LITERATURA

R. Bellman: DYNAMIC PROGRAMMING, SYSTEM IDENTIFICATION AND SUBOPTIMIZATION, J. Siam Control, Vol. 4, No. 1, 1966, USA.

R. Petrović: SPECIJALNE METODE U OPTIMIZACIJI SISTEMA, Glava I, Izdanje NIP »Tehnička knjiga«, Beograd, 1977.

R. Bellman, S. E. Dreyfus: APPLIED DYNAMIC PROGRAMMING, Princeton University Press, New Jersey, 1962.

B. Ivanović: TEORIJSKA STATISTIKA, Jugoslovenski institut za ekonomska istraživanja, Beograd, 1966.

STATISTIČKI GODIŠNJACI JUGOSLAVIJE, 1956—1976.

APPLICATION OF DP IN THE BEST POLYGONAL APPROXIMATION OF TIME-SERIES DATA

by

Radivoj PETROVIĆ and Sonja STOJANOVIĆ

Summary

The problem of the linearized approximation of time series, encountered frequently in the behavioral analysis of economic phenomena, is formulated and solved in this paper. The time series are approximated by polygonal lines. The mean square criterion is accepted as the approximation quality measure. The optimization method applied is the dynamic programming. The method is applicable to the case when the original data are of non-analytic form, e. g. tables, and also when the original data have already been approximated by a non-linear analytic function. The procedure of finding the Yugoslav electrical power industry growth is described in detail as an example.

NATURALNI PRISTUP K PROBLEMU AGREGACIJE

*Viljem RUPNIK**

Problematika agregacije je v ekonomiji še vedno zanimiv in pereč problem, ki se ga v praksi lotevamo tako, da uvajamo različne vrednostne kategorije (n. pr. cene), ki omogočajo agregiranje različnih količin v njihovih vrdnostnih ekvivalentov. Težave, ki pri tem nastajajo, v splošnem povzročajo popačenost rezultatov, ki ji ne moremo vselej ugotoviti smeri, še manj pa intenzitete. V predloženem razmišljanju pa se skušamo izogniti uporabi vrednostnih ekvivalentov raznorodnih količin in ugotoviti, v kolikšni meri lahko agregacijo izvedemo direktno, t. j. v naturalni obliki.

V ta namen vzemimo proizvodno funkcijo v precej poenostavljeni (1) obliki, namreč

$$q_i = f_i\,[x_{(i)}, y_{(i)}, z_{(i)}] \tag{1}$$

kjer je $x_{(i)}$ vektor, katerega komponente pomenijo količine naturalnih inputov v proizvod P_i s količino q_i, $y_{(i)}$ vektor, ki prikazuje potroške strojnega dela, in $z_{(i)}$ vektor, ki prikazuje količine vloženega živega dela. Proizvodna funkcija (1) je lahko podloga za različne kvantitativne študije, kot npr. za analizo produktivnosti (1). Če zapišemo (1) za i in j ≠ i, potem je temeljno vprašanje, kako definirati $q_i + q_j$. Do problema agregacije pride bodisi takrat, ko gre za fizično zelo različne proizvode, bodisi takrat, ko skušamo posamezne vrste proizvodov agregirati med panogami ali pa regijami. Dâ se uvideti, da je problem zanimiv pravzaprav le s praktičnega vidika. V tej smeri je praksa tista, ki ne dovoljuje poljubne agregacije, t. j. agregacije kakršnihkoli proizvodov. Najprej preidimo na zasnovo ideje o agregaciji naturalno izraženih proizvodov, nato pa bomo posebej razpravljali o izboru komponent, ki kot skupna vsebina omogočajo agregacijo in končno še obravnavo takšnih proizvodov, ki so si med seboj fizično popolnoma tuji.

Produkcijska funkcija (1) prikazuje količino proizvodnje q_i v odvisnosti od različnih faktorjev, od katerih so nekateri takšni, da fizično vstopajo v proizvod in tvorijo njegovo materialno substanco. V tej smeri bo treba za primer, ko gre za storitve, razširiti predloženo koncepcijo tudi na takšne primere, ko ne gre za povsem materialno proizvodnjo. Vzemimo dva proizvoda, npr. P_1 in P_2, ki ju predstavimo kot vektor njunih materialnih kompo-

* Ekonomska fakulteta »Boris Kidrič«, Ljubljana.

nent. Da hitreje pridemo do predstavitve temeljne ideje, dopustimo, da pomenita P_1 in P_2 ne samo vrsto proizvoda, temveč hkrati tudi količino tega proizvoda v obeh primerih, torej

$$P_1 = (x_{11}, \ldots x_{1n}), \qquad P_2 = (x_{21}, \ldots x_{2n}) \tag{2}$$

Posamične komponente naj pomenijo količine proizvodnih faktorjev materialne narave, ki sestavljajo oba vektorja. Predpostavimo zaenkrat, da je na zgornji način vsak od obeh proizvodov v ustreznih količinah natančno prikazan z n komponentami in predpostavimo tudi, da sta oba proizvoda takšna, da sestojita iz istovrstnih komponent. Ustrezna vektorja (2) sta torej homologna in je možno tvoriti njuno vsoto. K paru vektorjev (2) lahko dobimo ustrezna skalarja

$$q_1 = |P_1|\,, \qquad q_2 = |P_2| \tag{3}$$

kjer z znakom absolutne vrednosti obeh vektorjev simbolično prikazujemo velikost q_1 vektorja P_1 oz. vektorja P_2 s skalarjem q_2. Pustimo ob strani vprašanje, kako je definirana operacija (3) v vsakem posamičnem primeru. Če gre za materialno proizvodnjo, potem je vselej mogoče na primeren način izraziti količino rezultatov takšne proizvodnje.

Pri definiranih proizvodih so potroški materialnih inputov, torej komponente na desni strani v (2), količine, ki nastopajo v medsebojnih konstantnih razmerjih. Vsako od teh komponent bi lahko izrazili kot večkratnik izdelavnega normativa pripadajoče vrste. Pa ohranimo izhodišče (2) in obravnavajmo namesto fizične strukture enote proizvoda za oba primera, kar fizično strukturo celotne količine proizvoda v obeh primerih. Obračunske projekcije posameznih vrst stroškov, s tem pa tudi potroškov, oscilirajo okrog planskih projekcij za homologne komponente obeh vektorjev (2). Kolikor ni možno dobivati obračunskih vrednosti proporcionalitetnih faktorjev za posamične pare komponent na desni strani v (2), se lahko zadovoljimo s planskimi faktorji, ki morajo obstajati iz tehnoloških vzrokov in tudi zakonskih predpisov. Tako lahko zapišemo

$$\begin{aligned} x_{11} &= \lambda_{11}\, x_{1n}, \ldots \quad x_{1,n-1} = \lambda_{1,n-1}\, x_{1n} \\ x_{21} &= \lambda_{21}\, x_{2n}, \ldots \quad x_{2,n-1} = \lambda_{2,n-1}\, x_{2n} \end{aligned} \tag{4}$$

Pri tem smo izbrali zadnjo komponento kot sredstvo, s katerim izražamo vse prejšnje komponente pri obeh vektorjih (2). Naj bo sedaj razmerje med količinama potrošenega inputa n-te vrste za prvi vektor v (2) v naslednjem razmerju z analogno komponento vektorja

$$x_{1n} : x_{2n} = e_{12} \tag{5}$$

Ker je vsaka od komponent vektorjev (2) materialna komponenta proizvodov obeh vrst, je tedaj možno oba skalarja (3) izraziti proporcionalno k velikosti n-te komponente materialnega inputa, torej

$$q_1 = \nu_1\, x_{1n} \qquad q_2 = \nu_2\, x_{2n} \tag{6}$$

kjer sta skalarja ν_1 in ν_2 normativa za n-to vrsto materialnega inputa v obeh proizvodih. Naloga je, najti vsoto

$$q_1 + q_2 = \nu_1\, x_{1n} + \nu_2\, x_{2n} \tag{7}$$

ki omogoča izraziti vsoto količin obeh proizvodov v odvisnosti od npr. količine n-te vrste materialnega inputa, ki ga potrošimo za prvi proizvod. To vsoto je možno izraziti tudi v odvisnosti od količine n-te vrste materialnega inputa, ki ga potroši drugi proizvod; vendar pa v obeh primerih to izražanje ni ugodno, saj želimo pri agregaciji različnih proizvodov vendarle operirati z enim od teh proizvodov, ne pa s količino našega inputa, ki je vsebovan v vsakem od proizvodov iz dane agregacijske skupine. Zato upoštevajmo (5) za izračun x_{2n}, torej

$$x_{2n} = \frac{1}{e_{12}}\, x_{1n} \tag{5'}$$

ter nato še prvo relacijo iz (6), iz katere izračunamo x_{1n}, torej

$$x_{1n} = \frac{q_1}{\nu_1} \tag{6'}$$

Tako dobimo (7) v naslednji obliki

$$q_1 + q_2 = q_1 + \nu_2 \cdot \frac{1}{e_{12}} \cdot \frac{q_1}{\nu_1} = \left(1 + \frac{\nu_2}{e_{12}} \cdot \frac{1}{\nu_1}\right) q_1 \tag{7'}$$

Na ta način tedaj lahko seštejemo količine dveh poljubnih proizvodov, ki zadoščata edini predpostavki, da se izražata s homolognima vektorjema (2). Ta pristop omogoča izražanje celokupne mase obeh proizvodov z mersko enoto, ki se nanaša le na proizvod P_1. Razumljivo je, da je možno izraziti to maso tudi z mersko enoto, ki se nanaša samo na drugi proizvod. Ta rezultat lahko posplošimo na poljubno končno mnogo proizvodov, ki so naturalno izraženi ob predpostavki homolognosti ustrezne naturalne strukture. Težava, ki jo srečamo pri praktični realizaciji takšnega načina agregacije, pa nastane takrat, ko pri dveh vektorjih tipa (2) ne moremo najti niti enega para komponent z enakim pomenom. Vse dotlej, dokler med komponentami obeh vektorjev (2) najdemo vsaj eno skupno komponento glede na fizikalni oz. naturalni značaj, lahko uporabimo postopek izražen s (7'), ne glede na to, ali se pri obeh proizvodih števili komponent naturalnega inputa ujemata ali ne. V splošnem bomo imeli tedaj opraviti s parom

$$\begin{aligned} P_1 &= (\overset{(1)}{x}_{11}, \ldots \overset{(1)}{x}_{1m_1}) \\ P_2 &= (\overset{(2)}{x}_{21}, \ldots \overset{(2)}{x}_{2m_2}) \end{aligned} \tag{8}$$

Prva komponenta vektorja P_1 tedaj pomeni količino nekega potroška materialnega inputa, ki pa ni treba, da je iste vrste kot materialni input, katerega potrošek nastopa kot prva komponenta vektorja P_2. Naj bosta X_1 in X_2 množici materialnih inputov

$$X_1 = (\overset{(1)}{X}_{11}, \dots \overset{(1)}{X}_{1n1})$$

$$X_2 = (\overset{(2)}{X}_{21}, \dots \overset{(2)}{X}_{2n2}) \tag{9}$$

ki tedaj označujeta le kvantitativni sestav obeh proizvodov. Postopek (7') za naturalno orientacijo je možen, če presek teh dveh množic ni

$$X_1 \cap X_2 \neq 0 \tag{10}$$

V takšnem primeru izberemo katerokoli komponento, ki spada v presek obeh množic (10), in jo uporabimo kot vrsto materialnega inputa, kateremu preko ustreznega normativa proporcioniramo količine obeh proizvodov v smislu (6); tako namreč količini x_{1n} in x_{2n}, ki nastopata v (6), izberemo kot količini materialnega inputa, ki spada v neprazen presek (10). *Na ta način nas torej ne motijo različne dimenzije vektorjev (8), kakor tudi ne različnost v pomenu posamičnih materialnih komponent,* pri pogoju, da presek množic (9) ni prazen.

Vzemimo sedaj primer, da gre za agregacijo dveh proizvodov tipa (8), pri pogoju, da je presek (10) prazen. To pomeni, da gre za agregacijo — v nadaljnjem bomo rekli nehomogenih — proizvodov, ki so si med seboj fizično popolnoma tuji. Privzemimo zaenkrat, da v takem primeru ne iščemo nobene razširjave vektorjev (8) v tem smislu, da bi s privzemom kakih novih komponent (ki seveda niso materialne narave), prišli do primera, ki smo ga rešili zgoraj. Če tedaj vztrajamo pri izključno materialnem izražanju vektorjev (8), ki sta med seboj nehomologna, potem moramo predpisati kakšno standardno grupacijo teh posamičnih komponent materialnega inputa tako, da postaneta oba vektorja (8) homologna. Takšna standardna grupacija je pri industrijskih kalkulacijah že zdavnaj v navadi, saj obstoja struktura produkcijske cene kot baza, ki je enotno predpisana ne glede na proizvodni proces. Tako npr. se materialni inputi lahko znajdejo v grupaciji osnovnih materialov izdelave ali pa v grupaciji pomožnih materialov izdelave. Naj bo predpisana kakšna standardna grupacija inputov. Le-ta je torej predpisana za oba vektorja (8) in tedaj najdemo vsaj eno komponento na desni strani vsakega od vektorjev (8), ki spada v vsak razred podpisane grupacije. Če spada več komponent vsakega od vektorjev (8) v isti razred, potem je dovolj, da vzamemo samo eno od teh komponent kot element takšnega razreda; pri tem moramo paziti, da izberemo tisto komponento, ki vstopa v isti razred kot na analogen način izbrana komponenta vsakega drugega vektorja. Na ta način tedaj oblikujemo nove vektorje (8), ki imajo manjše število komponent, število namreč, ki je enako številu razredov predpisane standardne grupacije. S preslikavo prvotnih komponent vektorjev (8) v vektorje, ki pripadajo takšni standardni grupaciji, pa se zapiše heterogenost v naturalnem značaju posamičnih komponent vektorjev (8), kar pomeni, da so posamične komponente, ki spadajo v tako dobljene vektorje, spet homologne komponente in sicer homologne relativno glede na definicijo razredov predlagane standardne grupacije. Za oba proizvoda imamo tedaj ustrezna vektorja, kjer npr. prva komponenta pomeni količino osnovnega izdelavnega materiala za prvi proizvod in prva komponenta vektorja za drugi proizvod prav tako pomeni količino osnovnega izdelavnega materiala (čeprav naturalno drugačno, kot v prvem primeru). S tem pa smo primer nehomolognih proizvodov reducirali v primer homolognih, ki smo ga že zgoraj rešili.

Zgornji primer kaže na možnost izhoda iz problematike naturalne agregacije proizvodov v primeru, da vztrajamo pri prikazovanju proizvoda v njegovi naturalni oz. materialni strukturi. Velja opozoriti, da je takšna osnova lahko sporna v primeru, kadar poskušamo agregirati proizvoda iz dveh popolnoma različnih proizvodnih panog. Dokler namreč izvajamo naturalno agregacijo nehomolognih vektorjev tipa (8) s tem, da transformiramo ta dva vektorja v homologna vektorja na bazi korespondence, ki je definirana s sicer poljubno izbrano standardno grupacijo, znotraj dane panoge ali pa blagovne grupe, je pomen izdelavnih materialov mnogo bolje definiran in po naravi homogen. Tako npr. na področju poljedelstva precej dobro vemo, za kakšne osnovne izdelavne materiale v kmetijski proizvodnji gre. Če je predpisana proizvodna panoga ali pa blagovna grupacija preširoka tako, da nas interpretacija razredov predpisane grupacije ne vodi k nazornim predstavam posamičnih komponent homologiziranih vektorjev, se lahko zatečemo k manjšim skupinam proizvodov oz. k cepljenju proizvodne panoge na bolj homogene skupine proizvodnih procesov. Tako bi npr. lahko v poljedelstvu posebej obravnavali proizvodnjo žitaric za razliko od drugih vrst proizvodnje v poljedelstvu. S postopnim drobljenjem posamičnih proizvodnih panog na vse manjše in manjše dele bi prišlo do takšne stopnje drobitve, ki bi omogočala zadovoljivo interpretacijo komponent homologiziranih vektorjev in s tem tudi zadovoljivo agregacijo v smislu (7'). Vendar pa je pri takšnem drobljenju treba upoštevati praktične možnosti pa tudi potrebe v konkretni ekonomski analizi. Stopnjo takšne dekompozicije že sprejetih proizvodnih panog bi bilo treba skrbno proučiti, preden bi se odločili za takšno členitev.

Vendar pa omenjeni razlog ni edini, ki ogroža predlog homologiziranja vektorjev tipa (8) na bazi materialnih inputov. Predpostavimo samo, da želimo primerjati produktivnost v dveh regijah. Četudi predpišemo dovolj majhne obsege obeh regij, se znajdemo pred dejstvom, da v vsaki od teh regij nastopa po nekaj proizvodnih panog, ki so si lahko med seboj zelo tuje oz. nesorodne. Vzemimo npr. gorate predele, kjer uspevata turizem in gozdarstvo; ali pa manj razvite obmorske predele s turizmom in ribolovom. Pričakovati moramo v splošnem tudi takšne zelo divergentne primere nehomolognih vektorjev, kjer bi nas kljub dovolj podrobni razcepitvi »uhojenih« proizvodnih panog agregacija v smislu (7') homologiziranih vektorjev motila pri analizi kazalcev produktivnosti in to zaradi nezadovoljive homogeniziranosti posamičnih komponent homologiziranih vektorjev. Tako lahko po vsej verjetnosti pričakujemo tudi primere, ko ne bomo mogli vzdržati pri naturalnem opisu proizvoda in ko bo tedaj šlo za *razširitev množic (9) za določene komponente.*

Razširjava nehomolognih vektorjev za nove komponente je v načelu možna v mnogih smereh. Lahko bi to razširjavo izvedli tako, da bi navajali potroške strojnih ur, ki so prav tako naturalne komponente v strukturi cene proizvoda. To dodajanje lahko spremenimo celo v zamenjavo in bi tedaj namesto komponent materialnih inputov obravnavali le komponente, ki pomenijo potroške strojnih ur, in torej ponovili razmišljanje kot pri (7'), bodisi da so tako dobljeni vektorji že homologni ali pa ne. Vendar pa je podobno kot pri materialnih komponentah proizvoda v splošnem pričakovati veliko heterogenost pri strojnem parku, čeprav morda ne v takšni meri. Delovna sredstva le oblikujemo na določenem končnem sistemu fizikalnih, kmetijskih in drugih zakonov in se pri tem menjajo struktura materialov izdelave in njihove lastnosti. Tako bi tedaj divergenca v ustreznih vektorjih (8) na bazi komponent strojnega dela oz. širše udeležbe proizvajalnih sredstev bila po vsej verjetnosti manjša, kot pa v primeru, da vektorja (8) definiramo na prostoru (9), t. j. na prostoru materialnih inputov. Če pa razmišljamo v tej smeri še nadalje, lahko pričakujemo v nekaterih primerih še dodatno zmanjšanje takšne divergence, če vektorja (8) zamenjamo z vektorjema, katerih komponente so potroški delovne sile. Razlog, ki nas ohrabljuje pri poskusu naturalne agregacije proizvodov za primer, ko je proizvodnja prikazana v strukturi vloženega dela posamičnih vrst, leži po eni strani v tem, da je delo tvorec vrednosti in uporabne vrednosti, po drugi strani pa eksistenca vrste delovne sile, ki jo označujemo kot nekvalificirano delovno silo in je v večini proizvodnih procesov prisotna na kak določen način. Privzemimo za hip, da imamo možnost za oba proizvoda (8) konstruirati takšna dva vektorja, ki sta sicer lahko nehomologna, vendar pa ustrezni presek, ki je analogen k (10), za množici, analogni k (9), ni prazen. V tem primeru tedaj eksistira ista vrsta delovne sile, ki je udeležena pri proizvodnji obeh proizvodov. Če tak primer nastopi, smo s tem problem agregacije v naturalni obliki rešili. Metoda agregacije je tedaj spet izražena s (7'), kjer je treba izbrati le predpisano skupno vrsto delovne sile, ki je udeležena pri proizvodnji obeh proizvodov.

Predpostavka o eksistenci nekvalificirane delovne sile kot skupnem proizvodnem faktorju za dva proizvoda je precej realna. Vendar pa si oglejmo še teoretične možnosti za primer, ko bi bila takšna dva vektorja, ki sta analogna k (8) ter definirana samo na komponentah vloženega dela posamičnih vrst, nehomologna ter bi zanju veljal hkrati tudi ustrezni presek, prazen v smislu (10). To bi tedaj pomenilo, da primerjamo dva proizvoda, pri katerih proizvodnji so sodelovale različne kvalifikacije delovne sile in med njimi ni nobene delovne sile skupne vrste, ki bi sodelovala pri obeh proizvodih hkrati. V tem primeru naturalna agregacija v smislu (7') ni možna. Do takšnih primerov lahko pride, kot smo že omenili, pri poskusih agregacije znotraj določenih specialnih regij ali kakih drugih, sicer za analizo zanimivih proizvodnih asociacij. V tem primeru sta možna dva rezultata:

1) da agregacija sploh ni možna in je tedaj treba za takšno asociacijo obdržati oba proizvoda kot predmet analize oz. (v splošnem primeru) obdržati končno mnogo reprezentantov za posamične proizvodne skupine, za katere smo uspeli izvesti agregacijo bodisi na temelju čiste homolognosti ustreznih vektorjev (2) bodisi na temelju nehomolognih vektorjev (8) z nepraznim presekom (10) pri opisovanju naturalne strukture ustreznih proizvodov s potroški delovne sile. V takšnih primerih bi npr. morali primerjati kazalce produktivnosti za dve regiji, ne glede na to, kako jih definiramo naturalno, tako, da bi primerjali kazalce produktivnosti za istovrstne proizvode ail pa za istovrstno grupacijo proizvodov med obema regijama. Agregacija za celotno regijo oz. kako drugo asocijacijo tedaj ne bi uspela v enem številu, t. j. skalarju, temveč bi se izražala s končno množico takšnih skalarjev.

2) druga možnost pa je v tem, da oba proizvoda znotraj dane regije ali asociacije, ki se razlikujeta v strukturi materialnih inputov in se prav

tako razlikujeta v strukturi vloženega dela po določeni klasifikaciji delovne sile (in ki se morda razlikujeta tudi po vrstah strojnega dela), razširimo za kake komponente med obema proizvodoma. V tem primeru problem agregacije lahko izvedemo na posplošenem tipu vektorja (8), ki zajema celotni spekter naturalnih komponent, z lastnostjo, da so proporcionalne količine proizvodnje analogne, kot smo to ugotovili pri metodi naturalne agregacije (7').

LITERATURA:

V. Rupnik, »O nekaterih problemih kvantifikacije faktorjev produktivnosti«, *Ekonomska analiza*, letnik 11, št. 3—4, 1977, Beograd.

A PHYSICAL APPROACH TO THE AGGREGATION PROBLEM

by

Viljem RUPNIK

Summary

There are many problems in the value aggregation procedure because we are aware of summing up different items from the physical viewpoint. To withdraw such an embarrassment, we usually turn to the concept of price, which acts as a "common denominator." Apart from these problems, we hope to give some direct suggestions on how to aggregate the quantities of physically different products, regardless of its nature as expressed through the corresponding vector of specific dimension. It has been shown in this paper that, on the basis of the classification of the components of vectors given, we can always carry out any kind of aggregation without shrinking a set of elements which should be aggregated.