odvisnosti od različnih faktorjev, od katerih so nekateri takšni, da fizično vstopajo v proizvod in tvorijo njegovo materialno substanco. V tej smeri bo treba za primer, ko gre za storitve, razširiti predloženo koncepcijo tudi na takšne primere, ko ne gre za povsem materialno proizvodnjo. Vzemimo dva proizvoda, npr. P_1 in P_2, ki ju predstavimo kot vektor njunih materialnih kompo-

* Ekonomska fakulteta »Boris Kidrič«, Ljubljana.