

## UN MODELO GEODESICO PARA COLOMBIA

**WILLIAM ALBERTO MARTINEZ DIAZ**

Instituto Geográfico "Agustín Codazzi", Unidad de Geofísica

**GERMAN A. ROCHA A.**

Universidad Distrital "Francisco José de Caldas"-Facultad de Ing.Catastral

**LAURA MARLENE SANCHEZ RODRIGUEZ**

Instituto Geográfico "Agustín Codazzi", Unidad de Geofísica

Martínez, W.A., G.A. Rocha & L.M. Sánchez (1995): Un Modelo Geodésico para Colombia. Geofís. Colomb. 3:59-66. ISSN 0121-2974

### RESUMEN

La información gravimétrica procesada está compilada en el Mapa de anomalía Bouguer simple de Colombia, este de Panamá y aéreas marinas adyacentes, publicado por "The Geological Society of America Inc." en 1989. A partir de los valores de la anomalía isostática (aproximada), resultante de la diferencia entre la anomalía Bouguer simple observada y la misma, procesada por medio de la Transformada de Fourier Bidimensional, se aplicó el modelo físico-matemático de Stokes, con el cual se determinan las ondulaciones geoidales relacionando la gravedad normal, el potencial anómalo y las anomalías de la gravedad; tales ondulaciones se referenciaron al elipsoide WGS-84.

### ABSTRACT

The processed gravimetric information is compiled in the SIMPLE BOUGUER GRAVITY ANOMALY MAP OF COLOMBIA, EASTERN PANAMA AND ADYACENT MARINE AREAS, published in 1989 by The Geological Society of America Inc. Based on Isostatic anomaly values (approximated) obtained for difference between the observed Simple Bouguer anomaly values and itself, processed by means of the Bidimensional Fourier Transform, the Physical-Mathematical Stokes model was applied. With this model can be possible to determine the geoid undulations, relating the normal gravity, the anomaly potential and the gravity anomalies; these undulations are based on the WGS-84 ellipsoid.

### 1. FORMULA DE STOKES

El desarrollo del modelo geoidal está basado en la Ley de Gravitación Universal, la teoría del potencial gravitacional, los modelos teóricos que representan el comportamiento terrestre y sus desviaciones con respecto al comportamiento real de la Tierra.

Relacionando el potencial anómalo ( $T_{ij}$ ) con la gravedad normal ( $\Gamma$ ) sobre la superficie terrestre se obtienen las ondulaciones geoidales ( $N$ ). La integral de Stokes permite determinar el valor del potencial anómalo resolviendo la Ecuación Fundamental de la Geodesia Física:

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial n} - \frac{1}{\Gamma} \frac{\partial \Gamma}{\partial n} T_{ij} + \Delta g = 0 \quad [1]$$

donde:

- $T_{ij}$ : es el potencial anómalo o de perturbación.  
 $\delta T_{ij}/\delta n$ : es el gradiente anómalo (derivada parcial de T en la dirección normal).  
 $\Gamma$ : es la gravedad normal.  
 $\Delta g$ : es la anomalía de la gravedad empleada en el modelo.

Ecuación que constituye el tercer problema de valor límite en la teoría del potencial (Heiskanen & Vening Meinesz, 1958; Pick et al., 1973).

El potencial anómalo (Heiskanen & Moritz, 1967) se define como:

$$T_{ij} = \frac{R}{4\pi} \int_{\sigma} \Delta g S(\psi) d\sigma \quad [2]$$

donde:

- R: es el radio de la esfera con igual volumen al del elipsoide terrestre. Este radio equivale al radio medio de la Tierra.  
 $d\sigma$ : denota un elemento de superficie sobre la esfera terrestre.  
 $\psi$ : distancia esférica entre el punto de cálculo ( $\phi, \tau$ ) y el elemento de superficie ubicado en ( $\phi', \tau'$ ).

$$\psi = \cos^{-1} [\text{Sen}\phi \text{ Sen}\phi' + \text{Cos}\phi \text{ Cos}\phi' \text{ Cos}(\tau' - \tau)]$$

$S(\psi)$ : es la función de Stokes.

$$S(\psi) = \frac{1}{\text{Sen}\frac{\psi}{2}} - 2 \frac{\text{Sen}\frac{\psi}{2}}{2} + 1 - 5 \text{Cos}\psi - 3 \text{Cos} \left[ \ln \left( \frac{\text{Sen}\frac{\psi}{2}}{2} + \text{Sen}^2 \frac{\psi}{2} \right) \right] \quad [3]$$

Mediante el Teorema de Bruns se obtienen las ondulaciones geoidales:

$$N = \frac{T_{ij}}{\Gamma}; \quad N = \frac{R}{4\pi\Gamma} \int_{\sigma} \Delta g S(\psi) d\sigma$$

Es posible sustituir en esta ecuación la gravedad teórica ( $\Gamma$ ) por un valor medio de gravedad en la superficie terrestre, sin cometer errores apreciables.

Así:

$$N = \frac{R}{4\pi G} \int_{\sigma} \Delta g S(\psi) d\sigma \quad [4]$$

## 2. MANEJO DE LA INFORMACION GRAVIMETRICA

La información gravimétrica procesada se encuentra recopilada en el mapa "Simple Bouguer gravity anomaly map of Colombia, eastern Panama, and adjacent marine areas" (Edición de 1989) (Kellogg et al., 1983) (Fig. 1). Las fuentes de este mapa son: datos de Mott-Smith (1941), Instituto Geográfico "Agustín Codazzi" (1941-1969, 1991), Exploración California (1958), Núñez (1967), Harding, Woollard, Monges, Oldham, Case (1971 y levantamiento trans-andino), Quintero (1977), Kellogg-Bermúdez (1978). Mapas de: Van Buskirk (1948), Case et al. (1971, 1973), Case-MacDonald (1973), Case (1974), Bermúdez (1978), Bonini et al. (1980), Bermúdez-Acosta (1978), Kellogg (1980), Hayes (1966), Bowin (1976), Briceño (1978).

En esta aproximación a la forma y dimensiones del geoide en Colombia se realizó la conversión del Datum Internacional de 1971 sobre el cual está referenciado el mapa fuente al WGS-84 (World Geodetic System-1984) mediante la transformación abreviada de Molodenskii (D.M.A., 1987)

## 3. ANOMALIA UTILIZADA EN EL MODELO

La anomalía más apropiada para el cálculo del geoide a través de la Fórmula de Stokes es la Isostática (Heiskanen & Moritz, 1967), puesto que los valores de ésta oscilan en torno a cero, su variación es suave y es independiente de la topografía, facilitando por ello la interpolación y extrapolación en zonas donde no hay cubrimiento gravimétrico. Por otra parte, la compensación isostática ocurre a nivel regional, garantizando que un valor de anomalía pueda asumirse característico de un área considerable. La reducción isostática desplaza paralelamente las masas topográficas, condensándolas sobre la superficie geoidal, además tiene en cuenta el efecto de las masas de compensación y genera deformaciones en las superficies equipotenciales menores que las de la reducción Bouguer, ocasionando un efecto indirecto inferior a las ondulaciones geoidales (Pick et al., 1973; Torge, 1983).

### 3.1 Cálculo de la anomalía Isostática

Partiendo de la anomalía Bouguer simple que asume valores altamente positivos en la corteza oceánica y fuertemente negativos en la continental y habiendo eliminado la influencia de las masas topográficas, se deduce que la variación en los valores de anomalía obedece a la presencia de otras masas no tenidas en cuenta que son, en términos regionales, masas de compensación.

Al presentarse la condición de equilibrio isostático de la corteza la diferencia entre la anomalía Bouguer observada y la regularización de ésta por medio de un modelo matemático debe ser cero; en caso contrario la condición de equilibrio isostático no está plenamente satisfecha. De acuerdo con Tsuboi (1983), esta diferencia es la anomalía isostática. La forma más apropiada de obtener la anomalía Bouguer Calculada es a través del análisis discreto de Fourier.

Los datos de anomalía Bouguer simple contenidos en el mapa pueden representarse mediante la serie armónica:

$$\Delta g_{ik} = \sum_m \sum_n C G_{mn} e^{iK_{mn} \cdot r} e^{Zk_{mn}} \quad [5]$$

donde:

$C G_{mn}$ : son los coeficientes de Fourier calculados a través de la transformada directa y equivalen a:

$$C G_{mn} = \frac{1}{MN} \sum_I \sum_K \Delta g_{ik} e^{-iK_{mn} \cdot r} e^{Zk_{mn}} \quad [6]$$

$K_{mn}$ : es el vector de onda

$r$ : es el vector posición

$M, N$ : corresponden al número de puntos muestra en las direcciones  $x$  e  $y$ .

Para el procesamiento de los datos se establece una grilla de  $64 \times 64$  ( $m_x n$ ) con intervalos de  $0.25^\circ$  que corresponden a la dimensión de la grilla y al intervalo de muestreo respectivamente. En las zonas sin información gravimétrica se asume la anomalía Bouguer igual a cero para evitar el efecto Gibbs (Díaz, 1983). En la eliminación de las frecuencias altas se utiliza un filtro de paso bajo (Díaz, 1983) que permite obtener señales con frecuencias bajas, longitudes de onda y períodos largos.

En la selección de la función filtrada se procuró elegir aquella en la cual se eliminan los cambios locales en la anomalía, sin filtrar en exceso la señal, de modo que no obedezca a condiciones continentales que resultan bastante generalizadas para el área en estudio.

En la señal filtrada (Fig. 2) se eliminan las anomalías con frecuencias altas, no se observan cambios locales de gravedad y la tendencia no es excesivamente regional. La función filtrada evidencia en forma general los procesos geotectónicos que se manifiestan en las variaciones gravimétricas del país, proporcionando valores residuales (anomalía isostática) representativos para zonas amplias, así como longitudes de onda largas, períodos amplios y frecuencias bajas, que son característicos de la anomalía isostática.

### 3.2 Anomalía Isostática

La tendencia general de la anomalía isostática en Colombia (Fig. 3) es similar a la de la anomalía Bouguer simple, su valor máximo es de  $+13$  mGal sobre la Sierra Nevada de Santa Marta, y el mínimo es de  $-18$  mGal en el Departamento del Huila.

La magnitud de la anomalías decrece rápidamente en sentido W-E en la zona del Pacífico y sobre las cordilleras (5 mGal en 28 km). En la región Andina se presentan los

valores mínimos en los Departamentos de Cauca y Huila (-18 mGal), además del alargamiento de las curvas en sentido SW-NE en la dirección de las cordilleras presentando un gradiente estrecho hacia el sur (5 mGal en 22 km) el cual se ensancha en el Magdalena Medio (5 mGal en 56 km). Sobre el área selvática y los Llanos Orientales, el gradiente es bajo ancho con cambios suaves de gravedad (5 mGal en 140 km).

Se destacan como rasgos particulares de mayor importancia los valores altos en la Sierra Nevada de Santa Marta (sobre +10 mGal), valores altos negativos en la zona Andina (-15 mGal) y Costa Pacífica (-13 mGal) debido a procesos geotectónicos.

#### 4. DETERMINACION DE LAS ONDULACIONES GEOIDALES

La fórmula de Stokes (Ec. [4]) se plantea en términos de una integral sobre toda la superficie terrestre. Al estudiar un área específica es necesario sustituir tal integral por una sumatoria de elementos finitos, los cuales se obtienen subdividiendo el área de interés en compartimientos pequeños (k).

Se utilizan compartimientos rectangulares formados por la intersección de meridianos y paralelos definidos por un sistema fijo de coordenadas. También se requiere la determinación de anomalías medias en cada elemento de área.

Tomando la Ec. [4], para un compartimiento se tiene:

$$N = \frac{R}{4\pi G} \int_0 \Delta g S(\psi) d\sigma$$

y, para todos los compartimientos:

$$N = \frac{R}{4\pi G} \sum_k \Delta g \int_0 S(\psi_k) d\sigma$$

Así:

$$N = \sum_k C_k \Delta g_k \quad [7]$$

donde:

$$C_k = \frac{R}{4\pi G} \int_0 S(\psi_k) d\sigma \quad [8]$$

La función de Stokes cuantifica el efecto de las anomalías gravimétricas -en este caso la anomalía isostática- sobre la ondulación geoidal en el punto de cálculo, en otras palabras, actúa como una función ponderadora.

Esta función presenta inconvenientes en la cercanía del punto de cálculo, ya que allí tiende al infinito; para resolver este problema se definen dos zonas de influencia, una interna, la más próxima al punto de cálculo, y una externa, en torno a la anterior. La contribución total estará dada por (Heiskanen & Moritz, 1967):

$$N = N_i + N_e \quad [9]$$

La zona interna se asume plana y su dimensión aumenta hasta donde el error en que se incurre por este supuesto deje de ser despreciable. En este trabajo la distancia esférica que define dicha zona es de 0.5° equivalente a 55.3 Km referida al elipsoide WGS-84. La contribución de esta zona es:

$$N_i = \sum_k \frac{D_k \Delta g_k}{G} \quad [10]$$

donde:

$D_k$ : es la distancia plana en metros entre el punto de cálculo y el compartimiento (k).

La zona externa está delimitada por la distancia esférica 15.75° a la cual se encuentran los valores de anomalía más distantes; estos son ponderados por la Función Modificada de Stokes (Ec.[11]), que resulta de la normalización de función original (Ec.[3]) (Pick et al., 1973) y es válida para longitudes menores de 25° (Heiskanen & Vening Meinesz, 1958):

$$F(\psi_k) = \frac{1}{2} S(\psi_k) \text{Sen} \psi_k \quad [11]$$

La función modificada de Stokes presenta variaciones pequeñas dentro de cada compartimiento permitiendo tomar el valor correspondiente al centro como el representativo.

Así, se tiene:

$$C_k = \frac{RF(\psi_k)}{4\pi G} \int_0 d\sigma = \frac{F(\psi_k)}{4\pi GR} \int_0 R^2 d\sigma$$

La integral final corresponde al área del compartimiento.

Por tanto:

$$C_k = \frac{F(\psi_k) A_k}{4\pi GR} \quad [12]$$

Finalmente, sustituyendo las Ecs. [10] y [12] en las Ecs. [7] y [9] se tiene la contribución total de las anomalías en la ondulación geoidal en cualquier punto:

$$N = \sum_k \frac{D_k \Delta g_k}{G} + \sum_k \frac{A_k F(\psi_k) \Delta g_k}{4\pi GR} \quad [13]$$

Anteriormente se expuso que (G) y (R) corresponden a valores medios de gravedad y radio terrestre respectivamente; sin embargo, se pueden calcular para cada punto de estudio. Así, el valor de (G) estará dado por la gravedad teórica (sobre el elipsoide WGS 84) en el punto de cálculo y el radio (R) será su radio geocéntrico (Ramírez, 1980).

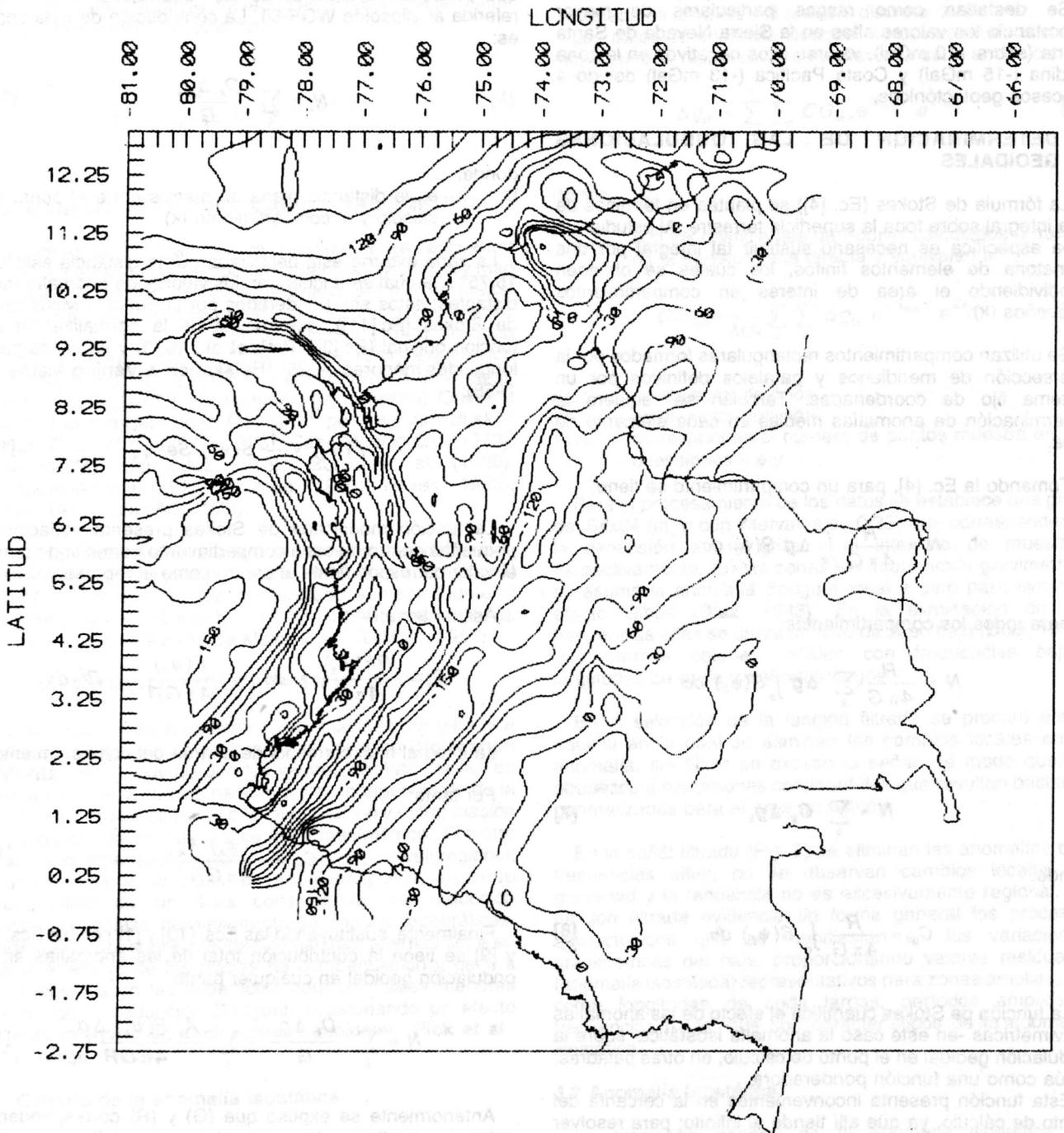


Figura 1. Anomalia de Bouguer Simple (Kellog et al., 1983)

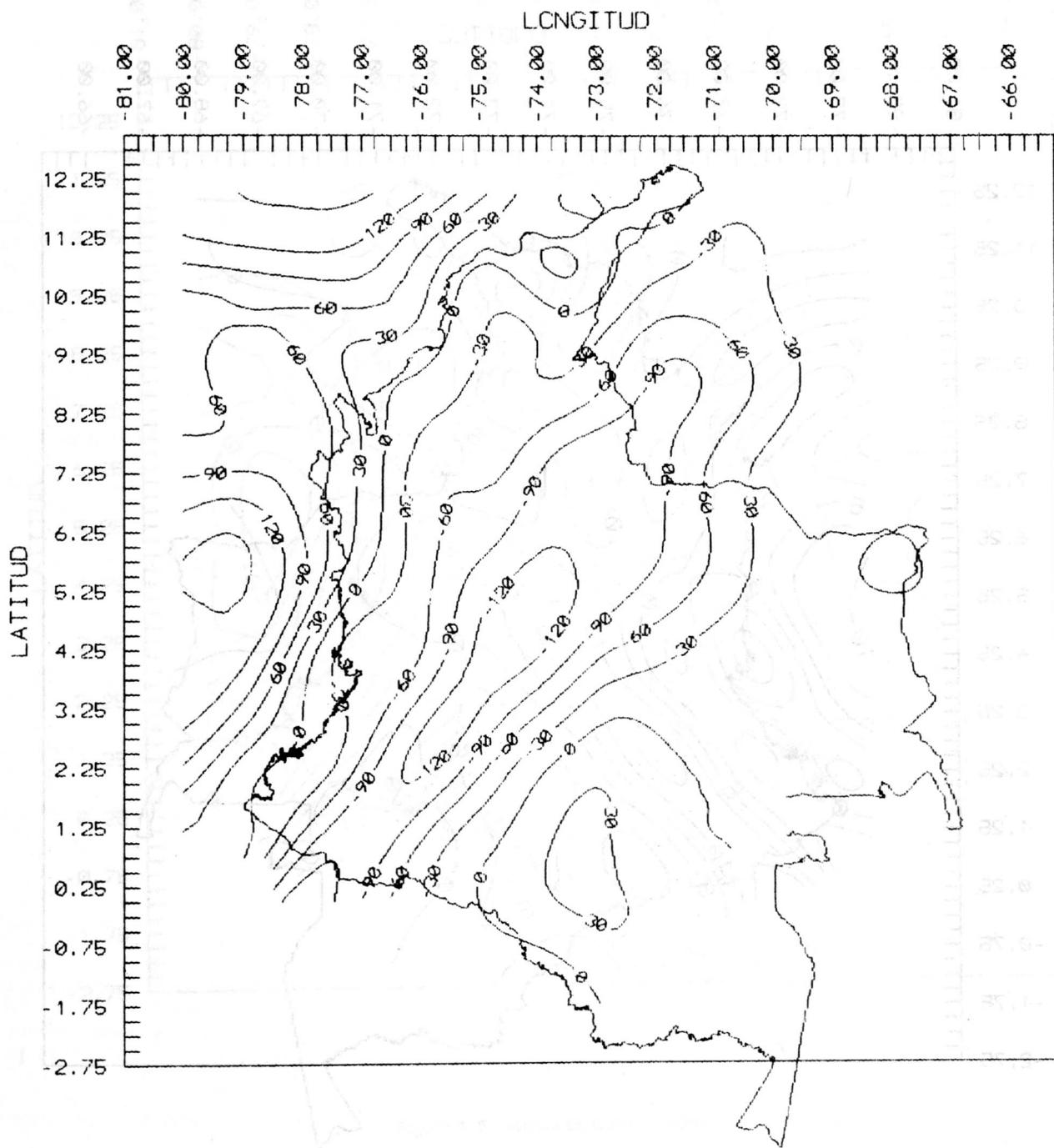


Figura 2. Anomalia de Bouguer Filtrada

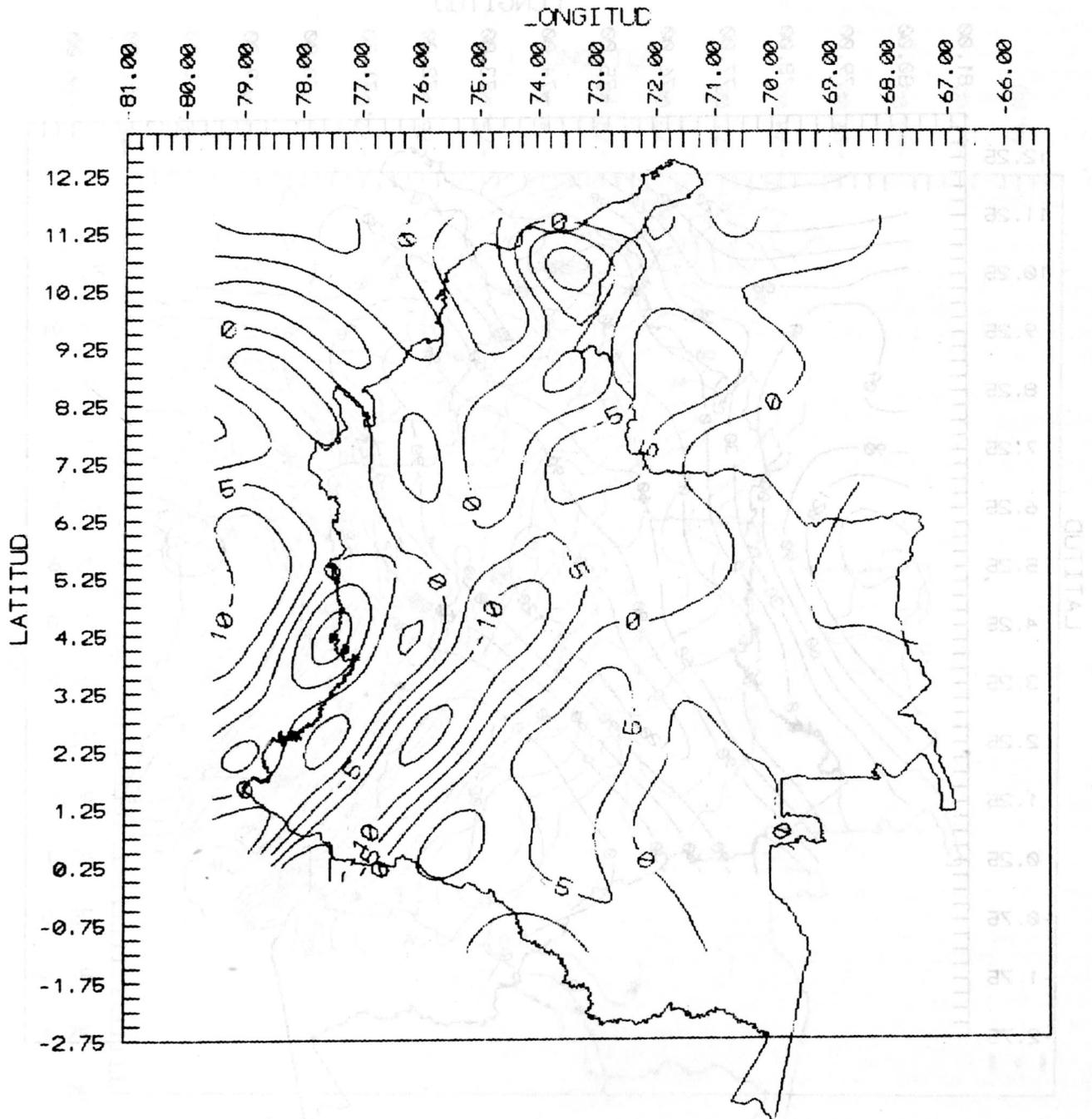


Figura 3. Anomalia Isostática

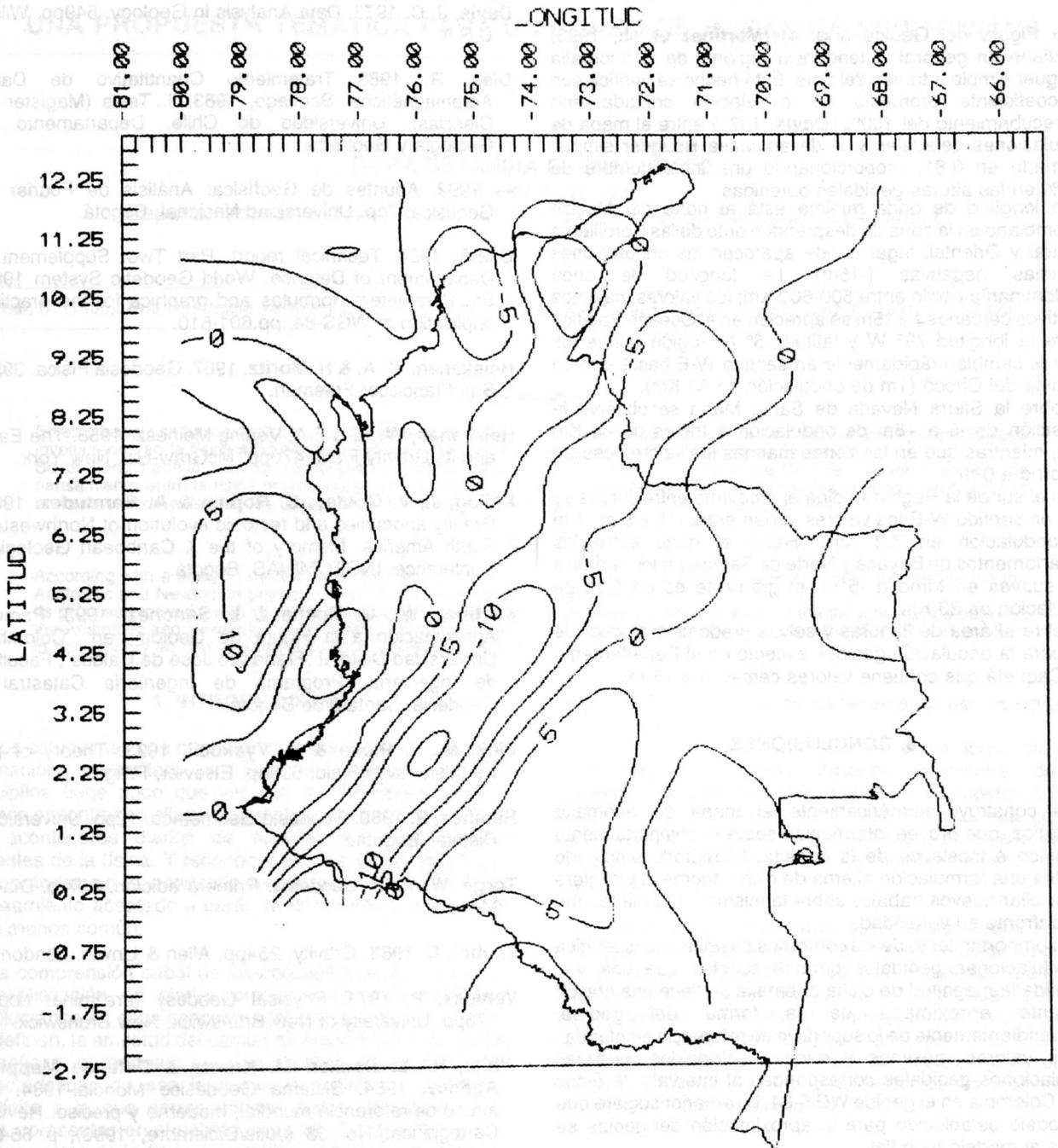


Figura 4. El Geoide en Colombia (m)

## 5. EL GEOIDE EN COLOMBIA

La Figura del Geoide (Fig. 4) (Martínez et al., 1993) mantiene en general la tendencia regional de la anomalía Bouguer simple a través del país. Este hecho se verifica con el coeficiente promedio de correlación cruzada con sobrecubrimiento del 100% (Davis, 1973) entre el mapa de ondulaciones geoidales y el de anomalía Bouguer simple, estimado en 0.81, proporcionando una incertidumbre de  $\pm 19\%$  en las alturas geoidales obtenidas.

La longitud de onda mínima está al norte del Macizo Colombiano en la zona de desprendimiento de las Cordilleras Central y Oriental, lugar donde aparecen las ondulaciones máximas negativas (-15m). La longitud de onda predominante oscila entre 500-600 Km; los valores máximos positivos cercanos a +15m se aprecian en el Océano Pacífico sobre la longitud  $79^\circ$  W y latitud  $5^\circ$  N, región donde los valores cambian rápidamente en sentido W-E hasta -5m en la costa del Chocó (1m de ondulación en 53 Km).

Sobre la Sierra Nevada de Santa Marta se observa la transición de -5 a +5m de ondulación a través de 68 Km W-E, mientras que en las zonas marinas los valores oscilan en torno a 0 m.

En el sur de la Región Andina el gradiente entre curvas es alto, en sentido W-E los valores varían entre -15 y 5 m (1 m de ondulación en 7.3 Km). Hacia el norte entre los Departamentos de Boyacá y Norte de Santander los cambios son suaves en torno a -5 m, el gradiente es de 1 m de ondulación en 23 Km.

Sobre el área de llanuras y selvas predomina el valor de 0m para la ondulación geoidal, excepto en el Departamento del Caquetá que contiene valores cercanos a +5 m.

## 6. CONCLUSIONES

Se construyó numéricamente el mapa de anomalía Isostática, que provee información sobre el comportamiento tectónico e isostático de la corteza. El método empleado plantea una formulación alterna de dicha anomalía y sugiere desarrollar nuevos trabajos sobre la misma en forma tal que se confronte su veracidad.

El comportamiento de los contornos de anomalía Isostática y ondulaciones geoidales permite concluir que una vez obtenida la magnitud de dicha anomalía se tiene una noción bastante aproximada de la forma del geoide, independientemente de la superficie de referencia empleada.

Los valores máximos y mínimos obtenidos para las ondulaciones geoidales corresponden al intervalo de éstos para Colombia en el geoide WGS-84. Lo anterior sugiere que el modelo establecido para la aproximación del geoide se ajusta al modelo mundial.

El modelo geoidal final permite observar el comportamiento del geoide WGS-84 (White et al., 1990) detalladamente sobre el área de estudio. Con respecto al geoide mundial, las curvas obtenidas presentan deformaciones frente a sus equivalentes, como consecuencia de la diferencia entre los volúmenes de información procesados y la escala del trabajo.

Los resultados obtenidos contribuyen a mejorar la precisión de las mediciones realizadas mediante el sistema GPS.

Siendo el datum WGS-84 el más reciente y por tanto el más avanzado, es necesario que a él se refieran los trabajos geodésicos y geofísicos en el país.

## BIBLIOGRAFIA

- Davis, J. C. 1973. Data Analysis in Geology. 549pp. Wiley, U.S.A.
- Díaz, R. 1983. Tratamiento Cuantitativo de Datos Aeromagnéticos. Santiago, 1983: il. Tesis (Magister en Ciencias). Universidad de Chile. Departamento de Geología y Geofísica.
- 1992. Apuntes de Geofísica: Análisis de Fourier en Geofísica. 7pp. Universidad Nacional, Bogotá.
- D.M.A. 1984. Technical report. Part Two. Supplement to Department of Defense. World Geodetic System 1984. En: Parameters, formulas and graphics for the practical application of WGS-84. pp.601-610.
- Heiskanen, W. A. & H. Moritz. 1967. Geodesia Física. 395p. San Francisco: Freeman.
- Heiskanen, W. A. & F.A. Vening Meinesz. 1958. The Earth and its Gravity Field. 470pp. McGraw-Hill, New York.
- Kellog, J., V. Godley, C. Ropain & A. Bermudez. 1983. Gravity anomalies and tectonic evolution of Northwestern South America. Memory of the X Caribbean Geological Conference. INGEOMINAS, Bogotá.
- Martinez, W., G. Rocha & L. Sanchez. 1993. Primera Aproximación a la Figura de Geoide en Colombia. Universidad Distrital "Francisco José de Caldas", Facultad de Ingeniería, Programa de Ingeniería Catastral y Geodesia. Santafé de Bogotá.
- Pick, M., J. Picha & V. Vyskocil. 1973. Theory of the Earth's Gravity Field. 538pp. Elsevier, Praga.
- Ramírez, R. 1980. Geodesia Geométrica. 12pp. Universidad Distrital. Bogotá.
- Torge, W. 1983. Geodesia. Primera edición. 297 p. Diana, Mexico.
- Tsuboi, C. 1983. Gravity. 254pp. Allen & Unwin, London.
- Vanicex, P. 1971. Physical Geodesy (preliminar copy). 176pp. University of New Brunswick, New Brunswick.
- White, H., L. Decker, M. Kumar & Defense Mapping Agency. 1984. Sistema Geodésico Mundial-1984. Un marco de referencia mundial, moderno y preciso. Revista Cartográfica. No. 58 (Julio/Diciembre, 1990); p 65-84. Instituto Panamericano de Geografía e Historia.
- Zakatov, P. S. 1981. Curso de Geodesia Superior. 633pp. Mir, Moscú.