ECONOMIC ANALYSIS AND WORKERS' MANAGEMENT, 1, XV (1981), 67—81

OPTIMIZACIJA EKONOMSKIH SISTEMA PO KRITERIJUMU MAKSIMALNA PRODUKTIVNOST, EKONOMIČNOST I RENTABILNOST MODELIMA VIŠEKRITERIJUMSKOG PROGRAMIRANJA

*Stojadin SAZDANOVIĆ**

UVOD

Poslovni uspeh ekonomskih sistema meri se nizom pokazatelja. Među njima značajno mesto zauzimaju produktivnost, ekonomičnost, rentabilnost i troškovi po jedinici proizvoda. Osnovna karakteristika svih tih pokazatelja jeste da se oni određuju posle ostvarene proizvodnje i međusobno se razlikuju samo po uglu posmatranja.

Operaciona istraživanja su unela bitno novi pristup tretiranju pokazatelja poslovanja. U njima se ne određuju ocene posle ostvarene proizvodnje, već proizvodnja planira tako da se postignu maksimalne ocene. Za mnoge sisteme, pa i ekonomske, to je veliki napredak u rukovođenju i upravljanju.

Ukupna proizvodnja, dohodak, dobit, korišćenje kapaciteta, troškovi i drugi pokazatelji mogu da se izraze linearnim funkcijama u zavisnosti od obima proizvodnje pojedinih proizvoda. Na osnovu takvih funkcija može se postaviti zahtev da se odredi proizvodnja da se postigne maksimalni dohodak ili dobit, minimalni troškovi ili neki drugi cilj. Određivanje kombinacije proizvoda da se taj cilj postigne može se učiniti modelima linearnog programiranja. Međutim, pokazatelji poslovanja kao što su: produktivnost, ekonomičnost, rentabilnost i dr. predstavljaju odnos između vrednosti ukupne proizvodnje i uloženog živog rada, troškova ili angažovanih sredstava. Njihova zavisnost od obima proizvodnje nije linearna. Potreba da se i takvi ciljevi koriste u optimalizaciji dovela je do novih klasa programiranja. Jedna od njih je razlomljeno-linearno programiranje.

Novi problem u korišćenju metodologije linearnog ili nekog drugog programiranja jeste: šta izabrati kao cilj. Svaki od ciljeva daje jedan aspekat poslovanja, pa je njegov izbor uslovljen zahtevom rasvetljavanja tog aspekta.

* Docent Ekonomskog fakulteta u Kragujevcu.

Problem izbora cilja može se rešiti formiranjem modela sa više kriterijuma. U njih se može uvrstiti model razlomljeno-linearnog programiranja. Prosečne troškove možemo shvatiti kao količnik ukupnih troškova i ukupne proizvodnje, dakle, to je količnik dva cilja, minimalnih troškova i maksimalne proizvodnje. Slično je sa produktivnošću, ekonomičnošću, odnosno rentabilnošću. Time se sa jednokriterijumskih modela prelazi na dvokriterijumske. To je adekvatniji pristup optimizaciji. Međutim, i to ne obezbeđuje zahtev da se problem optimizacije razmatra sa više aspekata. Tako, ono što je optimalno po kriterijumu prosečnih troškova ne mora biti po kriterijumu produktivnosti, ekonomičnosti, rentabilnosti ili nekom drugom kriterijumu.

Problem više kriterijuma u izboru optimalnog asortimana rešava se uspešno modelima višekriterijumskog programiranja. Time se problem izbora kriterijuma otklanja. Uticaj više kriterijuma na optimalno rešenje dovodi do kompromisnog rešenja. Međutim, pojavljuju se teškoće metodološke prirode. Formiranje višekriterijumskih modela ne iziskuje posebne postupke različite od drugih programiranja, ali iznalaženje odgovarajućeg rešenja je složeno i čini osnovnu smetnju u širem korišćenju takvih modela.

Poznat je veliki broj postupaka za rešavanje višekriterijumskih modela. Najpoznatiji su: sekvencionalna analiza, svođenje više kriterijuma na jedan postupkom parametrizacije, ciljno programiranje, interaktno programiranje i dr. Neki od tih postupaka zahtevaju poznavanje međusobnog odnosa pojedinih ciljeva. To se postiže njihovim rangiranjem po nekom značaju.

U ovom radu želimo da ukažemo na mogućnost primene višekriterijumskog programiranja na izbor proizvodnog programa po kriterijumima maksimalna produktivnost, ekonomičnost i rentabilnost. To su tri ključna parametra ekonomskih sistema. Oni predstavljaju trougao triju najznačajnijih aspekata; uloženi živi rad, troškove i angažovana srdstva. Odrediti kompromisno rešenje tih kriterijuma znači zadovoljiti opšteprlznate kriterijume racionalnog poslovanja.

1. DEFINICIJA VIŠEKRITERIJUMSKOG MODELA ZA OPTIMALIZACIJU EKONOMSKIH SISTEMA PO KRITERIJUMIMA PRODUKTIVNOSTI, EKONOMIČNOSTI I RENTABILNOSTI

Produktivnost, ekonomičnost i rentabilnost mogu da se izraze kao količnik linearnih funkcija asortimana proizvodnje. Svakom od njih odgovara model razlomljeno-linearnog programiranja

$$
(1) \qquad max\,(P) = \frac{px}{tx}, \quad max\,(E) = \frac{px}{qx}, \quad max\,(R) = \frac{px}{sx},
$$
$$
Ax \leqslant b \qquad Ax \leqslant b \qquad Ax \leqslant b
$$
$$
x \geqslant 0 \qquad x \geqslant 0 \qquad x \geqslant 0
$$

gde su $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ količine pojedinih proizvoda nekog asortimana, $p = (p_1, p_2 \ldots, p_n)$ cene tih proizvoda, $t = (t_1, t_2, \ldots, t_n)$ vreme

potrebno da se proizvode jedinica proizvoda, $q = (q_1, q_2 \ldots, q_n)$ troškovi po jedinici proizvoda, $s = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$ angažovana sredstva po jedinici proizvoda, A i b matrica i vektor uslova poslovanja.

Modeli (1), svaki za sebe, mogu dati neku optimalnu kombinaciju proizvoda da se postigne maksimalna produktivnost, ekonomičnost ili rentabilnost. Te kombinacije mogu biti jednake. Međutim, postoji velika mogućnost da su različite. Šta će se izabrati kao rešenje zavisi od značaja ciljeva. To je arbitražno i ne mora da dâ najracionalnije rešenje. Radi toga definišimo jedinstven model

$$
(2) \qquad max\,(P, E, R) = max \left\{ \frac{px}{tx}, \frac{px}{qx}, \frac{px}{sx} \right\}.
$$
$$
Ax \leqslant b
$$
$$
x \geqslant 0
$$

U modelu (2) funkcija kriterijuma je vektorska sa koordinatama koje predstavljaju produktivnost, ekonomičnost i rntabilnost. On predstavlja model matematičkog programiranja koji je još poznat kao model višekriterijumskog programiranja. Izučavanje i primena takvih modela su poslednjih godina uzeli velikog maha. Razlog tome treba tražiti u velikom broju kriterijuma po kojima se može optimizirati neki proces. Izbor jednog od njih sužava izbor najracionalnijeg rešenja.

Problematika višekriterijumskog programiranja je široka i kreće se od definicije optimalnog rešenja, u terminologiji višekriterijumskog programiranja efikasno, odnosno kompromisno, preko postupaka za njegovo određivanje do mogućnosti primene. Pod optimalnim rešenjem u jednokriterijumskim modelima smo podrazumevali moguće rešenje koje daje najveću (najmanju) vrednost funkcije cilja. Prvi problem za višekriterijumske modele jeste definicija optimalnog rešenja. Ona mora da obuhvati sve funkcije cilja. Tako, pod efikasnim rešenjem višekriterijumskog modela podrazumeva se moguće rešenje x^0 takvo, da ne postoji drugo moguće rešenje x za koje bi vrednost bilo kog parcijalnog cilja bila veća od vrednosti tog cilja za rešenje x^0, a ostalih neumanjenja.

Iz same definicije efikasnog rešenja vidi se: da ono može biti različito od optimalnog rešenja po parcijalnim kriterijumima, da ih može biti više i da ih nije jednostavno odrediti. Kriterijum za njihov izbor je vrlo složen. Ta činjenica je dovela do velikog broja postupaka za iznalaženje efikasnih rešenja. Ovde ćemo navesti postupak prevođenja višekriterijumske u jednokriterijumske modele formiranjem parametarske funkcije i izbor kompromisnog rešenja preko rešenja jednokriterijumskih modela.

2. PREVOĐENJE VIŠEKRITERIJUMSKOG U JEDNOKRITERIJUMSKI MODEL PARAMETARSKIM POSTUPKOM

Vratimo se modelu (2). Izrazi kojima su definisani produktivnost, ekonomičnost i rentabilnost imaju zajednički brojilac. To navodi na ideju da se umesto vektorske funkcije {P, E, R} odredi vektorska funkoija recipročnih vrednosti produktivnosti, ekonomičnosti i rentabilnosti, dakle $\left\{\frac{1}{P}, \frac{1}{E}, \frac{1}{R}\right\}$. Ekonomski smisao koordinata ove funkcije je sličan koordinatama funkcije $\{P, E, R\}$. Poznato je da produktivnost P predstavlja vrednost proizvodnje na jedinicu uloženog rada. Recipročna vrednost 1/P predstavlja uloženi rad na jedinicu vrednosti ukupne proizvodnje. Dakle, to je neka produktivnost. Slično je i za ostale koordinate vektorske funkcije $\left\{\frac{1}{P}, \frac{1}{E}, \frac{1}{R}\right\}$. Tako se, umesto funkcije kriterijuma date u modelu (2), može formirati model sa funkcijom kriterijuma recipročnih vrednosti

$$\text{(3)} \qquad min\left\{\frac{1}{P}, \frac{1}{E}, \frac{1}{R}\right\} = min\left\{\frac{tx}{px}, \frac{qx}{px}, \frac{sx}{px}\right\}.$$
$$Ax \leqslant b$$
$$x \geqslant 0.$$

Primenimo postupak parametara na model (3). Neka su $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, tri parametra takva da je $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$ i $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geqslant 0$. Tada se model (3) može zameniti jednokriterijumskim

$$\text{(4)} \qquad min\left\{\frac{1}{P}, \frac{1}{E}, \frac{1}{R}\right\} = min\left\{\lambda_1\frac{tx}{px} + \lambda_2\frac{qx}{px} + \lambda_3\frac{sx}{px}\right\}$$
$$Ax \leqslant b$$
$$x \geqslant 0.$$
$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geqslant 0.$$

Funkcija kriterijuma modela (4) je zbir razlomaka istog imenioca, pa se može napisati u obliku

$$\frac{\lambda_1 tx + \lambda_2 qx + \lambda_3 sx}{px}.$$

Time se model (4) prvodi na model razlomljeno-linearnog programiranja sa parametrima λ_1, λ_2 i λ_3. Koristeći se relacijom $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$ može se broj parametra smanjiti na dva, $\lambda_3 = 1 - \lambda_1 - \lambda_2$. Posle svih tih transformacija model (4) dobija oblik

$$\text{(5)} \qquad min\left\{\frac{1}{P}, \frac{1}{E}, \frac{1}{R}\right\} = \frac{\lambda_1 (t-s)x + \lambda_2 (q-s)x + sx}{px}$$
$$Ax \leqslant b$$
$$x \geqslant 0$$
$$\lambda_1 + \lambda_2 \leqslant 1, \lambda_1, \lambda_2 \geqslant 0.$$

Ako se izvuče x, on postaje

$$\text{(6)} \qquad min\left\{\frac{1}{P}, \frac{1}{E}, \frac{1}{R}\right\} = \frac{[\lambda_1 (t-s) + \lambda_2 (q-s) + s]\, x}{px}$$
$$Ax \leqslant b$$
$$x \geqslant 0$$
$$\lambda_1 + \lambda_2 \leqslant 1, \lambda_1, \lambda_2 \geqslant 0,$$

što predstavlja dvoparametarski model razlomljeno-linearnog programiranja.

Za različite vrednosti parametara λ_1 i λ_2 model (6) može dobiti isto ili različita optimalna rešenja. Njegovo optimalno rešenje je ekstremna tačka skupa koji je određen uslovima $Ax \leqslant b$, $x \geqslant 0$. Na osnovu stavova višekriterijumskog programiranja tako dobijene optimalne tačke su efikasna rešenja višekriterijumskog modela (3). Iz tog razloga ćemo odrediti optimalna rešenja modela (6) sa odgovarajućim skupom vrednosti parametara λ_1 i λ_2, tj. izvršićemo razbijanje skupa mogućih vrednosti parametara λ_1 i λ_2 na podskupove, takve da su za vrednosti λ_1 i λ_2 iz njih optimalno jedno i samo jedno rešenje modela (6).

2.1. *Razbijanje skupa mogućih vrednosti parametara λ_1 i λ_2 na podskupove kojima odgovara jedna optimalna struktura*

Označimo sa

$$\text{(7)} \qquad c = \lambda_1 (t-s) + \lambda_2 (q-s) + s$$

n—dimenzionalni vektor u funkciji parametara λ_1 i λ_2. Tada model (6) postaje

$$\text{(8)} \qquad min\,(Z) = \frac{cx}{px} = \frac{Z_1}{Z_2}$$
$$Ax \leqslant b$$
$$x \geqslant 0$$

i predstavlja model razlomljeno-linearnog programiranja sa varijabilnim koeficijentima u funkciji kriterijuma.

Postoji niz postupaka za rešavanje razlomljeno-linearnih modela. Mi ćemo koristiti Martosov simpleks postupak kao najpodesniji za razbijanje skupa mogućih vrednosti parametara λ_1 i λ_2.

Vrednosti parametara λ_1 i λ_2 su određene relacijama $\lambda_1 + \lambda_2 \leqslant 1$, $\lambda_1, \lambda_2 \geqslant 0$ i čine skup u prvom kvadrantu dvodimenzionalnog prostora (λ_1, λ_2), omeđen pravima $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, $\lambda_1 = 0$ i $\lambda_2 = 0$. Razbijanje tog skupa na podskupove se izvodi poznatim postupcima parametarskog programiranja.

Neka je $(\lambda_1^o, \lambda_2^o)$ par vrednosti parametara λ_1 i λ_2, takvih da je $\lambda_1^o + \lambda_2^o \leqslant 1$, $\lambda_1^o, \lambda_2^o \geqslant 0$. Tačka $(\lambda^o_1, \lambda^o_2)$ pripada skupu mogućih vrednosti parametara λ_1 i λ_2. Ako se one uvrste u model (7) onda se dobije model sa fiksnim koeficijentima u funkciji kriterijuma. Rešavajući ga, može se doći do optimalnog rešenja x^{o1}, kome odgovara optmalna baza B_1. Uslovi optimalnosti tog rešenja bili bi

$$(9)\quad R_j = \begin{vmatrix} c_j - Z_1^j\, Z_1 \\ p_j - Z_2^j\, Z_2 \end{vmatrix} \geqslant 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n + m,$$

gde su c_j i p_j koeficijenti uz x_j u funkciji kriterijuma, Z_1 i Z_2 vrednosti brojilaca $Z_1 = cx$; odnosno imenilaca $Z_2 = px$ funkcije kriterijuma za optimalno rešenje x^{o1}, Z_1^j i Z_2^j vrednosti brojilaca $Z_1 = cx$, odnosno imenilaca $Z_2 = px$, funkcije kriterijuma za vektor $x^j = B_1^{-1} A_j$ komponenta vektora izvan optimalne baze po vektorima te baze.

U okolini tačke $(\lambda^{o1}, \lambda^o_2)$ dvodimenzionalnog prostora (λ_1, λ_2) mogu da postoje i druge koje ispunjavaju uslov optimalnosti rešenja x^{o1}. Tako se dobijaju uslovi

$$(10)\quad R_j(\lambda_1, \lambda_2) = \begin{vmatrix} c_j(\lambda_1, \lambda_2) - Z^j_1(\lambda_1, \lambda_2)\, Z_1(\lambda_1, \lambda_2) \\ p_j - Z^j_2 \qquad Z_2 \end{vmatrix} \geqslant 0,$$

$j = 1, 2, \ldots, n + m$

u funkciji parametara λ_1 i λ_2. Zahvaljujući činjenici, da su samo koeficijenti funkcije kriterijuma u brojocu promenljivi, tj. zavise od λ_1 i λ_2 i da su funkcije $c_j(\lambda_1, \lambda_2)$, $Z_1(\lambda_1, \lambda_2)$ i $Z^j_1(\lambda_1, \lambda_2)$ linearne, to će uslovi (10) biti takođe linearni.

Tako se dobija

(11) $R_j(\lambda_1, \lambda_2) = R^1_j \lambda_1 + R^2_j \lambda_2 + R^o_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, \ldots, \quad n + m,$ gde su R^o_j, R^1_j, R^2_j fiksne vrednosti.

Relacije (11) u skupu vrednosti parametara λ_1 i λ_2, $\lambda_1 + \lambda_2 \leqslant 1$, $\lambda_1, \lambda_2 \geqslant 0$, određuju podskup tačaka (λ_1, λ_2) takvih da je optimalno rešenje x^{o1}. Ono predstavlja efikasno rešenje višekriterijumskog modela (3) sa komponentama funkcije kriterijuma produktivnost, ekonomičnost i rentabilnost.

Parametri λ_1, λ_2 i $\lambda_3 = 1 - \lambda_1 - \lambda_2$ predstavljaju relativan odnos kriterijuma. Znajući optimalno (efikasno) rešenje x^{o1} i odgovarajuće vrednosti parametara λ_1, λ_2 i λ_3 možemo odrediti participaciju pojedinih ciljeva pri takvom rešenju. Cilj kome odgovara najveća vrednost od parametra λ_1, λ_2 i λ_3 je najvećeg značaja za to rešenje.

Skupom vrednosti parametara λ_1 i λ_2 koje odgovaraju rešenju x^{o1} ne mora biti isonpljen skup svih mogućih vrednosti parametara λ_1 i λ_2. Drugo optimalno rešenje se dobija promenama u prethodnoj optmalnoj bazi. Vektor A_j koji je izvan optimalne baze ulazi u nju ako je njegova

ocena $R_j = 0$. Na osnovu toga vidi se da tačkama koje čine rub podskupa mogućih vrednosti parametara λ_1 i λ_2 odgovaraju dve optimalne baze. Izaberimo jednu od njih i izračunajmo ocene optimalnosti R_j. Vektor A_s koji je izvan baze i čija je ocena $R_s = 0$, može da uđe u novu bazu.

Kriterijum napuštanja baze je simpleks kriterijum linearnog programiranja

$$\frac{x_k}{x_{ks}} = min \left\{ \frac{x_i}{x_{is}} \right\}, \quad x_{ks} > 0.$$

Tako se dobija nova baza B_2. Njoj odgovara optimalno bazno rešenje

$$x^{o2} = B_2^{-1}\, b$$

i vektor koordinata vektora izvan baze A_j po toj bazi

$$x^j = B_2^{-1} A_j.$$

Dobijenim rešenjem x^{o2} i x_j mogu se formirati odgovarajuće relacije (11). One određuju podskup vrednosti parametara λ_1 i λ_2 za koje je x^{o2} optimalno. To je novo efikasno rešenje sa najvećim značajem nekog od ciljeva optimalnosti.

Postupak razbijanja skupa mogućih vrednosti parametara λ_1 i λ_2 se nastavlja sve dotle dok se ne iscrpi skup $\lambda_1 + \lambda_2 \leqslant 1$, $\lambda_1, \lambda_2 \geqslant 0$. Time se dolazi do niza optimalnih rešenja modela (8) x^{o1}, x^{o2}, $\ldots$, x^{or}. Ona su ekstremne tačke skupa mogućih rešenja višekriterijumskog modela (3) i predstavljaju njegova efikasna rešenja. Pored tako dobijenih efikasnih rešenja višekriterijumskog modela postoje i druga efikasna rešenja. Ona se određuju ekstremnim efikasnim rešenjima x^{o1}, x^{o2}, $\ldots$, x^{or} i uslovom efikasnosti. To znači da je neophodno formirati kriterijume efikasnoti za svako od dobijenih efikasnih ekstermnih rešenja i naći odgovarajući skup efikasnih rešenja.

Jedan od nedostataka postupka prevođenja višekriterijumskog modela u jednokriterijumski putem parametara je da izvesnom skupu mogućih vrednosti parametara ne odgovara ni jedno optimalno rešenje, odnosno efikasno rešenje višekriterijumskog modela. Proizvoljnim biranjem parametara mogu se izabrati tačke za koje nema rešenja. To se može više puta ponoviti tako da postupak ne dovodi do efikasnih rešenja. Primenom postupaka parametarskog programiranja taj nedostatak se vrlo jednostavno otklanja. Dekompozicijom skupa mogućih vrednosti parametara određuju se sva efikasna ekstremna rešenja višekriterijumskog modela. Na osnovu njih mogu se odrediti i ostala efikasna rešenja.

3. POSTUPAK KOMPROMISA

Pored efektivnih rešenja i njihovog određivanja kod višekriterijumskih modela mogu se primeniti i drugi postupci. Koristeći se rangom parcijalnih kriterijuma, višekriterijumski model se može zameniti sa više jednokriterijumskim modelima. Neka je dat višekriterijumski model sa parcijalnim kriterijumima $f_1, f_2, \ldots, f_k$ poznatog ranga i neka je on prema datom redosledu. Izostavljajući sve parcijalne kriterijume, izuzev prvog f_1, dobija se jednokriterijumski model. On ima optimalno rešenje i neka je $f^o_1 = \max (f_1)$. Birajući to rešenje za optimalno višekriterijumskog modela mogu se naneti velike štete ostalim parcijalnim ciljevima. Da bi smo to ublažili odredimo moguće odstupanje Δf_1 prvog parcijalnog kriterijuma. To je kompromis koga čini prvi parcijalni kriterijum. Relacijom $f_1 \geqslant f^o_1 - \Delta f_1$ određuje se skup nad kojim prvi kriterijum neće biti manji od maksimalne vrednosti umanjene za kompromis Δf_1. Nad tako određenim skupom može se odrediti optimalnost drugog parcijalnog kriterijuma f_2. Neka je ona $f^{o2} = \max (f_2)$ i Δf_2 kompromis tog kriterijuma. Tada se formira novo ograničenje $f_2 \geqslant f^{o2} - \Delta f_2$. Postupak se nastavlja do poslednjeg parcijalnog kriterijuma f_k.

U radu se nismo upuštali u teoriju višekriterijumskog programiranja. Cilj nam je da ukažemo na mogućnost optimizacije ekonomskih sistema po kriterijumima produktivnosti, ekonomičnosti i rentabilnosti. Osnovne stavove programiranja smo naveli radi njihovog korišćenja u postavljenom problemu.

Radi boljeg sagledavanja problema i mogućnosti primene modela višekriterijumskog programiranja navedimo jedan primer.

Na osnovu podataka o proizvodnji (tehničkih uslova proizvodnje, ograničenja tržišta, cena, vremena proizvodnje, jediničnih troškova i angažovanih sredstava) može se formirati višekriterijumski model koji za kriterijum ima vektorsku funkciju sa komponentama produktivnost, ekonomičnost i rentabilnost.

$$\text{(a)}\quad \max\{P, E, R\} = \max\left\{\frac{x_1 + x_2}{2x_1 + x_2}, \frac{x_1 + x_2}{2x_1 + 3x_2}, \frac{x_1 + x_2}{10x_1 + 9x_2}\right\}$$

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + x_3 \qquad &= 10 \\ x_1 + 3x_2 + \quad x_4 \quad &= 10 \\ x_1 + x_2 - \qquad x_5 &= 4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geqslant 0, \end{aligned}$$

gde su uslovi proizvodnje izraženi odgovarajućim relacijama.

U funkciji kriterijma nisu uvršćene dopunske promenljive x_3, x_4 i x_5 radi jednostavnijih izraza.

3.1. *Prevođenje višekriterijumskog u jednokriterijumski model postupkom parametara*

Na model (a) sa vektorskom funkcijom kriterijuma, čije su komponente recipročne vrednosti produktivnosti, ekonomičnosti i rentabilnosti, primenimo postupak prevođenja višekriterijumskog modela u jednokriterijumski. Radi toga pomnožimo komponente funkcije kriterijuma sa parametrima λ_1, λ_2 i λ_3 i vektorsku funkciju zamenimo zbirom tih proizvoda. Tako se dolazi do

$$\text{(b)}\quad \min\left\{\frac{1}{P}, \frac{1}{E}, \frac{1}{R}\right\} = \lambda_1 \frac{2x_1 + x_2}{x_1 + x_2} + \lambda_2 \frac{2x_1 + 3x_2}{x_1 + x_2} + \lambda_3 \frac{10x_1 + 9x_2}{x_1 + x_2}$$

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + x_3 \qquad &= 10 \\ x_1 + 3x_2 + \quad x_4 \quad &= 10 \\ x_1 + x_2 - \qquad x_5 &= 4 \end{aligned}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geqslant 0, \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1, \quad \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geqslant 0.$$

Za parametre λ_1, λ_2 i λ_3 uveli smo ograničenja da ispunjavaju uslov konveksne kombinacije komponenata vektorske funkcije. U mnogim ekonomskim sistemima taj zahtev je prihvatljiv. Kod posmatranih parametara produktivnosti, ekonomičnosti i rentabilnosti oni mogu da znače stopu učešća tih ocena pri optimalnom proizvodnom programu.

U modelu (b) može se izvršiti sabiranje u funkciji kriterijuma, pa se dobija razlomljeno-linearni model sa varijabilnim koeficijentima u funkciji kriterijuma. Pored toga, zahvaljujući relaciji $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$, može se smanjiti broj parametara, $\lambda_3 = 1 - \lambda_1 - \lambda_2$, tako je

$$\text{(c)}\quad \min\{Z\} = \frac{(-8\lambda_1 - 8\lambda_2 + 10)\, x_1 + (-8\lambda_1 - 6\lambda_2 + 9)\, x_2}{x_1 + x_2} = \frac{Z_1}{Z_2}$$

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + x_3 \qquad &= 10 \\ x_1 + 3x_2 + \quad x_4 \quad &= 10 \\ x_1 + x_2 - \qquad x_5 &= 4 \end{aligned}$$

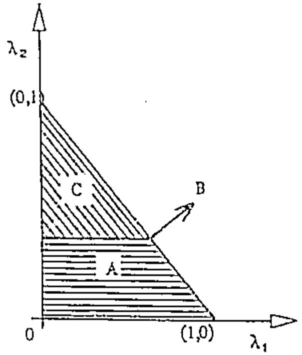
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geqslant 0, \lambda_1 + \lambda_2 \leqslant 1, \lambda_1, \lambda_2 \geqslant 0.$$

Na model (c) možemo primeniti postupke parametarskog programiranja i odrediti sve njegove ekstremne optimalne tačke. Na osnovu njih i efikasna rešenja modela (b), odnosno (a).

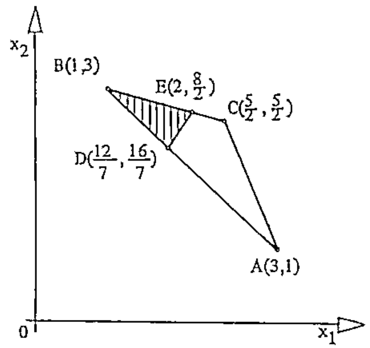
Moguće vrednosti parametara λ_1 i λ_2 date su na sl. 1 i predstavljaju skup koji je ograničen pravima $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, $\lambda_1 = 0$ i $\lambda_2 = 0$.

Skup mogućih vrednosti parametara λ_1 i λ_2 možemo razbiti na delove tako da u jednom od njih bude jedna i samo jedna ekstremna tačka optimalna. To razbijanje ćemo učiniti izborom jednog mogućeg para za parametre. Neka je $\lambda_1 = \lambda_2 = 1/4$. Model (c) za tu vrednost parametara je sa fiksnim koeficijentima u funkciji kriterijuma i može se rešiti. Njegovo rešenje je $x^{o1} = (1, 3, 4, 0, 0)$ i $Z = 45/8$, kome odgovara ekstremna tačka $A\,(1, 3)$ i optimalna baza $B^1 = B\,(A_1, A_2, A_3)$.

U okolini tačke (1/4, 1/4) mogu da postoje i druge za koje se održava optimalnost dobijenog rešenja. Odredimo Z_1, Z_2, Z_1^4, Z_2^4, Z_1^5 i Z_2^5 u funkciji parametara λ_1 i λ_2 i formirajmo ocene optimalnosti



Sl.1.



Sl.2.

$$R_4 = \begin{vmatrix} -\lambda_2 + \frac{1}{2} & -32\lambda_1 - 26\lambda_2 + 37 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -4\lambda_2 + 2 \geq 0$$

ili $\lambda_2 \leq 1/2$

$$R_5 = \begin{vmatrix} -8\lambda_1 - 9\lambda_2 + \frac{21}{2} & -32\lambda_1 - 26\lambda_2 + 37 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -10\lambda_2 + 5 \geq 0$$

ili $\lambda_2 \leq 1/2$.

Relacije $\lambda_1 + \lambda_2 \leq 1$, $\lambda_1 \geq 0$, $\lambda_2 \geq 0$ i $\lambda_2 \leq 1/2$ određuju podskup skupa mogućih vrednosti parametara λ_1 i λ_2 nad kojim je optimalno rešnje x^{01} sa optimalnom bazom $B_1 = B_2 (A_1, A_2, A_3)$. Taj podskup je na sl. 1. označen sa A.

Ocene optimalnosti vektora izvan optimalne baze se anuliraju za $\lambda_2 = 1/2$. Izaberimo jedan od tih vektora koji može da uđe u novu optimalnu bazu. Neka je to A_5. Novoj bazi odgovara rešenje $x^{02} = (5/2, 5/2, 0, 0, 1)$.

Na osnovu njegovih ocena optimalnosti dobijaju se relacije $0 \leq \lambda_1 \leq 1/2$ i $\lambda_2 = 1/2$ koje određuju skup B na sl. 1. On predstavlja skup parametara λ_1 i λ_2 nad kojim se postiže optimalnost modela (c) u tački x^{02}.

Dekompoziciju mogućih vrednosti parametara λ_1 i λ_2 nastavimo izborom neke tačke iz skupa B. Tako se dolazi do rešenja $x^{03} = (3, 1, 0, 4, 0)$ sa skupom mogućih vrednosti parametara λ_1 i λ_2, koga određuju relacije $\lambda_1 + \lambda_2 \leq 1$, $\lambda_1 \geq 1/2$, $\lambda_1 \geq 0$ i $\lambda_2 \geq 0$, označen na sl. 1. sa C.

Prema sl. 1. vidi se, da je skup mogućih vrednosti parametara λ_1 i λ_2 iscrpljen i da je njegova dekompozicija na skupove A, B i C. Time su dobijena tri efikasna ekstremna rešenja modela (a). Svakom od njih odgovaraju moguće vrednosti parametara λ_1, λ_2 i λ_3 takvih da je ono optimalno rešenje modela (c), odnosno (b).

Pre nego pređemo na ispitivanje da li pored ekstremnih tačaka postoje i druge koje su efikasna rešenja modela (b), pogledajmo vezu između dobijenih optimalnih rešenja modela (c) i optimalnih rešenja parcijalnih modela (a). Tako:

a) Za $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 0$ dobija se parcijalan model po kriterijumu maksimalne produktivnosti. Tačka $(1, 0, 0)$ pripada podskupu A skupa vrednosti parametra λ_1 i λ_2. Njemu odgovara optimalno rešenje $x^{01} = (1, 3, 4, 0, 0)$ sa max $(P) = 4/5$.

b) Za $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 0$ dobija se parcijalan model po kriterijumu maksimalne ekonomičnosti. Tačka $(0, 1)$ pripada podskupu B skupa mogućih vrednosti parametara λ_1 i λ_2. Njemu odgovara rešenje $x^{03} = (3, 1, 0, 4, 0)$ sa max $(E) = 4/9$.

c) Za $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 1$ dobija se parcijalan model po kriterijumu maksimalne rentabilnosti. Tačka $(0, 0)$ pripada podskupu A skupa mogućih vrednosti parametara λ_1 i λ_2. Njemu odgovara optimalno rešenje $x^{01} = (1, 3, 4, 0, 0)$ sa max $(R) = 4/37$.

Na osnovu učinjene analize vidi se da su dve od tri optimalne tačke modela (b) istovremeno optimalna rešenja parcijalnih modela. Ekstremna tačka $C(5/2, 5/2)$ nije optimalna ni jednom parcijalnom modelu. Ona se dobija za $\lambda_2 = 1/2$ i $\lambda_1 + \lambda_2 \leq 1/2$, što znači da su uključena sva tri moguća kriterijuma.

Prema modelu (b) parametri λ_1, λ_2 i λ_3 određuju relativni značaj pojedinih parcijalnih kriterijuma. Pored apsolutnog značaja pojedinih kriterijuma koji se izražava parcijalnim modelom on može biti i drugačije određen. Tako, neka je $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$. Kako je $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$ pa je $3\lambda = 1$ ili $\lambda = 1/3$. Tačka $(1/3, 1/3)$ pripada podskupu A skupu mogućih vrednosti parametara λ_1, λ_2, kome odgovara rešenje $x^{01} = (1, 3, 4, 0, 0)$, pa je to optimalno rešenje za slučaj da su kritrijumi istog značaja.

Sledeći problem višekriterijumskog modela, jeste da li pored ekstremnih efikasnih rešenja postoje i druga? Prema definiciji, rešenje x^0 višekriterijumskog modela je efikasno ako ne postoji drugo rešenje x takvo da sistem $f_1(x) \geq f_1(x^0)$, $f_2(x) \geq f_2(x^0)$, $\ldots$, $f_n(x) \geq f_n(x^0)$ nema rešenja takvih da je barem jedna od relacija $f_i(x) > f_i(x^0)$ ispunjena. Pored ekstremnih efikasnih rešenja, model (a) može imati efikasna rešenja koja leže u unutrašnjosti ili na bridovima skupa mogućih rešenja.

Skup mogućih rešenja modela (a), sl. 2, ima tri ekstremne tačke: $A(3, 1)$, $B(1, 3)$ i $C(5/2, 5/2)$ i sve tri su efikasna rešenja višekriterijumskog modela (a). Ostala efikasna rešenja mogu da leže na jednoj od strana trougla (skupa mogućih rešenja) ili u njegovoj unutrašnjosti.

Neka je

$$x^0 = \lambda x^{01} + (1 - \lambda)x^{03} = (3 - 2\lambda,\ 2\lambda + 1,\ 4\lambda,\ 4 - 4\lambda,\ 0),$$

$$0 \leqslant \lambda \leqslant 1$$

tačka na duži sa ekstremnim tačkama x^{01} i x^{03}.

Na osnovu definicije efikasnosti tačke višekriterijumskog modela za tačke $x^0 = \lambda x^{01} + (1 - \lambda)x^{03}$ se dobija sistem nejednačina

$$\begin{aligned} (-2\lambda - 1)x_1 + (-2\lambda + 3)x_2 &\geqslant 0 \\ (\ 2\lambda + 1)x_1 + (\ 2\lambda - 3)x_2 &\geqslant 0 \\ (-2\lambda - 1)x_1 + (-2\lambda + 3)x_2 &\geqslant 0, \end{aligned}$$

koji nema rešenja za koje je barem jedna od nejednačina zadovoljena sa znakom veće. To znači da su sve tačke na duži AB, sl. 2, efikasna rešenja višekriterijumskog modela (a).

Slično je za tačke

$$x^0 = \lambda x^{01} + (1 - \lambda)x^{02} = (\frac{5}{2} - \frac{3}{2}\lambda,\ \frac{5}{2} + \frac{1}{2}\lambda,\ 4\lambda,\ 0,\ 1 - \lambda),\ 0 \leqslant \lambda \leqslant 1$$

na duži sa ekstremnim tačkama x^{01} i x^{02}, odnosno tačke

$$x^0 = \lambda x^{02} + (1 - \lambda)x^{03} = (3 - \frac{1}{2}\lambda,\ 1 + \frac{3}{2}\lambda,\ 0,\ 4\lambda,\ 1 - \lambda),\ 0 \leqslant \lambda \leqslant 1,$$

na duži sa ekstremnim tačkama x^{02} i x^{03}.

Izvedenom analizom utvrdili smo da, pored ekstremnih efikasnih rešenja, model (a) ima za efikasna rešenja i sve granične tačke skupa mogućih rešenja, sl. 2.

Ako unutrašnje tačke skupa mogućih rešenja modela (a) izrazimo kao konveksnu kombinaciju ekstremnih tačaka x^{01}, x^{02} i x^{03}

$$x^0 = \lambda_1 x^{01} + \lambda_2 x^{02} + (1 - \lambda_1 - \lambda_2)x^{03} =$$

$$= (3 - 2\lambda_1 - \frac{1}{2}\lambda_2,\ 1 + 2\lambda_1 + \frac{3}{2}\lambda_2,\ 4\lambda_1,\ 4 - 4\lambda_1 - 4\lambda_2,\ \lambda_2),$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 \leqslant 1,\ \lambda_1 \geqslant 0,\ \ \lambda_2 \geqslant 0,$$

može se pokazati, kao i kod tačaka na granici skupa mogućih rešenja, da su i sve unutrašnje tačke skupa mogućih rešenja modela (a) njegova efikasna rešenja.

Izvedenom analizom zaključuje se da su sva moguća rešenja modela (a) njegova efikasna rešenja. To znači da se može izabrati bilo koji moguói proizvodni program. Različitim mogućim programima postiže se maksimalnost po jednom ili više kriterijuma. Već smo ukazali kako se dobija optimalnost po nekom od parcijalnih kriterijuma. To su rešenja x^{01} i x^{03}. Prvo maksimizira produktivnost i rentabilnost a drugo ekonomičnost. Za efikasno rešenje x^{02} optimalnost se postiže tako što ekonomičnost ima 50% na značaju, a produktivnost i rentabilnost zajedno 50%.

Za ostala efikasna rešenja može se takođe odrediti koji od kriterijuma ima najveći značaj u šta se ovde nećemo upuštati.

3.2. *Postupak kompromisa*

Pored određivanja efikasnih rešenja višekriterijumskog modela postoji čitav niz drugih postupaka za njegovo istraživanje. Kod mnogih se zahteva rangiranje ciljeva po značaju. Jedan od takvih je metod kompromisa.

Mi ćemo postupak kompromisa demonstrirati na primeru tako da je značaj kriterijuma produktivnost, ekonomičnost i na kraju rentabilnost. Napominjemo da je moguć i drugi redosled.

Parcijalni model sa kriterijumom maksimalna produktivnost ima rešenje $x^{01} = (1, 3, 4, 0, 0)$ i max $(P) = 0{,}8$. Postavimo problem tako da se odredi program da produktivnost ne bude manja od 0,7, što znači da se čini ustupak za $\Delta P = 0{,}1$. Tako se dobija ograničenje

$$\frac{x_1 + x_2}{2x_1 + x_2} \geqslant 0{,}7$$

ili

$$4x_1 - 3x_2 \leqslant 0.$$

Dobijeno ograničenje se priključuje ograničenjima modela (a) čime se dobija novi skup mogućih rešenja po kriterijumu ekonomičnosti i rentabilnosti, trougao BDE na sl. 2.

Neka je ekonomičnost kriterijum po kome se traži optimalnost nad novim skupom mogućih rešenja. Primenom nekog od postupaka za određivanje optimalnog rešenja razlomljeno-linearnih modela dobijaju se višeznačna rešenja. To su ekstremne tačke D i E i duž $\overline{DE}$, sa max $(E) = 0{,}389$.

Slično se traži optimalnost po kriterijumu rentabilnosti nad novo formiranim skupom mogućih rešenja, što se postiže nad duži $\overline{DE}$ sa max $(R) = 0{,}106$.

Kako su max $(E) = 4/9$ i max $(R) = 4/37$ nad prvobitnim skupom mogućih rešenja veće vrednosti od novodobijenih, to znači da su ekstremne tačke u kojima oni postižu optimalnost izvan skupa mogućih rešenja sa kompromisom. Rešenje $x_1 = 2$ i $x_2 = 8/3$ ili neko sa duži $\overline{DE}$ predstavljaju kompromisno rešenje pri čemu je kompromis produktivnosti $\Delta P = 0{,}1$, *ekonomičnosti* $\Delta E = 0{,}055$ *i rentabilnosti* $\Delta R = 0{,}012$. Vidi se da je on najveći za produktivnost i najniži za rentabilnost.

Međutim, uopšte uzeto ti kompromisi nisu veliki. Izraženi u procentima oni bi bili 10% za produktivnost, 5% za ekonomičnost i 1% za rentabilnost. Procenti predstavljaju odstupanje od maksimalne produktivnosti, ekonomičnosti, odnosno rentabilnosti, po parcijalnim modelima.

Uzimajući za rešenje optimalno rešenje bilo koga parcijalnog modela procenat odstupanja drugih kriterijuma od svojih maksimalnih vrednosti je veći. Tako, neka je izabrano rešenje $x^0 = (1, 3, 4, 0, 0)$ za koje je max $(P) = 4/5$, $E = 4/11$ i $R = 4/37$. Kompromisi koji se tom prilikom čine su $\Delta E = 0,08$ *i za rentabilnost* $\Delta P = 0$.

U slučaju da se za optimalno rešenje uzme $x^0 = (3, 1, 0, 4, 0)$ za koje je max $(E) = 4/9$, $P = 4/7$ i $R = 4/39$. Kako su maksimalne vrednosti max $(P) = 4/5$ i max $(R) = 4/37$ to su kompromisi $P = 0,22$ i $\Delta R = 0,006$. Upoređujući ih sa kompromisima za rešenje $x^0 = (2, 8/3)$, koji su $\Delta P = 0,1$ i $\Delta R = 0,002$, vidi se da su osetno veći. To govori da je rešenje $x^0 = (2, 8/3)$ povoljnije i treba njega birati kao mogući proizvodni program po kriterijumima produktivnost, ekonomičnost i rentabilnost.

Pored rešenja $x_1 = 2$ i $x_2 = 8/3$, za koje su kompromisi parcijalnih kriterijuma $\Delta P = 0,1$, $\Delta E = 0,055$ i $\Delta R = 0,002$, mogu se uvesti nova ograničenja većim kompromisom nekog od parcijalnih kriterijuma i odrediti odgovarajuće rešenje. Rentabilnost je najmanjeg kompromisa. Ako bi se on uvećao došlo bi se do novog skupa mogućih rešenja i odgovarajućeg optimalnog rešenja.

Rešavajući postavljeni problem došlo se do dve mogućnosti. Prvom se određuju moguća alternativna rešenja pri različitom značaju pojedinih ciljeva. Postupak kompromisa daje mogućnost da se u okviru alternativnih rešenja odredi ono koje zadovoljava unapred zadane kompromise. Kombinujući postupak određivanja efikasnih rešenja i kompromisa može se doći do rešenja koje zadovoljava i dodatne zahteve izražene u vidu ranga i kompromisa.

Poslednjih godina čine se veliki napori za iznalaženje podesnih postupaka u rešavanju višekriterijumskih modela. Ekonomski sistemi su po pravilu sa više ciljeva, pa je to razlog da se za njih mogu definisati višekriterijumski modeli. Jedan od problema koji se uspešno može optimizirati višekriterijumskim modelima je transportni problem. Njegova optimizacija je najčešće po kriterijumu minimalnih troškova. Međutim, vreme realizacije nekog transportnog programa je takođe značajno. Najracionalniji program je ako se nađe kompromis između ta dva cilja. Postoji i niz drugih problema kod kojih se zahteva više kriterijumska optimizacija.

Primljeno: 26. 6. 1980
Prihvaćeno: 29. 9. 1980.

LITERATURA

1. Benajjun R., Laričev O., i dr., Linejnoe programirovanie s mnogimi kriterijami. *Avtom. i telem.*, 1971/8, Moskva.
2. *Višekriterijalno programiranje*, red. dr Ljubomir Martić, "Informator" Zagreb, 1978.
3. Podinovskij V. V., Mnogokriterialnie zadači s uporjadočennymi po važnosti odnorodnymi kriterijami. *Avtom. i telem.*, 1976/11, Moskva.
4. Podinovskij V. V., Gavrilov V. M., Optimizacija po posledovatel'no primenjaemym kriterijam, *Sov. radio*, 1975, Moskva.
5. Podinovskij V. V., Mnogokriterial'nie zadači s odnorodnymi ravnocennymi kriterijami. *Ž. vičislit. matem. i matem. fiz.*, 1975/2, Moskva.
6. Salukvadze M. E., Ob optimizacii vektornyh funkcionalov I. Programmirovanie optimilnyh traektorij. *Avtom. i telem.*, 1971/3, Moskva.
8. Zeleny M., *Linear Multiobjective Programming*, Springer Verlag, 1974 New York.

OPTIMIZATION OF ECONOMIC SYSTEMS ACCORDING TO THE CRITERION OF MAXIMAL PRODUCTIVITY, ECONOMY AND PROFITABILITY USING MULTI-CRITERIA PROGRAMMIZING MODELS

Stojadin SAZDANOVIĆ

Summary

Single criterion models are mostly used for the optmization of economic systems. There have been some positive results. The functioning of economic systems is, however, dependent on various incides. Each of them might be a criterion of optimization. Choosing one of them would be a simple consideration. For that reason models with several criteria have been drawn up establishing a theory of multi-criteria programming.

In this report the problem of optimization by using single criteron models is considered. After finding out disadvantages to define objectives, a multi-criteria model may be defined according to the criteria of maximal productivity, economy and rentability. The procedure of parameters and that of finding out a compromise solution are applied to this model. Both procedures are shown.