

FRACTALES Y SERIES DE DATOS GEOFISICOS

LUIS ALFREDO MONTES VIDES

Profesor Asistente

Departamento de Geociencias-Facultad de Ciencias-Universidad Nacional de Colombia

Montes L. A.: Fractales y series de datos geofísicos. Geofís. Colomb. 2:9-12, 1993. ISSN 0121-2974

RESUMEN

La Geometría de Fractales ha surgido como una herramienta potencialmente útil para la caracterización de datos en Geofísica. Comúnmente, los datos geofísicos conforman series de tiempo, que exhiben un comportamiento aleatorio o variación a corto y a largo plazo. Un ejemplo típico son los registros anuales de temperatura. La traza de un registro es una curva con una dimensión fractal D , caracterizada por un exponente H .

En el presente trabajo se utiliza el método de Análisis de rango en cambios de escala, creado por H. E. Hurst, para determinar la dimensión fractal de una serie de datos geofísicos, y su medida de auto-afinidad.

ABSTRACT

There is a new Geometry which provides a potentially tool for the characterization of geophysical data: The Fractal Geometry. Generally, Geophysical data consist of records in time or data series, for example yearly records of temperature, and they show a random behavior or variation on both a short and a long-term time scale. The trace of a record is a curve with a fractal dimension D , and it is characterized by an exponent H . In this paper, the Hurst's rescaled range analysis method is used to determine the fractal dimension of a geophysical data serie D and H , his self-affinity measure.

1. INTRODUCCION

En los últimos 10 años se ha reconocido la importancia de la Geometría de Fractales en las Ciencias naturales, como apropiada para describir las estructuras presentes en la Naturaleza.

La geometría fractal suministra una descripción y modelo matemático para la mayoría de las formas aparentemente compleja halladas en la naturaleza.

Su propiedad más importante es la ausencia de cualquier característica de longitud o tiempo. Esto quiere decir que las funciones de distribución de probabilidad de los fractales, adecuadamente normalizadas, pueden expresarse de manera invariante bajo cambios de escala.

El interés desde el punto de vista de la Geofísica se ha manifestado con ensayos en distintos campos por distintos autores (Burrough, 1984; Unwin, 1989; Jones et al., 1989; Hewett, 1986).

Burrough estimó la dimensión fractal de datos

geofísicos, basado en análisis de densidad de espectros de frecuencia.

Una característica fundamental de los datos geofísicos es el comportamiento estadístico fuertemente no-gaussiano.

Jones y sus colegas, afirman que existe una correlación entre los datos geofísicos y las propiedades fractales de sus series de tiempo.

En este artículo se utiliza la ley empírica de análisis de rangos de escala planteado por Hurst, para determinar la dimensión fractal de una sección en un registro eléctrico de pozo, partiendo del calculo empírico del exponente de Hurst (H) como medida del grado de auto-afinidad en el mismo y la relación con su dimensión fractal.

2. FUNDAMENTOS TEORICOS

La definición formal del concepto de fractal fue planteada por el creador de la Geometría fractal, Benoit Mandelbrot, en los siguientes términos: "Un fractal es un conjunto para el cual la dimensión Hausdorf-Besicovith estrictamente

excede la dimensión topológica"; y de una manera menos formal como: "La forma hecha de partes similares de algún modo".

Un elemento 1-Dimensional como un segmento de una línea posee una propiedad de similitud a escala, pudiendo dividirse en N partes idénticas al original, cada una un factor de escala 1/N.

Un objeto 2-Dimensional puede descomponerse en N partes iguales al original con un factor de escala de $(1/N)^{1/2}$. A su vez un cubo se descompone en N pequeños cubos con factor de escala $(1/N)^{1/3}$.

En conclusión un objeto D-dimensional puede dividirse en N pequeñas partes, cada una similar a la primera y reducida en un factor de escala

$$r = (N)^{1/D}$$

Despejando D se obtiene la dimensión fractal del objeto.

$$D = \log(N) / \log(r)$$

A diferencia de la dimensión Euclidiana, la dimensión fractal es estrictamente no entera. Bajo magnificación, un segmento de la figura principal luce parecida pero no idéntica a la primera.

Las formas que tienen un comportamiento marcadamente aleatorio, se repiten estadísticamente únicamente cuando las dos direcciones (t y f(t)) se magnifican a escalas diferentes. Si t se magnifica en un factor r^H , entonces f(t) se magnifica en un factor r^{H+1} . Esta escala no uniforme es conocida como auto-afinidad y está ligada fuertemente al concepto de dimensión fractal.

La dimensión fractal de una forma auto-afín, se relaciona con el parámetro de escala H mediante la ecuación:

$$D = 2 - H \quad [1]$$

3. METODO DE ANALISIS DE RANGOS BAJO CAMBIOS DE ESCALA

El método estadístico de análisis de rango bajo cambios de escala, fue inventado por H.E. Hurst en 1950 (Hurst, 1951; Hurst et al., 1965).

Para su entendimiento se considera el siguiente problema:

Se debe estimar la capacidad de almacenamiento de una represa basado en registros observados de descargas de agua, el valor ideal del volumen de la represa es aquel que nunca permita que esta se rebose o que se vacíe completamente.

En un tiempo t recibe una descarga de agua $\varepsilon(t)$, liberando en un período de tiempo τ la cantidad promedio $\langle \varepsilon(t) \rangle_\tau$.

El flujo promedio o el volumen recibido en un período de τ años es:

$$\langle \varepsilon(t) \rangle_\tau = (1/\tau) \sum_{t=1}^{\tau} \varepsilon(t) \quad [2]$$

Ese volumen promedio recibido debe ser igual al volumen liberado en ese mismo período.

A su vez el volumen neto acumulado o la diferencia entre el volumen recibido y el liberado en un período τ es:

$$X(t, \tau) = \sum_{u=1}^{\tau} \{ \varepsilon(t) - \langle \varepsilon(t) \rangle_\tau \} \quad [3]$$

La diferencia entre el máximo y mínimo flujo acumulado X es el rango R, el cual mide la capacidad de almacenamiento para mantener la capacidad de almacenamiento media y nunca llegar al vaciado completo.

$$R(\tau) = \max_{1 \leq t \leq \tau} X(t, \tau) - \min_{1 \leq t \leq \tau} X(t, \tau) \quad [4]$$

Donde t es un entero y τ es el período considerado.

La desviación estándar se estima de las observaciones así:

$$S = \left\{ (1/\tau) \sum_{t=1}^{\tau} \{ \varepsilon(t) - \langle \varepsilon(t) \rangle_\tau \}^2 \right\}^{1/2} \quad [5]$$

Investigando muchos fenómenos naturales, Hurst encontró que la relación R/S para tales fenómenos se describe muy bien por la relación:

$$R/S = (\tau/2)^H \quad [6]$$

que es la llamada Ley empírica de Hurst. Claramente R depende del período τ en consideración y se espera que aumente al incrementarse τ , es decir al cambiar la escala de tiempos.

Este concepto de análisis de rango bajo cambios de escala coincide con el concepto de auto-afinidad de un fractal cuando se buscan partes similares al total al realizar cambios de escala o magnificación.

4. PROCESO DE DATOS

En el presente trabajo se tomó un registro eléctrico digitalizado. Para garantizar la calidad de los datos se tomaron aquellos que estaban a una profundidad mayor de 100 m y hasta un límite de 480 m como cota inferior.

Dicho registro pertenece a una zona de rocas sedimentarias, cuya secuencia refleja el comportamiento del clima en períodos geológicos lejanos.

Los valores que representan la resistividad de las rocas a diferentes profundidades, están consignados en la Tabla 1. Se consideraron 10 períodos diferentes, el primero correspondía a los 10 m iniciales de la secuencia (a partir de los 100 m), para los siguientes se incrementó el valor del período (20 m para el segundo, etc) hasta abarcar la totalidad de la secuencia 380 m (480 m tope de la secuencia). En cada período se calculó el valor medio de la Resistividad, [2], y el acumulado [3]. Se observó que este valor fuera estrictamente mayor que cero (0).

A continuación se determinó el valor del rango R [4], así como la desviación estándar alrededor de la Resistividad media, en cada período. Luego para cada período se encontró el cociente entre el rango (R) y la desviación estándar (S). Finalmente se hizo una regresión lineal entre el cociente R/S y el período en una escala Log-Log, para determinar el exponente H [6] y la dimensión fractal del registro [1]. El resultado de los cálculos se muestra en la Tabla 2.

5. DISCUSION DE RESULTADOS

Un análisis de regresión lineal efectuado entre el log(R/S) y el log(τ) arrojó los siguientes resultados: se halló que el exponente de Hurst era de 0.854 con un coeficiente de correlación de 0.997, indicando que la dimensión fractal del registro eléctrico era de 1.146 (Fig.1). Este resultado coincide con los obtenidos por Hewett (Hewett et al., 1986) en el cálculo de la dimensión fractal por el método de análisis de frecuencia, de la porosidad medida en un registro de pozo distinto (1.100 pies), y para el cual el exponente de Hurst fue H = 0.855.

Los datos de la Tabla 1 y la Fig.1, muestran que la resistividad a lo largo del registro fluctúa fuertemente; sin embargo, la Fig.2 indica un comportamiento persistente, reafirmado con el valor del exponente de Hurst (H = 0.853), indiscutiblemente mayor que 0.5 (valor correspondiente a una serie de datos completamente aleatoria), lo cual muestra una tendencia en el proceso que dio su origen.

Una razón por la cual se puede explicar porqué estas secuencias de datos geofísicos se comportan de acuerdo a una estadística de Hurst, es que una secuencia sedimentaria refleja el comportamiento del clima en tiempos geológicos lejanos y los sedimentos que formaron las rocas actuales fueron transportados por corrientes de agua que erodaron las rocas antiguas, y estos flujos se comportan adecuadamente con la estadística de Hurst.

Se observa que un registro eléctrico como serie de datos geofísicos presenta un comportamiento fractal, el cual puede relacionarse con el proceso que lo generó, tales como la erosión y el clima de épocas geológicas lejanas.

La geometría fractal permite observar un orden en las formas naturales de los datos geofísicos, que a primera vista no se observan.

TABLA 1
Valores de Resistividad, muestreados en el Registro a intervalos de 1 m, el primero corresponde al techo de la secuencia y el último al tope inferior

	143	93	50	50	112	46	71
	136	95	62	53	121	47	63
	120	135	70	53	143	53	57
	123	132	55	43	183	75	58
*	122	121	44	43	131	110	55
29	121	114	38	45	115	157	52
29	116	90	36	51	95	185	52
30	114	69	34	52	67	181	53
33	113	61	34	40	59	181	55
41	112	57	34	36	57	187	58
60	113	46	35	37	63	189	64
75	113	46	36	36	63	190	82
85	110	48	37	38	63	188	113
105	106	48	37	42	62	188	128
116	103	52	40	45	64	187	133
124	103	62	41	54	65	178	137
134	107	82	42	60	66	175	115
131	110	104	43	67	68	165	97
129	114	131	41	83	70	151	86
130	115	166	26	93	75	140	83
135	99	202	27	95	77	126	84
144	83	190	27	116	88	120	86
158	71	161	27	150	97	109	100
166	65	135	28	195	115	111	120
171	58	102	29	218	144	106	155
173	54	93	33	247	195	109	146
177	55	94	37	222	248	121	128
178	52	87	39	167	248	122	125
161	56	92	35	139	248	121	125
141	86	80	34	117	248	117	130
149	97	76	35	114	248	117	108
143	111	67	36	124	248	150	109
129	115	64	37	144	248	169	116
122	106	63	40	170	145	162	121
122	95	62	40	190	98	158	118
109	87	64	42	205	78	144	121
106	84	61	49	209	93	140	**
110	89	49	55	213	94	126	
118	80	42	62	210	75	132	
125	74	35	64	217	63	126	
156	65	33	59	215	57	118	
178	65	31	57	241	57	111	
191	57	31	63	248	60	108	
195	61	31	63	248	56	121	
203	62	32	56	218	48	127	
211	67	33	53	216	41	113	
215	66	33	50	221	41	107	
207	70	34	51	212	43	106	
195	72	35	48	168	43	102	
158	85	41	48	130	43	93	

TABLA 2
Muestra los valores de R, S, (R/S), Log(τ), Log(R/S) y los resultados de la regresión lineal entre Log(R/S) y Log(τ)

R	S	R/S	LOG(τ)	LOG(R/S)
151.9000	31.49937	4.822319	2.302585	1.573255
477.2500	47.96236	9.950512	2.995732	2.297624
722.6500	46.79476	15.44297	3.688879	2.737154
1283.075	43.84825	29.26171	4.382027	3.376280
1750.500	44.36271	38.78257	4.787492	3.657971
2537.938	47.25159	53.71115	5.075174	3.983621
3493.441	47.65990	73.29937	5.393628	4.294552
5496.175	59.98748	91.62203	5.634790	4.517672
5755.375	59.61874	96.53634	5.768321	4.569919
5927.324	56.07979	105.6945	5.940171	4.660552

REGRESSION OUTPUT:				
Constant			-0.35835	
Std Err of Y Est				0.059437
R Squared			0.99721	
No. of Observations				10
Degrees of Freedom				8
X Coefficient(s)			0.0853886	
Std Err of Coef.			0.01597	

* Techo tope superior, ** Base tope inferior

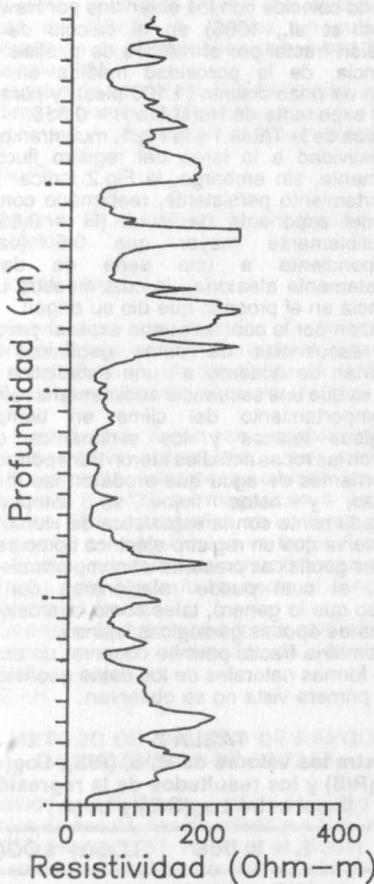


Figura 1. Registro eléctrico de pozo. Cota superior: 100 m (profundidad)

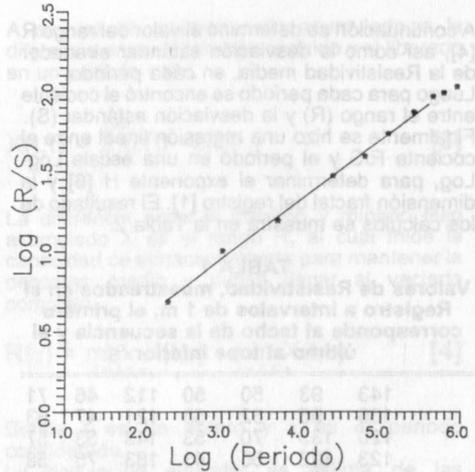


Figura 2. Curva de Regresión, datos de la Tabla 2.
 $Y = 0.8538X - 0.3558$.
 Coeficiente de determinación = 0.9972

BIBLIOGRAFIA

- Burrough, P.A.** (1981): Fractal dimension of landscapes and other environmental data. *Nature* **294** (5838).
- Burrough, P.A.** (1984): The application of fractals to geophysical phenomena: Institute of mathematics and its applications **20** (3-4).
- Feder, J.** (1988): *Fractals*. Plenum Press, New York.
- Heinz, O., Peitgen & P.H. Richter.** (1987): *The beauty of Fractals*. Springer-Verlag, New York.
- Heinz, O., Peitgen et al.** (1988): *The Science of Fractal Images*. Springer-Verlag, New York.
- Hewett, T.A.** (1986): Fractal distributions of reservoirs heterogeneity and their influence on fluid transport. Technical Conference of the Society of Petroleum Engineers. New Orleans.
- Hurst et al.** (1965): *Long-term Storage. An Experimental Study*. Constable, London.
- Jones, J.G. et al.** (1989): Fractal properties of Computer-Generated and Natural Geophysical Data. *Computers & Geosciences* **15** (2):227-235.
- Mandelbot, B.** (1982): *Fractals: form, chance and dimension*. W.H. Freeman, San Francisco.
- Unwin, D.** (1989): Fractals and the Geosciences. *Computers & Geosciences* **15** (2). Pergamon Pres, Oxford.