Revista Colombiana de Estadística
Vol. **22** No. 2 (1999) *págs 5 - 16*

Una revisión de medidas multivariadas de asimetría y Kurtosis para pruebas de multinormalidad

SERGIO YÁÑEZ CANAL, MARIO CÉSAR JARAMILLO ELORZA Y JUAN CARLOS CORREA MORALES *

Resumen.
El trabajo germinal de Mardia(1970) da definiciones multivariadas de asimetría y kurtosis que son usadas en pruebas de multinormalidad, y han dado origen a gran variedad de extensiones y formalizaciones. Se hace una revisión de dichos conceptos y de las comparaciones entre ellos en cuanto a su potencia. Se muestra como los test formales de bondad de ajuste basados en el principio Score de Rao y la noción de test suaves de Neyman no son mejores que los basados en estadísticos que generalizan las nociones de asimetría y kurtosis.

Palabras claves: Asimetría, kurtosis, multinormalidad, afín invariantes, dependientes de coordenadas, principio Score de Rao, test suaves de Neyman, estudios de potencia.

1. Introducción

El supuesto de multinormalidad se requiere en la mayoría de los métodos multivariados clásicos. Algunos ejemplos son: el análisis de varianza multivariado, el análisis de discriminante, el análisis de correlación canónica, y el análisis de factor máximo-verosímil.

Hay muchas técnicas para detectar multinormalidad; ver, por ejemplo, las revisiones realizadas por Gnanadesikan (1977), Mardia (1980), Koziol (1986),

*Profesor del Posgrado en Estadística, Universidad Nacional de Colombia-Sede Medellín, Medellín, Colombia.
E-mail: syanez@perseus.unalmed.edu.co
Investigación patrocinada por Colciencias(Proyecto: 1118-05-113-94) y el CINDEC (Proyecto 022).

Romeu y Ozturk (1993). Esto ilustra la gran variedad de posibilidades de alejamiento de la multinormalidad para datos multivariados, como señala Gnanadesikan (1977) y enfatiza la necesidad de distintas técnicas para detectarlas.

Dentro de las pruebas de multinormalidad, las basadas en las medidas de asimetría ($b_{1,p}$) y kurtosis ($b_{2,p}$) desarrolladas por Mardia (1970) han sido muy utilizadas por su facilidad y propiedades asintóticas, así como por la indicación de que tipo de alejamiento de la multinormalidad se presenta. Revisaremos las distintas pruebas que parten de estos conceptos iniciales de Mardia y las compararemos por medio de estudios de potencia, siguiendo los lineamientos del trabajo de Horswell y Looney (1993a), para mostrar sus fortalezas y debilidades.

La sección 2 contiene una descripción de los estadísticos revisados. En la sección 3, se hace la comparación, utilizando estudios previos de potencia y una complementación realizada por los autores. En la sección 4 se dan algunas recomendaciones prácticas y se resumen las principales conclusiones del estudio comparativo.

2. Definiciones de coeficientes de asimetría y kurtosis multivariadas y estadísticos de prueba basados en ellas.

2.1. Definiciones y estadísticos de Mardia.

Mardia (1970) define los coeficientes de asimetría y kurtosis poblacionales para una distribución p-variada con vector de medias μ y matriz de covarianzas Σ ($\mathbf{x} \sim (\mu, \Sigma)$), respectivamente

$$\beta_{1,p} = E\left[(\mathbf{x}-\mu)^T \Sigma^{-1} (\mathbf{y}-\mu)\right]^3 \quad y \quad \beta_{2,p} = E\left[(\mathbf{x}-\mu)^T \Sigma^{-1} (\mathbf{x}-\mu)\right]^2$$

Donde $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ son independientes e identicamente distribuídos.

Sean $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ observaciones del vector aleatorio $\mathbf{x}$, entonces los correspondientes coeficientes de asimetría y kurtosis muestrales son:

$$b_{1,p} = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left\{(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})^T \mathbf{S}^{-1} (\mathbf{x}_j - \bar{\mathbf{x}})\right\}^3,$$

$$b_{2,p} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left\{(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})^T \mathbf{S}^{-1} (\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})\right\}^2$$

Donde $\bar{\mathbf{x}}$ es el vector de medias muestrales y $\mathbf{S}$ es la matriz de covarianzas muestrales.

Para la distribución normal multivariada, $\beta_{1,p} = 0$ y $\beta_{2,p} = p(p+2)$.

Mardia (1970, 1974, 1975) derivó las distribuciones asintóticas bajo la hipótesis nula de normalidad multivariada:

$$\frac{n}{6} b_{1,p} \sim \chi^2_{\left(\frac{p(p+1)(p+2)}{6}\right)} \quad y \quad b_{2,p} \sim N\left(p(p+2), \frac{8p(p+2)}{n}\right)$$

Como $b_{1,p}$ y $b_{2,p}$ son afín invariantes es posible estimar su distribución nula empíricamente.

Los resultados de potencia aquí reportados, se basan en valores críticos empíricos calculados usando 10000 muestras multinormales.

2.1.1. Estadísticos de Small.

Small (1980) propone una prueba de multinormalidad utilizando estadísticos basados en medidas de asimetría y kurtosis marginales. Para una distribución p-variada, Small propone medir la asimetría multivariada así:

$$Q_1 = \mathbf{y}_1^T \mathbf{U}_1^{-1} \mathbf{y}_1$$

Donde $\mathbf{y}_1$ es un vector $(p \times 1)$ de coeficientes de asimetría marginales después de aplicarle a cada uno la transformación S_U de Johnson, y $\mathbf{U}_1$ es un estimativo de $cov\,(\mathbf{y}_1)$.

Para medir kurtosis multivariada propone:

$$Q_2 = \mathbf{y}_2^T \mathbf{U}_2^{-1} \mathbf{y}_2$$

Donde $\mathbf{y}_2$ es un vector $(p \times 1)$ de coeficientes de asimetría marginales después de aplicarle a cada uno la transformación S_U de Johnson, y $\mathbf{U}_2$ es un estimativo de $cov\,(\mathbf{y}_2)$.

Bajo multinormalidad, las distribuciones asintóticas de Q_1 y Q_2 son ambas $\chi^2_{(p)}$.

Small propone además una prueba conjunta basada en:

$$Q_3 = Q_1 + Q_2$$

Que tiene distribución asintótica bajo la hipótesis nula:

$$Q_3 \sim \chi^2_{(2p)}$$

Los estadísticos Q_1, Q_2 y Q_3 son dependientes de las coordenadas. Esto es, no son afín invariantes. Luego para los estudios de potencia se usará la distribución asintótica para calcular los valores críticos.

2.1.2. Estadístico conjunto de Mardia y Foster.

Mardia y Foster (1983) comparan varias combinaciones de $b_{1,p}$ y $b_{2,p}$. Se considerará uno de los de mejor comportamiento como prueba conjunta (omnibus) de asimetría y kurtosis:

$$S_w^2 = W^2\,(b_{1,P}) + W^2\,(b_{2,P})$$

Donde $W(b_{1,p})$ y $W(b_{2,p})$ son las transformaciones de Wilson-Hilferty de $b_{1,p}$ y $b_{2,p}$.

La distribución asintótica bajo la hipótesis nula de multinormalidad es:

$$S_w^2 \sim \chi^2_{(2)}.$$

Este estadístico es afín invariante.

2.1.3. Estadísticos de Srivastava.

Srivastava (1984) define los coeficientes de asimetría y kurtosis, vía las componentes principales. Sea $\mathbf{x}$ un vector aleatorio p-dimensional, con vector de medias μ y matriz de covarianzas Σ. Sea $\Gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_p)$ una matriz ortogonal tal que $\Gamma^T\Sigma\Gamma = \mathbf{D}_\lambda$, donde $\mathbf{D}_\lambda = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$ y $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ son las raíces características de Σ.

Sea $y_1 = \gamma_1^T\mathbf{x}, \ldots, y_p = \gamma_p^T\mathbf{x}$, $\theta_1 = \gamma_1^T\mu, \ldots, \theta_p = \gamma_p^T\mu$, se definen los coeficientes de asimetría y kurtosis multivariados así:

$$\beta_{1p}^2 = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p}\left\{\frac{E[y_i-\theta_i]^3}{\lambda_i^{\frac{3}{2}}}\right\}^2 \quad y \quad \beta_{2p} = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p}\frac{E[y_i-\theta_i]^4}{\lambda_i^2}$$

Para una población normal multivariada $\beta_{1p}^2 = 0$ y $\beta_{2p} = 3$.

Sea $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ observaciones del vector aleatorio $\mathbf{x}$. Sea $\mathbf{H} = (\mathbf{h}_1, \ldots, \mathbf{h}_p)$ una matriz ortogonal tal que $\mathbf{H}^T\mathbf{S}\mathbf{H} = \mathbf{D}_w$ donde $\mathbf{D}_w = diag(w_1, \ldots, w_P)$, y $w_1, \ldots, w_P$ son las raíces características de $\mathbf{S}$.

Sean $y_{ij} = \mathbf{h}_i^T\mathbf{x}_j \quad i = 1, 2, \ldots, p \quad j = 1, 2, \ldots n \quad y \quad \bar{y}_i = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} y_{ij}$

Se definen los coeficientes de asimetría y kurtosis multivariados muestrales así:

$$b_{1P}^2 = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p}\left\{w_i^{-\frac{3}{2}}\sum_{j=1}^{n}\frac{(y_{ij}-\bar{y}_i)^3}{n}\right\}^2, \quad b_{2P} = \frac{1}{np}\sum_{i=1}^{P}w_i^2\sum_{j=1}^{n}(y_{ij}-\bar{y}_i)^4$$

Donde $w_i = \mathbf{h}_i^T\mathbf{S}\mathbf{h}_i = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(y_{ij}-\bar{y}_i)^2 \quad i = 1, 2, \ldots, p.$

Las distribuciones asintóticas bajo la hipótesis nula son:

$$\frac{np}{6}b_{1p}^2 \sim \chi_p^2 \quad ; \quad \left(\frac{np}{24}\right)^{\frac{1}{2}}(b_{2p}-3) \sim N(0,1)$$

Los estadísticos b_{1p}^2 y b_{2p} son dependientes de coordenadas.

2.2. Definiciones y estadísticos de Bera y John.

Bera y John (1983) parten de la familia de distribuciones de Pearson y utilizando el principio Score de Rao encuentra los estadísticos C_1 (asimetría) y C_2(kurtosis):

$$C_1 = n\sum_{i=1}^{n} \frac{T_i^2}{6}, \quad C_2 = \left\{\sum_{i=1}^{n} \frac{(T_{ii}-3)^2}{24} + \sum_{i<j} \frac{(T_{ij}-1)^2}{4}\right\}.$$

Obtienen, también, un estadístico conjunto C_3 :

$$C_3 = \left\{\sum_{i=1}^{n} \frac{T_i^2}{6} + \sum_{i=1}^{n} \frac{(T_{ii}-3)^2}{24}\right\}$$

Donde:

$$T_i = \sum_{t=1}^{n} \frac{y_{it}^3}{n}, \quad T_{ii} = \sum_{t=1}^{n} \frac{y_{it}^4}{n}, \quad T_{ij} = \sum_{t=1}^{n} \frac{y_{it}^2 y_{jt}^2}{n}, \quad \mathbf{y} = \mathbf{S}^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{x}-\bar{\mathbf{x}})$$

Las distribuciones asintóticas bajo la hipótesis nula son:

$$C_1 \sim \chi^2_{(p)}, \quad C_2 \sim \chi^2_{\frac{p(p+1)}{2}}, \quad C_3 \sim \chi^2_{(2p)}$$

Las pruebas basadas en estos estadísticos son localmente más potentes para alternativas dentro de la familia de Pearson. Esos estadísticos son afín invariantes.

2.3. Definiciones y estadísticos de Koziol.

Koziol (1986) basado en la noción de tests suaves de Neyman (Neyman's smooth tests), propone una prueba de bondad de ajuste para normalidad univariada con parámetros desconocidos.

Sean $x_1, x_2, \ldots, x_n$ una muestra aleatoria de una $N(\mu, \sigma^2)$. Sea $y_i = \frac{x_i - \bar{x}}{s}$, $i = 1, 2 \ldots, n$, la prueba de hipótesis es:

$$H_0 : f(y) = \phi(y)$$

$$vs$$

$$H_a : f(y) = \phi(y)\left\{1 + 1/\sqrt{6}\theta_3 H_3(y) + 1/\sqrt{24}\theta_4 H_4(y)\right\}$$

Donde $f(.)$ denota la f.d.p. de y y $\phi(.)$ es la f.d.p. de una distribución normal estándar; $H_j(.)$ es el j-esimo polinomio de Hermite; θ_3 y θ_4 son parámetros

diferentes de cero escogidos de forma que f sea positiva. Un test suave de normalidad consiste en rechazar H_0 para valores grandes de $\widehat{U}3^2 + \widehat{U}_4^2$, donde:
$\widehat{U}_3^2 = n^{-\frac{1}{2}} \sum_{i=1}^n 1/\sqrt{6}H_3(y_i)$ (coeficiente de asimetría)
$\widehat{U}_4^2 = n^{-\frac{1}{2}} \sum_{i=1}^n 1/\sqrt{24}H_4(y_i)$ (coeficiente de kurtosis)

Para la extensión multivariada de la prueba , sea $\mathbf{y}_i = \mathbf{S}^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}}) \quad i = 1, 2, 3, \ldots, n$. La hipótesis alternativa será el conjunto de productos de los polinomios de Hermite univariados(marginales), escogidos de tal manera que el grado del producto sea 3 (una alternativa de asimetría) ó 4 (una alternativa de kurtosis). Obsérvese que hay $\binom{p+2}{3}$ polinomios de grado 3 y $\binom{p+3}{4}$ polinomios de grado 4. (p es la dimensión de $\mathbf{x}_i$). Así, siguiendo el modelo univariado, de manera análoga a Small (1980), obtiene las medidas de asimetría y kurtosis multivariadas:

$\widehat{U}_{3,P}^2 =$ suma de las $\binom{p+2}{3}$ componentes de asimetría

$\widehat{U}_{4,P}^2 =$suma de las $\binom{p+3}{4}$ componentes de kurtosis

Bajo la hipótesis nula $\widehat{U}_{3,P}^2$ y $\widehat{U}_{4,P}^2$ son asintóticamente independientes, y distribuídos como v.a. ji-cuadradas con $\binom{p+2}{3}$ y $\binom{p+3}{4}$ grados de libertad respectivamente.

Koziol (1989, 1993) relaciona estos estadísticos con los de Mardia (1970) y obtiene:
$\widehat{U}_{3,p}^2 = \frac{n}{6} b_{1,p}$ (i.e. los dos coeficientes de asimetría son equivalentes)
$\widehat{U}_{4,p}^2 = \frac{n}{24}\widetilde{b}_{2,p} - \frac{n}{4}b_{2,p} + \frac{n}{8}p(p+2)$ *donde* $\widetilde{b}_{2,p} = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(y_i^T y_j\right)^4$

Koziol (1989) propone a $\widetilde{b}_{2,p}$ como una medida alternativa de kurtosis, análoga al $b_{2,p}$ de Mardia, pero su distribución límite es una ji-cuadrado no central, que es menos atractiva para fines inferenciales que las distribuciones de $b_{2,p}$ y $\widehat{U}_{4,p}^2$.

2.4. Estadísticos obtenidos por Mardia utilizando el principio Score de Rao.

Mardia (1987) y Mardia y Kent (1991) desarrollan a partir del principio Score de Rao una prueba conjunta para multinormalidad. La hipótesis alternativa es la familia exponencial de la forma: $f(\mathbf{x}; \theta, \psi) \alpha \exp\{\theta^T \mathbf{u}(\mathbf{x}) + \psi^T \mathbf{v}(\mathbf{x})\}$.

Donde $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \left\{x_1, x_2, \ldots, x_p, x_1^2, x_2^2, \ldots, x_p^2, x_1x_2, x_2x_3, \ldots, x_{p-1}x_p\right\}^T$ y

$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \{x_1^3, \ldots, x_p^3, x_1^2x_2, \ldots, x_{p-1}^2x_p, x_1^4, \ldots, x_p^4, x_1x_2x_3x_4, \ldots, x_{p-3}x_{p-2}x_{p-1}x_p\}^T$.

Así la prueba de hipótesis es:

$$H_0 : \psi^T = \mathbf{0} \quad \textbf{vs} \quad \psi^T \neq \mathbf{0}$$

El estadístico Score de Rao toma la forma: $T = (T_3 + T_4)$.

La distribución asintótica bajo la hipótesis nula es:

$$T \sim \chi^2_{(K)}; \text{ con } K = \binom{p+2}{3} + \binom{p+3}{4}$$

Donde $T_3 = \frac{n}{6} b_{1,p}$ y $T_4 = \frac{n}{24}\widetilde{b}_{2,p} - \frac{n}{4} b_{2,p} + \frac{n}{8} p(p+2)$. Estos estadísticos son afín invariantes.

Como se ve estos estadísticos son iguales a los estadísticos de Koziol desarrollados en el numeral 2.3. Así los dos procedimientos formales tienen, en éste caso, resultados idénticos. Por ello en la sección 3, mencionaremos solo los estadísticos de Mardia y Kent (1991).

Para $p = 1, T$ es el conocido estadístico de Bowman y Shenton (1975). Para $p = 2, T$ se reduce al índice de "projection pursuit" introducido por Jones y Sibson (1987) como señaló Mardia (1987).

Mardia y Kent (1991) observan que las definiciones de asimetría y kurtosis de Malkovich y Afifi (1973) no tienen distribuciones asintóticas ji-cuadrado.

Este último trabajo es digno de ser mencionado, pues se deriva de la propiedad fundamental de la multinormal, que establece que toda combinación lineal de las variables es normal univariada. Además, se puede añadir que estas ideas de Malkovich y Afifi como medidas de asimetría y kurtosis más extremas (moviéndose en todas las direcciones) se pueden considerar precursoras de "projection pursuit" ya que las direcciones interesantes en ese contexto son aquellas donde hay más alejamiento de la multinormalidad. El presente artículo se originó como un subtema dentro de un proyecto de investigación de "comparación de índices de projection pursuit". Las definiciones y pruebas de Malkovich y Afifi (1973) no se revisaron en detalle en este artículo, porque como dicen Horswell y Looney (1993a) no son prácticas para $p > 2$, dadas sus dificultades computacionales.

3. Comparación de las pruebas

Se presentará una comparación de las distintas pruebas, utilizando estudios de potencia previos y una complementación realizada por los autores.

Se evaluaron las pruebas para las distintas combinaciones de n = 30, 50, 100, 200; p = 2, 5, 7, 10; y α = .05, .10. Las observaciones y conclusiones presentadas se mantienen para todas las combinaciones de n, p y α. Las tablas 1 y 2 presentan sólo los resultados para n=50, p=5, $\alpha = .10$ y .05, número de simulaciones=1000 y las hipótesis alternativas usadas, siguiendo a Horswell y Looney (1993a), son:

i.i.d $\Gamma(8, 1)$ (asimétrica).

i.i.d. uniforme(0, 1) (simétrica y kurtosis negativa).

i.i.d. $t_{(5)}$ (simétrica y kurtosis positiva).

i.i.d. K_1 (distribución de la familia de Khintchine, que no es multinormal pero sus marginales son normales. (Horswell y Looney (1993a, pág. 29) y Johnson (1987, capítulo 8) construye el algoritmo de simulación.

i.i.d. G.E.P.1

i.i.d. G.E.P.2 (casos particulares de la familia "Generalized exponential power" que no son multinormales pero tienen coeficientes de asimetría y kurtosis iguales a los de la multinormal. Horswell y Looney (1993a, pág. 30) y para el algoritmo de simulación utilizado, Johnson (1987, pág. 34-36).

Los programas fueron realizados en SAS-IML y los autores los ponen a disposición.

Tabla 1

$n = 50, \quad p = 5, \quad \alpha = 0.1$

Distribución	$b_{1,p}$	$b_{2,p}$	S_w^2	Q_1	Q_2	Q_3	b_{1p}^2	b_{2p}	C_1	C_2	C_3	T_4
i.i.d. $\Gamma(8,1)$	61	29	38	94	44	89	54	13	85	32	74	31
i.i.d. $U(0,1)$	0	95	86	0	100	100	3	68	0	0	61	0
i.i.d. $t(5)$	71	76	66	78	86	88	18	44	72	79	82	72
i.i.d. K_1	97	88	84	11	9	12	61	42	93	63	82	84
i.i.d. GEP1	9	10	8	4	3	4	4	12	2	2	1	5
i.i.d. GEP2	9	10	11	12	22	19	5	16	7	6	8	7

Tabla 2

$n = 50, \quad p = 5, \quad \alpha = 0.05$

Distribución	$b_{1,p}$	$b_{2,p}$	S_w^2	Q_1	Q_2	Q_3	b_{1p}^2	b_{2p}	C_1	C_2	C_3	T_4
$\Gamma(8,1)$	50	19	13	89	25	74	52	7	83	31	70	18
$U(0,1)$	0	87	80	0	100	100	4	42	0	0	40	5
$t_{(5)}$	61	68	37	72	72	80	31	35	71	80	81	61
K_1	72	87	44	5	5	6	29	39	2	66	2	66
$GEP2$	6	5	5	9	8	10	9	6	7	7	9	6
$GEP1$	4	3	4	1	4	6	11	2	1	2	1	3

Mardia y Foster (1983) observan que $b_{2,p}$ es más sensible a alejamiento de la multinormalidad que $b_{1,p}$. Horswell y Looney (1993b) reafirman lo anterior al mostrar que los tests de asimetría son muy sensibles a la kurtosis, presentándose sobrestimación de la potencia para alternativas leptokúrticas y subestimación para alternativas platokúrticas; concluyen entonces que las pruebas individuales no son buenas para indicar que tipo de alejamiento de la normalidad se presenta (i.e. asimetría o kurtosis).

Relativo a los estadísticos de Srivastava (b_{1p}^2 y b_{2p}) se ve de las tablas 1 y 2, que su potencia es inferior a los de Mardia y a los de Small.

Bera y John (1983) afirman que sus estadísticos (C_1, C_2 y C_3) se comportan globalmente mejor que los estadísticos $b_{1,p}$ y $b_{2,p}$ de Mardia. De las tablas 1 y 2, se observa que dicho comportamiento no es globalmente superior comparado con los estadísticos de Mardia y los de Small. Además para la uniforme (0,1) su comportamiento es el peor, como era de esperarse pues dichos estadísticos se construyen para alternativas de Pearson. Estas restricciones hacen que dichos estadísticos sean poco utilizados en la práctica.

Horswell y Looney (1993a), en detallado estudio, comparan los estadísticos afín invariantes de Mardia (1970) y Mardia y Foster (1983) con los dependientes de coordenadas de Small (1980) y concluye que no hay superioridad clara de un grupo de tests al otro. Sin embargo, observa que la práctica común de chequear multinormalidad por medio de pruebas marginales de normalidad univariada (procedimiento que es dependiente de coordenadas) puede representar una pérdida considerable de potencia incluso cuando las marginales no son normales. Esto lo comprueban al hacer transformaciones afines sobre la Beta(.1,.1), por ejemplo, y observar que la potencia de Q_2 y Q_3 bajan considerablemente; esto es lo que llama "invisibilidad" de la asimetría y kurtosis totales de las marginales. En términos prácticos, sugiere utilizar conjuntamente los dos tipos de tests, controlando el tamaño muestral y el número de variables que afectan la región crítica.

Este trabajo de Horswell y Looney (1993a) al comparar potencias contra alternativas no multinormales con asimetría y kurtosis multinormales, encuentra que ningún test se comporta bien. En la tablas 1 y 2 se presenta un resumen en las filas i.i.d. GEP1 y i.i.d. GEP2, incluyendo a los estadísticos revisados en este artículo. Esto reafirma la opinión de Andrews et al (1973) y Gnanadesikan (1977) en el sentido de la necesidad de técnicas con diferentes sensibilidades a los distintos tipos de alejamiento de la multinormalidad. Estos últimos autores afirman que "buscar un único método que sea el mejor no es práctico ni necesario".

Relativo a los estadísticos conjuntos (e.g., S_w^2, Q_3) se puede afirmar con Koziol (1986), que a pesar de su utilidad exploratoria, como medidas propiamente multivariadas, debe tenerse cuidado pues pueden ser insensibles a alejamientos de la multinormalidad que son solo visibles entre subconjuntos de las variables.

Finalmente los estadísticos de Mardia y Kent (1991) obtenidos analíticamente usando el principio Score de Rao, no presentan resultados superiores en comparación con los estadísticos originarios $b_{1,p}$ y $b_{2,p}$ de Mardia (1970); véase

tablas 1 y 2 para el comportamiento de T_4 vs $b_{2,p}$; para el comportamiento de T vs $b_{1,p}$ y $b_{2,p}$, véase tabla 3 donde se presenta un resumen del estudio de potencia realizado por Yañez y Correa (1997), para n=50, p=4, $\alpha = .10$, número de simulaciones=1000, y las alternativas:

i.i.d. uniforme (0,1) (simétrica y kurtosis negativa).

i.i.d. logN(0,1) (asimétrica).

i.i.d. $t_{(4)}$ (simétrica y kurtosis negativa).

i.i.d. GEP1, GEP2.

Mezclas de multinormales: $.75\mathbf{N}(\mu, \Sigma) + .25\mathbf{N}(\mathbf{0}, \mathbf{I})$ con las siguientes alternativas:

i) $\mu = (3,3,3,3)^T, \quad \Sigma = \mathbf{I}$

ii) $\mu = \mathbf{0}, \quad \Sigma = 3\mathbf{I}$

iii) $\mu = \mathbf{0}, \quad \sigma_{ii} = 1, \quad \sigma_{ij} = .9 \quad i \neq j$

iv) $\mu = \mathbf{0}, \quad \sigma_{ij} = .9^{|i-j|}$

v) $\mu = (3,3,3,3)^T, \quad \sigma_{ii} = 1, \quad \sigma_{ij} = .9 \quad i \neq j$

Tabla 3

Distribución	$b_{1,P}$	$b_{2,P}$	T
i.i.d. $U(0,1)$	0	100	0
i.i.d. log$N$	100	100	100
i.i.d. $t(4)$	80	85	87
i.i.d. GEP1	9	5	0
i.i.d. GEP2	12	10	0
mezcla i)	34	10	14
mezcla ii)	34	43	36
mezcla iii)	96	100	100
mezcla iv)	90	97	98
mezcla v)	70	43	63

4. Conclusiones

Este estudio de simulación permite destacar las siguientes conclusiones experimentales basadas en las evaluaciones de las pruebas en cuanto a su potencia, para las distintas combinaciones de n = 30, 50, 100, 200; p=2, 5, 7, 10; $\alpha = .10$ y .05.

Los estadísticos derivados formalmente utilizando el principio Score de Rao o la noción de tests suaves de Neyman no se comportan mejor como pruebas de multinormalidad que las desarrolladas como generalizaciones de nociones univariadas. A pesar de sus propiedades como tests formales, al establecer las hipótesis alternativas limitan la gran variedad de distribuciones propias del trabajo multivariado. Por ello se recomienda en términos prácticos, utilizar conjuntamente las pruebas basadas en $b_{1,p}$ y $b_{2,p}$ que son un esquema potente para detectar multinormalidad contra una amplia variedad de distribuciones alternativas. Además al aceptar las hipótesis de $\beta_{1,p} = 0$ y $\beta_{2,p} = p(p+2)$ se garantiza el uso de los tests inferenciales clásicos basados en la multinormalidad, estas propiedades de robustez son señaladas en Mardia, Kent y Bibby (1979, págs. 148-149).

Finalmente, es pertinente anotar con D'Agostino y Stephens (1987, pág. 4) que el tema de pruebas para multinormalidad, dentro del trabajo de técnicas de bondad de ajuste, tiene todavía muchos problemas abiertos.

5. Referencias

1. Andrews, D.F., Gnanadesikan, R. and Warner, J.L., *Methods for assesing multivariate normality*, In Multivariate Analysis-III. p. Krishnaiah (ed.) (1973), 95–116, Academic Press, New york,.
2. Bera, A. and John, S., *Test for multivariate normality whith Pearson alternatives*, Comunications in Statistics, Part A-Theory and Methods **12** (1983), 103–117.
3. Bowman, K.O. and Shenton, L.R., *Omnibus test contours for departures from normality based on $\sqrt{b_1}$ and b_2*, Biometrika **62** (1975), 243–250.
4. D'Agostino, R.B. and Stephens, M.A., *Goodness-of-fit Techniques*, Marcel Dekker (1986), New York.
5. Gnanadesikan, R., *Methods for Statistical Data Analysis of Multivariate Observations*, John Wiley (1977), New York.
6. Horswell, R. L. and Looney, S. W., *A comparison of test for multivariate normality that are based on measures of multivariate skewness and kurtosis*, J. Statist. Comput. Simul. **42** (1993a), 21–38.
7. Horswell, R. L. and Looney, S. W., *Diagnostics limitations of skewness coefficients in assesing departures from univariate and multivariate normality*, Comunications in Statistics, Part B-Simulation **22** (1993b), 437–459.
8. Johnson, M. E., *Multivariate Statistical Simulation*, John Wiley (1987), New York.
9. Jones, M.C. and Sibson, R., *What is Projection Pursuit? (with discussion)*, J. R. Statistical Society, Series A, **150 Part 1** (1987), 1–36.
10. Koziol, J. A., *Assessing multivariate normality: A compendium*, Communications in Statistics, Part A-Theory and Methods **15** (1986), 2763–2783.
11. Koziol, J. A., *A note on measures of multivariate kurtosis*, Biometrical Journal **31** (1989), 619–624.
12. Koziol, J. A., *Probability plots for assessing multivariate normality*, The Statistician **42** (1993), 161–173.
13. Malkovich, J. F. and Afifi, A. A., *On tests for multivariate normality*, Journal of the American Statistical Association **68** (19773), 176–179.
14. Mardia, K. V., *Measures of multivariate skewness and kurtosis with applications*, Biometrika **57** (1970), 519–530.
15. Mardia, K. V., *Applications of some measures of multivariate skewness and kurtosis in testing normality and robustness studies*, Sankhya: The Indian Journal of Statistics, Series B, Part 2 **36** (1974), 115–128.
16. Mardia, K. V., *Assesment of multinormality and the robustness of Hotelling's T^2 test*, Applied Statistics **24** (1975), 163–171.
17. Mardia, K.V., *Tests of univariate and multivariate normality*, In Handbook of Statistics. Analysis of Variance **I**, (1980), 279–320, P. Krishnaiah (ed.). North-Holand, Amsterdam.
18. Mardia, K. V., *Discussion of paper by M. C. Jones and R. Sibson*, Journal of the Royal Statistical Society, Series A **150** (1987), 22–23.
19. Mardia, K. V. and Foster, K., *Omnibus test of multinormality based on skewness and kurtosis*, Comunications in statistics Part A-Theory and Methods **12(2)** (1983), 207–221.
20. Mardia, K. V., Kent, J. T. and Bibby, J. M., *Multivariate Analysis*, Academic Press (1979), London.

21. Mardia, K. V. and Kent, J. T., *Rao score tests for goodness of fit and independence*, Biometrika **78** (1991), 355–363.
22. Romeu, J. L. and Ozturk, A., *A comparative study of goodness of fit tests for multivariate normality*, Journal of Multivariate Analysis **46** (1993), 309–334.
23. Small, N. J. H., *Marginal skewness and kurtosis in testing multivariate normality*, Applied. statist. **29** (1980), 85–87.
24. Srivastava, M. S., *A measure of skewness and kurtosis and a graphical method for assessing multivariate normality*, Statistics and Probability Letters **2** (1984), 263–267.
25. Yáñez, S. y Correa, J. C., *Reporte Técnico: Estudio de potencia del estadístico T de Mardia y Kent*, Universidad Nacional de Colombia-Sede Medellín (1997).