

## ALGUNOS ALGORITMOS PARA FILTROS DIGITALES EN EL PROCESAMIENTO DE INFORMACION ELECTROMAGNETICA

**RAMIRO DIAZ C.**

Profesor Asociado, Departamento de Geociencias, Facultad de Ciencias – Universidad Nacional de Colombia

**Diaz, R.** (2000): Algunos algoritmos para filtros digitales en el procesamiento de información electromagnética. Geofis. Colomb. 4:37-42. ISSN 0121-2974. Santa Fe de Bogotá, D.C. - Colombia

### RESUMEN

El proceso de análisis de señales en prospección electromagnética, ha sido trabajado desde diferentes puntos de vista y varios autores han planteado diferentes metodologías. El objeto de éste artículo es plantear algunos algoritmos para filtros digitales basados en el análisis de Fourier. En el trabajo se muestran las facilidades del uso del dominio de la frecuencia en el análisis de señales en prospección electromagnética.

### ABSTRACT

The signal processing in electromagnetic prospecting have been worked from several points of view and several authors there is expounding several methodologies. The object of this paper is to expound some algorithms for digital filters based on the Analysis of Fourier. In the work the facilities of the use of the frequency domain in the signal processing are shown.

### 1. INTRODUCCION

El problema de la inducción electromagnética ha sido tratado por varios autores, **Maxwell** en 1892; **Price** en 1949 planteó por primera vez las ecuaciones básicas en prospección electromagnética; **Bullard & Parker** en 1970; **Bailey** en 1977; **Green & Weaver** en 1978; **Dawson & Weaver** en 1983; **Park** en 1985; **Robertson** en 1987; **Smith & West** en 1987; **Zhan & Oldenburg** en 1999 entre otros, han planteado modelos y metodologías para el análisis de la información concerniente al método de inducción electromagnética.

La implementación de filtros en el dominio de la frecuencia que algunos autores, de los antes citados, han planteado desde diversos puntos de vista, es el objetivo de éste documento, el cual se aborda en torno a la metodología del Análisis de Fourier.

El uso de filtros en el dominio de la frecuencia, permite manejar fácilmente la información y plantear soluciones al problema de inversión. Con éste objetivo se retoman algunos algoritmos y se plantean otros, que pueden ser

utilizados según las necesidades en el proceso de análisis de señales en prospección electromagnética.

### 2. FUNDAMENTOS FISICOS

En un estrato delgado asimilable a una placa de espesor  $d(x,y)$ , conductividad  $\sigma(x,y)$  y resistencia superficial  $R(x,y)$  (ver Figura), en presencia de un campo magnético variable en el tiempo, se induce una corriente eléctrica superficial con densidad  $\vec{K}(x,y)$  y un campo magnético secundario.

**Smith & West** (1987) definen conductancia ( $\delta$ ) como:  $\delta = \sigma d$  y resistencia superficial, como:

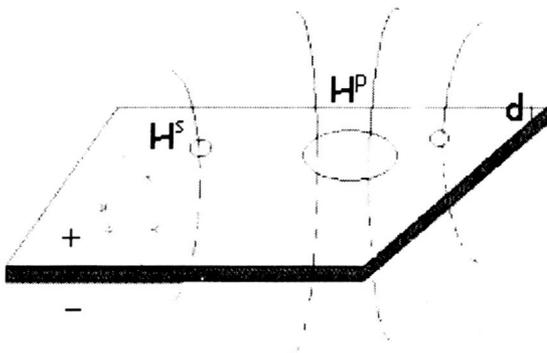
$$R(x,y) = \frac{1}{\sigma(x,y)d(x,y)} \quad [1]$$

La densidad de corriente superficial con la componente vertical del campo eléctrico  $\vec{E}_t$ , según la Ley de Ohm, se pueden relacionar de la siguiente manera:

$$\vec{K}(x, y) = \vec{J} d = \frac{\vec{E}_t}{R(x, y)} \quad [2]$$

La intensidad del campo magnético total fuera del cuerpo considerado, se puede expresar en función del campo primario y el campo secundario asociado al campo inducido en el medio.

$$\vec{H} = \vec{H}^P + \vec{H}^S \quad [3]$$



Condiciones de frontera:

a) Existe continuidad en el campo magnético primario:

$$\vec{H}_+^P - \vec{H}_-^P = 0 \quad [4]$$

b) La componente normal del campo secundario es continua:

$$\hat{n} \cdot (\vec{H}_+^S - \vec{H}_-^S) = 0 \quad [5]$$

c) La componente tangencial es igual en magnitud, pero de signo contrario en las caras del estrato:

$$\hat{n} \times (\vec{H}_+^S + \vec{H}_-^S) = 0 \quad [6]$$

$\hat{n}$  es un vector unitario normal a la superficie de la placa.

$\vec{H}_+^S$ : Campo magnético secundario sobre la placa.

$\vec{H}_-^S$ : Campo magnético secundario bajo la placa.

Asumiendo que no hay efectos magnéticos producidos por corrientes de desplazamiento y que la permeabilidad magnética es constante, se plantean las leyes de Ampere, Faraday y Gauss de la siguiente forma:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} \quad [7]$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad [8]$$

$$\nabla \cdot \vec{H} = 0 \quad [9]$$

El campo magnético variable en el tiempo y sus componentes, satisfacen la ecuación de Laplace y la Ley de Gauss fuera de la placa considerada, lo cual hace posible que el campo magnético y su transformada de Fourier se expresen mediante las ecuaciones [10] (Bath, 1974).

$$H(x, y, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(k_x, k_y, \omega) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} + \omega t)} dk_x dk_y d\omega$$

$$h(k_x, k_y, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} H(x, y, t) e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r} + \omega t)} dx dy dt \quad [10]$$

El análisis de señales en Geofísica se realiza en forma discreta, por lo tanto la transformada directa e inversa del campo magnético se presenta en términos de las siguientes series armónicas,

$$H_{jkt} = \frac{1}{MNT} \sum_m \sum_n \sum_{\omega} h_{mn\omega} e^{zk_{mn}} e^{i(\vec{k}_{mn} \cdot \vec{r} + \omega t)}$$

$$h_{mn\omega} = \sum_j \sum_k \sum_t H_{jkt} e^{zk_{mn}} e^{-i(\vec{k}_{mn} \cdot \vec{r} + \omega t)} \quad [11]$$

En donde:

$H_{jkt}$ : representa la función espacio-temporal campo magnético.

$h_{mn\omega}$ : representa los coeficientes de Fourier del campo magnético.

$\vec{r} = x \hat{e}_x + y \hat{e}_y$ : vector de posición.

$\vec{k}_{mn} = k_m \hat{e}_x + k_n \hat{e}_y$ : vector de onda .

$\vec{k}_{mn} \cdot \vec{r} = k_m x + k_n y$

$$k_m = \frac{2\pi}{M} m; \quad k_n = \frac{2\pi}{N} n$$

$k_{mn}$ : magnitud del vector de onda.

$z$ : determina el plano de observación.

$$0 \leq m, j \leq M - 1$$

$$0 \leq m, k \leq N - 1$$

$M$ : número de observaciones en la dirección "x".

$N$ : número de observaciones en la dirección "y".

$T$ : Periodo en el tiempo.

$\omega$ : Frecuencia angular de señal.

$t$ : Variable en el dominio tiempo.

La expresión [12] representa la comunicación entre el dominio espacio-temporal y dominio de la frecuencia usando la transformada directa y la transformada inversa de Fourier.

$$h_{mn\omega} \longleftrightarrow H_{jkt} \quad [12]$$

Con base en estos planteamientos físico-matemáticos, se desarrollan algunos algoritmos, que permiten operar fácilmente en los dos dominios, simplificando procesos de cálculo e implementando criterios de interpretación.

### 3. DERIVADAS DEL CAMPO MAGNETICO

A partir de la definición del campo magnético  $H_{jkt}$  presentada en la ecuación [11], se calculan sus derivadas horizontales, su derivada vertical y su derivada con respecto al tiempo. Al realizar cualquiera de éstos procesos, la serie armónica conserva su estructura; solamente se presentan cambios en el término que corresponde a los coeficientes de Fourier. El algoritmo empleado para realizar el cálculo en cada uno de los dos dominios se muestra en los siguientes esquemas. Los subíndices  $m, n, j, k \dots$ , que controlan el proceso de cálculo, corresponden a los planteados inicialmente en la ecuación [11].

Derivada horizontal en la dirección del eje "X" (Bath, 1974):

$$\frac{\partial H_{jkt}}{\partial x} \longleftrightarrow ik_m h_{mn\omega} \quad [13]$$

Derivada horizontal en la dirección del eje "Y":

$$\frac{\partial H_{jkt}}{\partial y} \longleftrightarrow ik_n h_{mn\omega} \quad [14]$$

Derivada vertical en la dirección del eje "Z":

$$\frac{\partial H_{jkt}}{\partial z} \longleftrightarrow k_{mn} h_{mn\omega} \quad [15]$$

Derivada con respecto a la variable "t":

$$\frac{\partial H_{jkt}}{\partial t} \longleftrightarrow i\omega h_{mn\omega} \quad [16]$$

Estos algoritmos, son útiles tanto en procesos particulares como en conjunto para obtener otros resultados, ajustándose siempre a las propiedades de la transformada de Fourier.

### 4. COMPONENTES DEL CAMPO MAGNETICO

Las derivadas verticales de las componentes horizontales del campo magnético se pueden expresar en función de las derivadas horizontales de su componente vertical.

En éste desarrollo se emplean las componentes del campo magnético secundario, pero igualmente es válido para el campo magnético primario y para el campo magnético total.

La derivada vertical de la componente horizontal  $H_x^S$  del campo magnético, es igual a la derivada en la dirección "x" de la componente vertical (ver Apéndice A).

$$\frac{\partial H_x^S}{\partial z} = \frac{\partial H_z^S}{\partial x} \quad [17]$$

En el dominio de la frecuencia la ecuación [17] se expresa:

$$k_{mn} h_x^s mn\omega = i k_m h_z^s mn\omega \quad [18]$$

$$h_x^s mn\omega = i \frac{k_m}{k_{mn}} h_z^s mn\omega \quad [19]$$

lo cual permite esquematizar el proceso de la siguiente forma:

$$H_x^s \longleftrightarrow i \frac{k_m}{k_{mn}} h_z^s mn\omega \quad [20]$$

La derivada vertical de la componente horizontal  $H_y^s$  del campo magnético, es igual a la derivada en la dirección "y" de la componente vertical  $H_z^s$ , (ver Apéndice A).

$$\frac{\partial H_y^s}{\partial z} = \frac{\partial H_z^s}{\partial y} \quad [21]$$

y en el dominio de la frecuencia,

$$k_{mn} H_y^s mn\omega = i k_n H_z^s mn\omega \quad [22]$$

$$h_y^s mn\omega = i \frac{k_n}{k_{mn}} h_z^s mn\omega \quad [23]$$

$$H_y^s \longleftrightarrow i \frac{k_n}{k_{mn}} h_z^s mn\omega \quad [24]$$

Smith & West (1987), plantean un filtro semejante al anterior a partir de la Transformada de Hilbert.

## 5. PROBLEMA INVERSO

La metodología que permite determinar los parámetros resistividad y espesor, considera la componente normal del campo magnético en el espacio libre fuera de la placa y la componente normal de la Ley de Faraday.

$$H_z = H_z^p + H_z^s \quad [25]$$

$$\hat{n} \cdot (\nabla \times \vec{E}) = -\mu \frac{\partial (\hat{n} \cdot \vec{H})}{\partial t} \quad [26]$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\mu \frac{\partial H_z}{\partial t} \quad [27]$$

Usando la ecuación [2] y aplicando la condición de

frontera [5] a la ecuación [7], se encuentran los siguientes valores para las componentes horizontales del campo eléctrico y de la densidad de corriente superficial. (Smith & West, 1987):

$$E_x = RK_x \quad E_y = RK_y \quad [28]$$

$$K_x = -2H_y^s \quad K_y = 2H_x^s$$

Al reemplazar estos valores en la componente normal obtenida a partir de la ley de Faraday [27], se obtiene una ecuación diferencial que representa el proceso de inducción en la lámina, en términos de la densidad superficial y sus derivadas horizontales, las componentes y derivadas del campo secundario, la derivada vertical y la derivada con respecto al tiempo de la componente vertical del campo magnético. (Price, 1949). (Smith & West, 1987).

$$-R \frac{\partial H_z^s}{\partial z} + \frac{\partial R}{\partial x} H_x^s + \frac{\partial R}{\partial y} H_y^s = -\frac{\mu}{2} \frac{\partial H_z}{\partial t} \quad [29]$$

Si se considera un medio homogéneo e isotrópico, la ecuación anterior se reduce considerablemente:

$$R \frac{\partial H_z^s}{\partial z} = \frac{\mu}{2} \frac{\partial H_z}{\partial t} \quad [30]$$

Esta ecuación se puede llevar al dominio de la frecuencia, aplicando la transformada de Fourier a cada uno de sus términos.

$$R k_{mn} h_z^s mn\omega = \frac{\mu}{2} i \omega \left[ h_z^p mn\omega - h_z^s mn\omega \right] \quad [31]$$

$$\frac{h_z^s mn\omega}{h_z^p mn\omega} = \frac{i \sigma d \mu \omega}{(2k_{mn} + i \sigma d \mu \omega)} \quad [32]$$

Considerando la ecuación [31] y la ecuación [25] en el dominio de la frecuencia:

$h_z mn\omega = h_z^p mn\omega + h_z^s mn\omega$ , se encuentran los coeficientes de Fourier de la componente vertical del campo magnético total en término de los parámetros  $\sigma d$  y los coeficientes de Fourier de la componente vertical del campo primario:

$$h_z mn\omega = h_z^p mn\omega + h_z^s mn\omega \quad [33]$$

$$\frac{h_z}{h_z^p} = \frac{2(k_{mn} + i\sigma d\mu\omega)}{2k_{mn} + i\sigma d\mu\omega} \quad [34]$$

En términos generales, es posible solucionar el problema inverso utilizando el método de mínimos cuadrados; tomando como modelo el planteado en la ecuación [32] o en la [34], dependiendo de los datos considerados,

$$\frac{h_z}{h_z^p} \quad \text{o} \quad \frac{h_z^s}{h_z^p}$$

El ajuste se realiza en el dominio de la frecuencia, con el fin de encontrar los mejores valores de  $\sigma d$ , de tal manera que la suma de las desviaciones cuadráticas entre los datos observados y los calculados por el modelo sean mínima.

Con base en el muestreo de campo electromagnético y el modelo elegido, se obtiene un sistema de ecuaciones simultaneas cuya solución se obtiene utilizando el siguiente proceso iterativo:

$$M_{i+1} = J^{-g}(D - m(M_i)) + M_i \quad [35]$$

en donde:

$J^{-g}$ : Matriz inversa generalizada del Jacobiano del sistema.

$D$ : Matriz de valores observados, en éste caso los coeficientes de Fourier.

$M_i$ : Matriz que contiene las primeras aproximaciones de los parámetros.

$m(M_i)$ : Modelo evaluado con los parámetros  $M_i$ .

$M_{i+1}$ : Matriz que contiene nuevos parámetros evaluados a partir de los parámetros  $M_i$ , de los datos  $D$  y el Jacobiano del sistema evaluado también con los parámetros  $M_i$ .

El sistema computacional entrega los parámetros, encontradolos a partir de los efectos magnéticos producidos en el proceso de inducción.

Si se expresa la ecuación [34] en el dominio espacio-temporal, el problema es ahora solucionar la ecuación diferencial:

$$\frac{\partial(H_z - H_z^p)}{\partial z} + \frac{i\sigma d\mu\omega}{2}(H_z - 2H_z^p) = 0 \quad [36]$$

La solución de ésta ecuación, no es tan inmediata como el planteado anteriormente.

## 6. PROGRAMAS Y PROCESO DE CALCULO

El proceso de cálculo se ha implementado en Matlab 5.2, pero es posible usar otras formas de proceso y lenguajes, que también presentan muy buenas herramientas y facilidades como Fortran 99, C y C++. Entre las herramientas útiles se encuentra la subrutina HARM, que permite realizar Análisis de Fourier en tres dimensiones, está disponible y de uso público en Internet.

## CONCLUSIONES

El análisis de Fourier es una herramienta muy eficiente en el proceso de señales discretas en prospección electromagnética, ya que permite plantear en forma sencilla filtros y procesos.

Usando como información los coeficientes de Fourier (Dominio de la frecuencia) de las funciones observadas en el dominio espacio-temporal, se puede plantear y dar solución al problema inverso en electromagnetismo.

## REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

- Bailey, R. C.** (1977): Electromagnetic Induction Over the Edge of a Perfectly Conducting Ocean: The H-polarization case: *Geophys. J. Roy. Astr. Soc.* **48**:385-392.
- Bath, M.** (1974): *Spectral Analysis in Geophysics.* Elsevier Scientific Publishing Company. Amsterdam - Oxford - New York.
- Bullard, E. C., & R.L. Parker.** (1970): Electromagnetic Induction in the Oceans, in Maxwell, A. E., Ed *The Sea*, 4, pt 1: Wiley - Interscience, 695-730.
- Dawson, T. W., & J.T. Weaver.** (1979): Three Dimensional Induction in a Nonuniform Thin Sheet at the Surface of a Uniformly Conducting Earth: *Geophys. J. Roy. Astr. Soc.* **73**:83-107.
- Green, V. R., & J.T. Weaver.** (1978): Two-Dimensional Induction in a Thin Sheet of Variable Integrated Conductivity at the Surface of a Uniformly Conducting Earth: *Geophys. J. Roy. Astr. Soc.* **55**:721-736.
- Maxwell, J.C.** (1892): *A Treatise on Electricity and Magnetism* (3rd ed): Clarendon Press.
- Park, S. K.** (1985): Distortion of Magnetotelluric Sounding Curves by Three Dimensional Structures: *Geophysics*, **50**: 785-797.

Price, A. T. (1949): The Induction of Electric Currents in non-Uniform Thin Sheets and Shells: *Quart. J. Mech. and Appl. Math.*, III pt 3, 283-310.

Robertson, R. C., (1987): The electromagnetic response of thin sheets buried in a uniformly conducting half-space: *Geophysics* 52:108-117.

Smith, R. S. & G.F. West. (1987): Electromagnetic induction in an inhomogeneous conductive thin sheet: *Geophysics* . 52 (12):1677-1688.

Zhang, Z. & W. Oldenburg. (1999): Simultaneous reconstruction of 1-D susceptibility and conductivity from electromagnetic data. *Geophysics* 64 (1):33-47.

## APENDICE A

### RELACION ENTRE COMPONENTES DEL CAMPO MAGNETICO

El campo magnético está asociado a una función escalar de potencial A, tal que:

$$\vec{H} = -\nabla A \quad [1a]$$

La magnitud del vector  $\vec{H}$ , se expresa como la derivada en la dirección del campo magnético total de la función de potencia.

$$H = -\frac{\partial}{\partial l} (A) \quad [2a]$$

$$\nabla(H) = \frac{\partial \vec{H}}{\partial l} \quad [3a]$$

Analizando las componentes de la ecuación anterior en forma individual se tiene:

$$\frac{\partial H}{\partial z} = \frac{\partial \vec{H}_z}{\partial l} \quad [4a]$$

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial \vec{H}_x}{\partial l} \quad [5a]$$

$$\frac{\partial H}{\partial y} = \frac{\partial \vec{H}_y}{\partial l} \quad [6a]$$

en donde  $\hat{l} = \alpha \hat{e}_x + \beta \hat{e}_y + \gamma \hat{e}_z$  es un vector unitario en la dirección y sentido del campo magnético total.

$$\frac{\partial}{\partial l} ( ) = \hat{l} \cdot \nabla ( ) = \left[ \alpha \frac{\partial}{\partial x} ( ) + \beta \frac{\partial}{\partial y} ( ) + \gamma \frac{\partial}{\partial z} ( ) \right]$$

El operador  $\frac{\partial}{\partial l} ( )$  en el dominio de la frecuencia se expresa como:

$$q_{mn} = \gamma k_{mn} + i(\alpha k_m + \beta k_n)$$

$$\frac{\partial}{\partial l} ( ) \longleftrightarrow q_{mn}$$

En el dominio de la frecuencia las ecuaciones [4a], [5a], [6a] se expresan, como:

$$k_{mn} H_{mn\omega} = q_{mn} H_z mn\omega \quad [7a]$$

$$ik_m H_{mn\omega} = q_{mn} H_x mn\omega \quad [8a]$$

$$ik_n H_{mn\omega} = q_{mn} H_y mn\omega \quad [9a]$$

De las ecuaciones [4a] a [9a] se establecen las siguientes relaciones:

$$k_{mn} h_x mn\omega = ik_m h_z mn\omega$$

equivalente a:

$$\frac{\partial H_x^s}{\partial z} = \frac{\partial H_z^s}{\partial x} \text{ en el dominio espacio-tiempo.}$$

Y la ecuación:

$$k_{mn} h_y mn\omega = ik_n h_z mn\omega$$

equivalente a:

$$\frac{\partial H_y^s}{\partial z} = \frac{\partial H_z^s}{\partial y}$$