

Una prueba basada en rachas para simetría alrededor de una mediana específica(*)

JIMMY A. CORZO SALAMANCA(**)
ALEX LEONARDO ROJAS PEÑA.

ABSTRACT.

This paper presents a test, based on a runs statistic, for symmetry of a continuous distribution about a known median. Monte Carlo studies show that, for twelve distributions from the generalized lambda family (*FDLG*) which provide a wide range of asymmetric distributions, the test is more powerful than tests proposed by McWilliams (1990) or Castillo (1993) when the distribution of which the data come is asymmetric and it possesses both tails.

Resumen.

Este artículo presenta una prueba, basada en rachas, para simetría de una distribución continua alrededor de su mediana conocida. Estudios de Monte Carlo muestran que, para doce casos de la Familia de Distribuciones Lambda Generalizada (*FDLG*) las cuales proveen un amplio rango de distribuciones asimétricas, la prueba presentada es más potente que las pruebas propuestas por McWilliams(1990) o Castillo(1993) cuando la distribución de la que provienen los datos es asimétrica y posee ambas colas.

Palabras claves: Prueba de simetría, pruebas de rachas.

(*) Este artículo es un resumen del trabajo de grado "Estimación de la potencia para una prueba de simetría basada en rachas" presentado por Alex Rojas bajo la dirección de Jimmy Corzo.

(**) Jimmy Corzo Salamanca, profesor Asociado. Departamento de Matemáticas y Estadística. Universidad Nacional de Colombia.

1. Introducción

Sea X_1, X_2, \dots, X_n , una muestra aleatoria de una distribución absolutamente continua F , asúmase sin pérdida de generalidad que $F(0) = 0.5$. Considérese la hipótesis de simetría (Bhattacharya et. al., 1982):

$$H_0 = F(x) = 1 - F(-x)$$

la cual se quiere comparar contra la hipótesis alternativa:

$$H_1 : F(x) \neq 1 - F(-x)$$

Existe una variedad de procedimientos no paramétricos para probar la hipótesis de simetría alrededor de una mediana conocida: Butler(1969) propone una prueba del tipo Kolmogorov-Smirnov, basado en la distribución empírica; Rothman y Woodrooffe (1972), Srinivasan y Godio(1974) y Hill y Rao(1977) sugieren pruebas basadas en estadísticas del tipo Cramér-von Mises; McWilliams(1990) y Castillo(1993) presentan pruebas basadas en rachas¹.

McWilliams(1990) concluye por medio de estudios de simulación, para tamaños de muestra 20, 30, 50 y 100, que la prueba basada en el número total de rachas es más potente que las pruebas propuestas por Butler(1969), Rothman y Woodrooffe (1972), Srinivasan y Godio (1974) y Hill y Rao (1977).

2. Estadística Propuesta.

Sea $|X_1|, |X_2|, \dots, |X_n|$ la sucesión de valores absolutos de la muestra X_1, X_2, \dots, X_n ; denótese por $|X|_{(1)}, |X|_{(2)}, \dots, |X|_{(n)}$ la sucesión de los valores absolutos ordenados, donde $|X|_{(i)}$ es la i -ésima observación más pequeña en la sucesión $|X_1|, |X_2|, \dots, |X_n|$; se define $\eta_j, j = 1, 2, \dots, n$ por $\eta_j = \text{signo}(X_{D_j})$ donde D_j es el antirrango de $|X|_{(j)}$, obteniendo la sucesión dicotomizada:

$$\eta_j = \dots = \eta_{L_1} \neq \eta_{L_1+1} = \dots = \eta_{L_1+L_2} \neq \dots \neq \eta_{L_1+\dots+L_{U-1}+1} = \dots = \eta_n$$

Donde se distinguen $U \geq 1$ grupos de símbolos idénticos consecutivos, cada uno de los cuales se define como una racha.

Se define

$$I_j = \begin{cases} 1 & \text{si } \eta_{j-1} \neq \eta_j \\ 0 & \text{si } \eta_{j-1} = \eta_j \end{cases}, \quad r_i = 1 + \sum_{j=1}^i I_j \quad \text{y} \quad \delta_i = \begin{cases} 1/u & \text{si } \eta_j = 1 \\ -1/v & \text{si } \eta_j = 0 \end{cases}$$

donde u el número de observaciones mayores que cero y v el número de observaciones menores o iguales que cero, en la sucesión dicotomizada.

¹Sucesión de símbolo idénticos, seguidos o precedidos por otro símbolo o por ningún símbolo.

Nótese que r_i es el número de rachas hasta la i -ésimo dato de la sucesión dicotomizada $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$.

La estadística usada para probar la hipótesis de simetría es C , que se expresa como:

$$C = \frac{1}{r_n - 1} \sum_{i=1}^n \delta_i r_i$$

La construcción de la región de rechazo para esta prueba, está basada en un argumento similar al de McWilliams(1990): si la hipótesis de simetría es cierta, entonces para $b > a \geq 0$ vale que $P(-b < x_i < -a) = P(a < x_i < b)$ luego se espera que en el proceso de dicotomización la probabilidad de ocurrencia de un uno es igual a la probabilidad de ocurrencia de un cero; con lo cual se presentan rachas cortas en la sucesión dicotomizada al igual que valores semejantes en las variables u y v , que conlleva a que la estadística C tome valores cercanos a cero. Si se presenta asimetría se tiene $P(-b < x_i < -a) \neq P(a < x_i < b)$, luego se esperan más observaciones grandes (en valor absoluto), es decir, agrupamientos de unos ó ceros en los extremos de la sucesión dicotomizada (Corzo, 1997). Así pues, se rechaza la hipótesis nula si el valor de C cae en alguna de las dos colas de su distribución nula, es decir, cuando se presentan rachas largas a la izquierda o a la derecha de la muestra dicotomizada

2.1. Función de probabilidad de la estadística C .

Para una muestra de tamaño n , la función de probabilidad de la estadística C , se obtiene construyendo en términos de unos y ceros (Corzo, 1997), todos los arreglos que se pueden obtener así:

- Si no ocurren observaciones positivas: $\binom{n}{0}$ n -tuplas de n ceros
- Si ocurre una observación positiva: $\binom{n}{1}$ n -tuplas que tienen un 1 en la posición j , donde $j = 1, 2, \dots, n$.
- ... y así sucesivamente hasta cuando todas las observaciones son positivas: $\binom{n}{n}$ n -tuplas de n unos.

De ésta forma, el total de arreglos posibles es:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$$

Sea $\Omega_n := \{0, 1\}^n = \{0, 1\} \times \{0, 1\} \times \dots \times \{0, 1\}$, el producto cartesiano de $\{0, 1\}$ n -veces, el conjunto de los 2^n arreglos posibles distinguibles de unos y ceros. Entonces para un arreglo cualquiera $\omega_n \in \Omega_n$:

$$p(\eta = \omega_n) = P(\eta_1 = \omega_{n1}, \eta_2 = \omega_{n2}, \dots, \eta_n = \omega_{nn}) = \frac{1}{\#\Omega_n} = \frac{1}{2^n}$$

y así:

$$P(C = c) = \frac{\#\{\omega_n \in \Omega_n : C = c\}}{\#\Omega_n} = \frac{\#\{\omega_n \in \Omega_n : C = c\}}{2^n}$$

donde $\#\{\omega_n \in \Omega_n : C = c\}$ es el número de arreglos $\omega_n \in \Omega_n$ tales que $C = c$.

2.2 Estudio de Convergencia a la Distribución Normal

Con el fin de estudiar la convergencia de la distribución de la estadística C , se sigue la idea del contraste de Kolmogorov-Smirnov (Peña, 1988) y se calcula la diferencia máxima (en valor absoluto), entre la función de distribución exacta de la estadística C y la función acumulada de la distribución Normal.

Como se puede observar en la Tabla 1 (col. 2), las máximas diferencias $|F_c(x) - \Phi(x/\sigma)|$ para todo el rango de la distribución, presentan una tendencia decreciente a medida que aumenta el tamaño de muestra, partiendo de una diferencia máxima de 0.1271 para $n = 5$ hasta 0.0090 para $n = 25$.

Al realizar una prueba de hipótesis se requiere el valor de los percentiles de la distribución en las colas, por lo tanto adquiere mayor importancia analizar las diferencias en los extremos. En la Tabla 1 (col. 3 y col 4) se encuentran las diferencias máximas para la cola derecha (percentiles 90 al 100) e izquierda (percentiles 0 al 10) respectivamente; estas diferencias son menores a las diferencias máximas en todo el rango de la distribución.

Al igual que con las diferencias máximas para toda la distribución, el comportamiento de éstas es también monótono decreciente con un máximo de 0.0366 para $n = 5$ hasta 0.0051 para $n = 25$; es más, a partir del tamaño de muestra 17 las diferencia son menores que 0.01.

2.3 Aproximación de la distribución de la estadística C por un caso de la $FDLG$

Haciendo uso del método de momentos, herramienta útil en la representación de los datos cuando la distribución exacta es desconocida, se ajustó la distribución de la estadística C^* por un caso de la $FDLG$ para cada tamaño de muestra $n = 10(1)25$ y se calcularon los percentiles 1, 2.5, 5 y 10 para cada tamaño de muestra. En la Tabla 2 se encuentran los valores de los parámetros estimados para cada uno de los tamaños de muestra. Las diferencias entre los valores críticos obtenidos usando la aproximación por la $FDLG$ y los de la distribución exacta, son menores que 0.002 para el percentil 1(99), diferencias inferiores a 0.006 para el percentil 2.5(97.5), menores que 0.007 para el percentil 5(95) y menor que 0.008 para el percentil 10(90). Una consideración importante es el acercamiento de los parámetros estimados $\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \hat{\lambda}_3$ y $\hat{\lambda}_4$ a los valores de los parámetros de la $FDLG$ que aproximan a una distribución Normal, a medida que aumenta el tamaño de muestra.

Tabla 1. Diferencia máxima de la distribución de la estadística C y las distribución Normal

n	Región A^*	Región B	Región C
5	0.1271	0.0366	
6	0.1091	0.0458	0.0644
7	0.0822	0.0618	0.0417
8	0.0596	0.0562	0.0483
9	0.0490	0.0435	0.0319
10	0.0460	0.0326	0.0306
11	0.0383	0.0245	0.0218
12	0.0327	0.0232	0.0194
13	0.0250	0.0156	0.0141
14	0.0234	0.0133	0.0125
15	0.0204	0.0110	0.0104
16	0.0187	0.0109	0.0106
17	0.0153	0.0086	0.0084
18	0.0161	0.0084	0.0077
19	0.0127	0.0070	0.0067
20	0.0133	0.0076	0.0073
21	0.0123	0.0065	0.0063
22	0.0114	0.0070	0.0068
23	0.0097	0.0053	0.0052
24	0.0109	0.0068	0.0067
25	0.0090	0.0051	0.0049

*Las regiones se definen de la siguiente manera: A : Todo el rango de la distribución, $B : x : P(C \leq x) \leq 0.10$ y $C : x : P(C \geq x) \leq 0.10$.

3. Prueba de desempeño

Utilizando la metodología dada por McWilliams (1990), se estudia a continuación la habilidad de la prueba basada en la estadística C para detectar asimetría, comparándola con dos pruebas ya existentes: McWilliams (1990) y Castillo (1993). Las pruebas fueron evaluadas para tamaños de muestra 20, 25, 30, 50 y 100; usando un nivel de significancia² $\alpha = 0.05$ y seleccionando nueve casos de la *FDLG*. En estos casos se incluye la forma distribucional de "calibración" simétrica, en la cual la hipótesis nula es verdadera y una variedad de distribuciones asimétricas que se van alejando de la hipótesis de simetría.

²Las pruebas fueron aleatorizadas para obtener un tamaño exacto igual a 0.05

Tabla 2. Valores de los parámetros de la *FDLG* que ajustan aproximadamente la distribución de la estadística C^* para tamaños de muestra $10(1)25$.

n	Varianza	Curtosis	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4
10	0.0719381	5.288499	0	-0.3929715	-0.0505	-0.0505
11	0.0590983	5.191581	0	-0.4335638	-0.0529	-0.0529
12	0.0498993	4.975743	0	-0.3894681	-0.04475	-0.04475
13	0.0431105	4.713371	0	-0.3255781	-0.0350	-0.0350
14	0.0379494	4.454906	0	-0.1237128	-0.01295	-0.01295
15	0.0339139	4.226916	0	-0.0035785	-0.000365	-0.000365
16	0.0306776	4.038353	0	0.1495859	0.01486	0.01486
17	0.0280239	3.888077	0	0.3255610	0.03170	0.03170
18	0.0258063	3.770521	0	0.3392609	0.03210	0.03210
19	0.0239231	3.679041	0	0.5508464	0.05120	0.05120
20	0.0223023	3.607528	0	0.5705124	0.05112	0.05112
21	0.0208911	3.550973	0	0.589466	0.05140	0.05140
22	0.0196505	3.505528	0	0.6077891	0.05120	0.05120
23	0.0185507	3.468337	0	0.8744438	0.07420	0.07420
24	0.0175686	3.437327	0	0.8985527	0.07420	0.07420
25	0.0166860	3.411005	0	0.9220105	0.07420	0.07420

A partir de la Tabla 3 se observa que la potencia de la prueba basada en la estadística C , es mayor

Tabla 3. Potencia empírica: $\alpha = 0.05$.

n	Castillo	C	McWilliams (R)
Caso 1 (Caso Simétrico). $\lambda_1 = 0.0000$, $\lambda_2 = 0.197454$, $\lambda_3 = 0.134915$, $\lambda_4 = 0.134915$			
20	0.0506	0.0507	0.0504
25	0.0503	0.0491	0.0502
30	0.0466	0.0531	0.0512
50	0.0506	0.0537	0.0538
100	0.0693	0.0585	0.0601
Caso 2 $\lambda_1 = -0.116734$, $\lambda_2 = -0.351663$, $\lambda_3 = -0.1300$, $\lambda_4 = -0.1600$			
20	0.0522	0.0535	0.0520
25	0.0515	0.0549	0.0537
30	0.0494	0.0575	0.0542
50	0.0568	0.0646	0.0594
100	0.0779	0.0818	0.0673

Caso 3	$\lambda_1 = 0.0000, \lambda_2 = -1.0000, \lambda_3 = -0.100, \lambda_4 = -0.1800$		
20	0.0605	0.0794	0.0689
25	0.0609	0.0886	0.0712
30	0.0618	0.1055	0.0723
50	0.0752	0.1395	0.0919
100	0.1235	0.2359	0.1224
Caso 4	$\lambda_1 = 3.586508, \lambda_2 = 0.04306, \lambda_3 = 0.025213, \lambda_4 = 0.094029$		
20	0.0696	0.1086	0.0912
25	0.0727	0.1264	0.1025
30	0.0752	0.1479	0.1100
50	0.1009	0.2178	0.1521
100	0.1704	0.3902	0.2369
Caso 5	$\lambda_1 = 0.0000, \lambda_2 = -1.0000, \lambda_3 = 0.0075, \lambda_4 = -0.0300$		
20	0.0765	0.1390	0.1127
25	0.0849	0.1658	0.1357
30	0.0860	0.1954	0.1432
50	0.1213	0.3001	0.2064
100	0.2141	0.5203	0.3329
Caso 6	$\lambda_1 = 0.0000, \lambda_2 = 1.0000, \lambda_3 = 1.4000, \lambda_4 = 0.2500$		
20	0.0919	0.1640	0.2046
25	0.1052	0.1849	0.2759
30	0.1086	0.2168	0.3056
50	0.1512	0.3060	0.4977
100	0.2398	0.4832	0.7929
Caso 7	$\lambda_1 = 0.0000, \lambda_2 = 1.0000, \lambda_3 = 0.00007, \lambda_4 = 0.1000$		
20	0.1183	0.2448	0.3079
25	0.1358	0.2872	0.4024
30	0.1497	0.3321	0.4524
50	0.2084	0.4678	0.6882
100	0.3272	0.6988	0.9261
Caso 8	$\lambda_1 = 0.0000, \lambda_2 = -1.0000, \lambda_3 = -0.0010, \lambda_4 = -0.1300$		
20	0.1337	0.2930	0.3697
25	0.1540	0.3373	0.4850
30	0.1670	0.3924	0.5372
50	0.2348	0.5406	0.7716
100	0.3723	0.7814	0.9640
Caso 9	$\lambda_1 = 0.0000, \lambda_2 = -1.0000, \lambda_3 = -0.0001, \lambda_4 = -0.1700$		
20	0.1355	0.2995	0.3983
25	0.1526	0.3463	0.5239
30	0.1698	0.3940	0.5792
50	0.2387	0.5417	0.8138
100	0.3595	0.7744	0.9782

que la de la prueba propuesta por McWilliams(1990), para los casos 2, 3, 4 y 5. Y es menor para los casos 6, 7, 8 y 9. En otras palabras la prueba basada en la estadística C es mas potente que la prueba basada en la estadística R , cuando la distribución de la que se muestrea es asimétrica y posee ambas colas, como en los casos 2, 3, 4 y 5 (Figura 1); a su vez es menor, cuando la distribución es asimétrica y posee solo una cola.

La situación descrita anteriormente es muy importante ya que haciendo un análisis descriptivo de los datos es más fácil detectar asimetría cuando la distribución posee una forma como en los casos 6, 7, 8 y 9 (una sola cola), es decir, los casos donde la prueba de McWilliams(1990) tiene su mejor desempeño, que para distribuciones con ambas colas donde la estadística C es más potente.

Para examinar si se mantiene el comportamiento de la potencia descrito anteriormente para las pruebas basadas en las estadísticas C y R se presentan otros casos de la $FDLG$, en los cuales la distribución muestreada es asimétrica y posee ambas colas.

Los casos escogidos de la $FDLG$ corresponden a los parámetros que ajustan aproximadamente las distribuciones (a) Gamma (2,0.5), (b) Gamma (3,0.5) y (c) Gamma (4,0.5). El valor de los parámetros se muestran en la Tabla 4 y la función de densidad se puede observar en la Figura 2.

Tabla 4. Valores de los lambdas para los casos seleccionados.

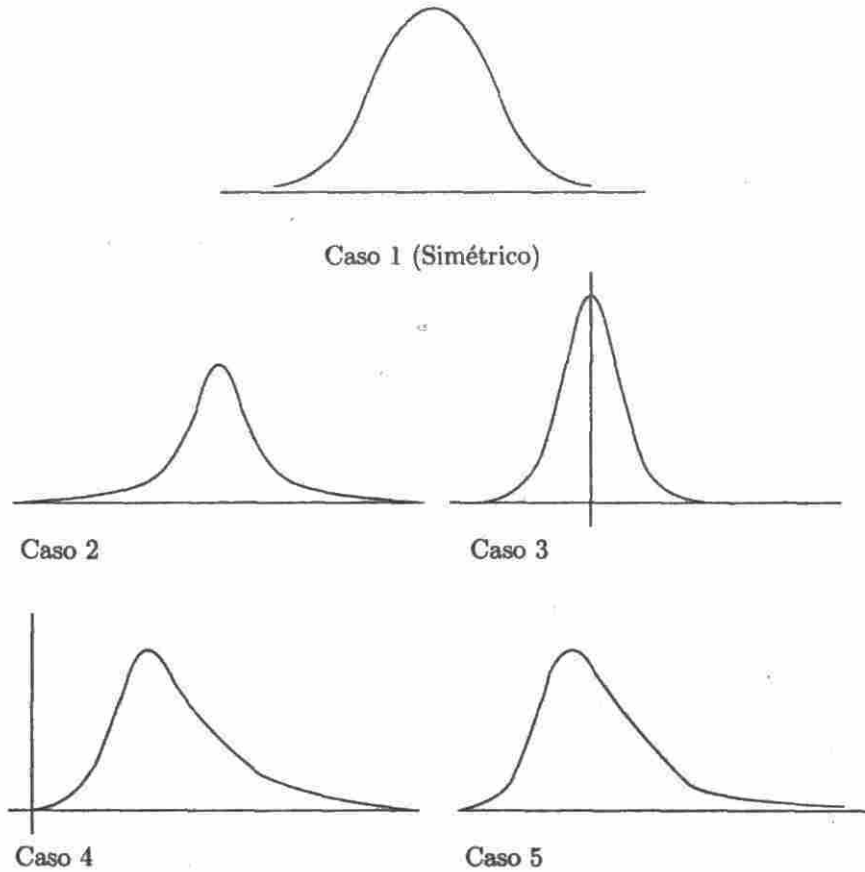
	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	Distribución
a	1.7248	0.014636	0.005675	0.040520	Gamma(2,0.5)
b	3.4990	0.019316	0.013101	0.065234	Gamma(3,0.5)
c	5.3203	0.021062	0.019619	0.081879	Gamma(4,0.5)

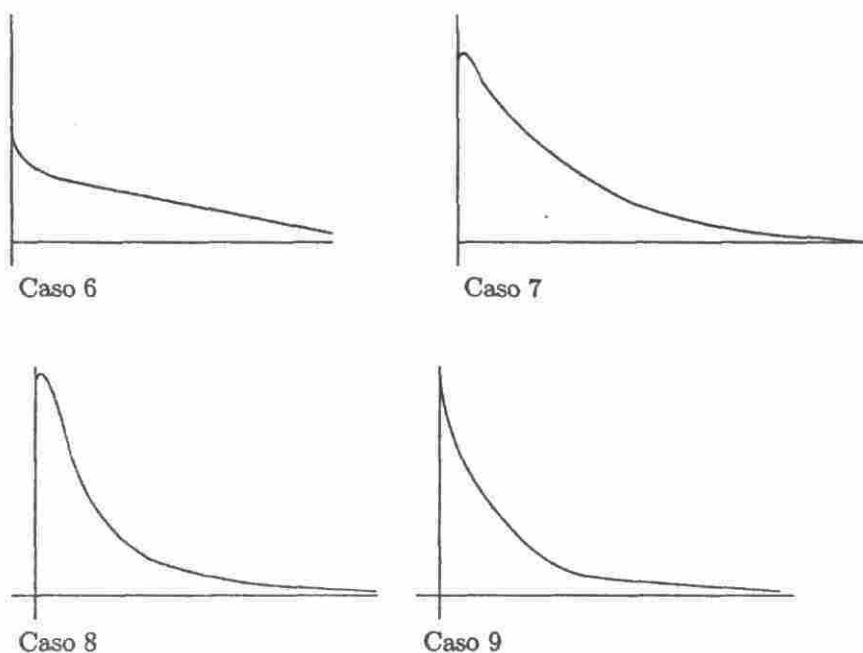
Para estos tres casos y los tamaños de muestra $n = 30, 50$ y 100 se estimó la potencia empírica y se obtuvieron los resultados de la tabla 5.

Tabla 5. Estimación de la potencia para los casos *a*, *b*, *c*.

Tamaño de Muestra	Caso (a)		Caso (b)		Caso (c)	
	C^*	R^*	C^*	R^*	C^*	R^*
30	0.2378	0.2056	0.1858	0.1484	0.1605	0.1252
50	0.3723	0.3043	0.2872	0.2135	0.2427	0.1729
100	0.6317	0.4914	0.5154	0.3446	0.4354	0.2708

Figura 1. Función de densidad de las nueve distribuciones seleccionadas





Como se puede observar en la Tabla 5, en estas formas distribucionales asimétricas y con dos colas, la prueba basada en la estadística C^* es más potente que la prueba basada en la estadística R , propuesta por McWilliams(1990), confirmando lo dicho en párrafos anteriores.

Figura 2. Función de densidad para los casos seleccionados.

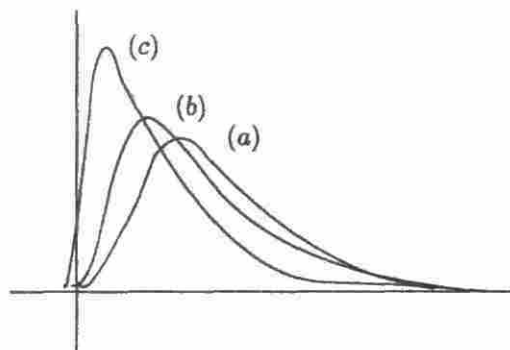


Tabla 6. Region crítica de la prueba basada en la estadística C

n	1.0%		2.5%		5.0%		10.0%	
10	-6.000	0.8789	-4.666	2.2461	-3.750	4.6875	-2.800	9.5703
	-5.666	0.9766	-4.500	2.4414	-3.667	4.8828	-2.750	9.9609
	-5.600	1.0742	-4.399	2.6367	-3.600	5.1758	-2.714	10.2539
11	-6.000	0.8789	-4.750	2.2949	-3.833	4.5898	-3.000	9.5215
	-5.800	0.9766	-4.666	2.4414	-3.800	4.8340	-2.857	9.8145
	-5.750	1.0742	-4.600	2.5879	-3.750	5.0293	-2.833	10.0098
12	-6.160	0.8057	-4.800	2.3926	-4.000	4.7852	-3.125	8.8623
	-6.000	0.9766	-4.750	2.4658	-3.857	4.9316	-3.111	8.9111
	-5.833	1.0254	-4.714	2.5391	-3.833	5.1025	-3.000	10.0098
13	-6.199	0.8545	-5.143	2.0508	-4.125	4.5044	-3.111	9.4971
	-6.166	0.8911	-5.000	2.4170	-4.110	4.5288	-3.100	9.5215
	-6.000	1.0742	-4.856	2.5024	-4.000	5.2124	-3.000	10.5713
14	-6.199	0.9521	-5.125	2.2827	-4.110	4.9438	-3.143	9.8145
	-6.166	0.9888	-5.110	2.2949	-4.100	4.9561	-3.125	9.9915
	-6.143	1.0193	-5.000	2.6245	-4.000	5.5786	-3.111	10.0647
15	-6.333	0.9521	-5.166	2.4078	-4.199	4.9377	-3.200	9.9548
	-6.285	0.9857	-5.143	2.4811	-4.182	4.9438	-3.182	9.9609
	-6.250	1.0223	-5.125	2.5299	-4.166	5.0568	-3.167	10.1227
16	-6.444	0.9521	-5.285	2.4124	-4.333	4.8889	-3.286	9.9319
	-6.428	0.9811	-5.250	2.4765	-4.300	4.9194	-3.272	9.9762
	-6.399	1.0086	-5.222	2.5040	-4.285	5.0293	-3.250	10.1807
17	-6.555	0.9880	-5.375	2.4521	-4.399	4.9690	-3.363	9.9350
	-6.545	0.9888	-5.363	2.4529	-4.384	4.9698	-3.357	9.9358
	-6.500	1.0460	-5.333	2.5414	-4.375	5.0652	-3.333	10.1845
18	-6.714	0.9609	-5.500	2.4612	-4.555	4.7878	-3.454	9.7824
	-6.699	0.9678	-5.454	2.4689	-4.545	4.8225	-3.444	9.9285
	-6.666	1.0033	-5.444	2.5135	-4.500	5.0289	-3.428	10.0262
19	-6.817	0.9699	-5.583	2.4521	-4.600	4.9530	-3.545	9.8104
	-6.800	0.9874	-5.571	2.4904	-4.583	4.9763	-3.538	9.8354
	-6.777	1.0054	-5.555	2.5354	-4.571	5.0303	-3.500	10.1624
20	-6.908	0.9780	-5.699	2.4656	-4.699	4.9397	-3.600	9.9216
	-6.899	0.9900	-5.691	2.4700	-4.691	4.9532	-3.583	9.9851
	-6.889	1.0099	-5.666	2.5387	-4.666	5.0722	-3.571	10.0509

(Continuación) Tabla 6.

n		1.0%		2.5%		5.0%		10.0%	
21	-7.076	0.9735	-5.800	2.4779	-4.785	4.9252	-3.692	9.8091	
	-7.071	0.9737	-5.785	2.4801	-4.777	4.9866	-3.688	9.8106	
	-7.000	1.0644	-5.777	2.5193	-4.769	5.0071	-3.667	10.0010	
22	-7.166	0.9909	-5.908	2.4539	-4.875	4.9817	-3.750	9.9151	
	-7.153	0.9924	-5.899	2.4879	-4.866	4.9854	-3.733	9.9307	
	-7.143	1.0024	-5.889	2.5212	-4.856	5.0170	-3.727	10.0277	
23	-7.300	0.9831	-6.063	2.3988	-4.938	4.9822	-3.818	9.9177	
	-7.286	0.9909	-6.059	2.3989	-4.933	4.9891	-3.813	9.9272	
	-7.273	1.0035	-6.000	2.5696	-4.929	5.0076	-3.800	10.0275	
24	-7.412	0.9831	-6.111	2.4680	-5.059	4.9721	-3.882	9.9379	
	-7.400	0.9985	-6.100	2.4954	-5.056	4.9725	-3.875	9.9753	
	-7.385	1.0035	-6.091	2.5251	-5.000	5.2572	-3.867	10.0048	
25	-7.538	0.9858	-6.214	2.4786	-5.143	4.9662	-3.938	9.9067	
	-7.533	0.9869	-6.211	2.4786	-5.133	4.9826	-3.933	9.9455	
	-7.500	1.0208	-6.200	2.5085	-5.125	5.0026	-3.929	10.0027	

Tabla 7. Region crítica de la prueba basada en la estadística C^*

n	1.0%		2.5%		5.0%		10.0%	
10	-1.0000	0.8806	-0.5833	2.1526	-0.4286	4.5010	-0.3143	9.5890
	-0.7333	0.9785	-0.5556	2.3483	-0.4167	4.6967	-0.3125	9.7847
	-0.7222	1.1742	-0.5200	2.4462	-0.4000	4.8924	-0.3016	9.9804
	-0.6825	1.3699	-0.5000	3.0333	-0.3968	5.0881	-0.3000	10.7632
	-0.6111	1.5656	-0.4921	3.2290	-0.3889	5.6751	-0.2976	10.9589
11	-0.6944	0.7820	-0.4889	2.2483	-0.3889	4.7898	-0.2963	9.4819
	-0.6444	0.8798	-0.4800	2.3460	-0.3810	4.8876	-0.2933	9.6774
	-0.6429	0.9775	-0.4762	2.4438	-0.3778	4.9853	-0.2889	9.7752
	-0.6222	1.0753	-0.4722	2.5415	-0.3750	5.0831	-0.2857	10.0684
	-0.6111	1.1730	-0.4714	2.6393	-0.3714	5.2786	-0.2833	10.1662
12	-0.5886	0.8061	-0.4444	2.3693	-0.3571	4.6898	-0.2686	9.5261
	-0.5833	0.9038	-0.4375	2.4182	-0.3551	4.7386	-0.2667	9.9170
	-0.5810	0.9526	-0.4357	2.4670	-0.3524	4.7875	-0.2643	9.9658
	-0.5556	1.0747	-0.4286	2.5892	-0.3500	5.1295	-0.2593	10.0879
	-0.5500	1.1236	-0.4222	2.6380	-0.3486	5.1783	-0.2571	10.3810
13	-0.5185	0.9035	-0.4091	2.4176	-0.3401	4.6642	-0.2556	9.5726
	-0.5167	0.9280	-0.4071	2.4420	-0.3375	4.7131	-0.2540	9.7192
	-0.5143	0.9768	-0.4028	2.4664	-0.3357	4.7863	-0.2517	9.8657
	-0.5111	1.0012	-0.4000	2.7106	-0.3333	5.1038	-0.2500	10.2520
	-0.5100	1.0501	-0.3968	2.7350	-0.3300	5.1770	-0.2487	10.2808
14	-0.4857	0.9401	-0.3889	2.3562	-0.3167	4.7796	-0.2396	9.7424
	-0.4833	0.9767	-0.3878	2.4173	-0.3156	4.8163	-0.2389	9.7546
	-0.4800	0.9889	-0.3867	2.4295	-0.3148	4.8285	-0.2381	9.9805
	-0.4792	1.0011	-0.3833	2.5150	-0.3143	5.0482	-0.2364	10.0293
	-0.4750	1.0133	-0.3818	2.5394	-0.3131	5.0604	-0.2361	10.0903
15	-0.4545	0.9583	-0.3667	2.4110	-0.3030	4.7183	-0.2277	9.8395
	-0.4524	0.9644	-0.3661	2.4232	-0.3016	4.8160	-0.2273	9.9188
	-0.4500	0.9888	-0.3651	2.4782	-0.3010	4.8343	-0.2262	9.9860
	-0.4455	1.0071	-0.3643	2.5148	-0.3000	5.0479	-0.2250	10.0409
	-0.4444	1.0987	-0.3636	2.5392	-0.2991	5.0540	-0.2245	10.0775
16	-0.4312	0.9476	-0.3477	2.4796	-0.2873	4.8082	-0.2150	9.9231
	-0.4303	0.9507	-0.3474	2.4857	-0.2872	4.8112	-0.2148	9.9567
	-0.4295	0.9537	-0.3472	2.4888	-0.2864	4.8204	-0.2145	9.9689
	-0.4286	1.0239	-0.3469	2.5163	-0.2857	5.0203	-0.2143	10.2268
	-0.4267	1.0361	-0.3467	2.5376	-0.2848	5.0233	-0.2137	10.2298
17	-0.4091	0.9949	-0.3357	2.3835	-0.2731	4.9058	-0.2077	9.9428
	-0.4083	0.9964	-0.3347	2.3972	-0.2730	4.9195	-0.2071	9.9596
	-0.4077	0.9979	-0.3333	2.5055	-0.2727	4.9821	-0.2071	9.9794
	-0.4074	1.0010	-0.3321	2.5071	-0.2722	5.0050	-0.2068	9.9977
	-0.4071	1.0025	-0.3314	2.5132	-0.2716	5.0263	-0.2067	10.0023

(Continuación) Tabla 7.

n	1.0%		2.5%		5.0%		10.0%	
18	-0.3917	0.9831	-0.3195	2.4780	-0.2625	4.9191	-0.2019	9.7878
	-0.3915	0.9899	-0.3194	2.4925	-0.2623	4.9229	-0.2013	9.8046
	-0.3908	0.9937	-0.3192	2.4941	-0.2619	4.9946	-0.2006	9.8183
	-0.3900	1.0021	-0.3189	2.5040	-0.2616	5.0061	-0.2000	10.1502
	-0.3890	1.0029	-0.3188	2.5086	-0.2615	5.0259	-0.1997	10.1685
19	-0.3761	0.9903	-0.3074	2.4933	-0.2525	4.9839	-0.1931	9.9736
	-0.3755	0.9922	-0.3074	2.4960	-0.2524	4.9942	-0.1929	9.9793
	-0.3753	0.9956	-0.3071	2.4998	-0.2523	4.9980	-0.1926	9.9812
	-0.3750	1.0040	-0.3071	2.5028	-0.2521	5.0019	-0.1926	10.0052
	-0.3746	1.0094	-0.3069	2.5036	-0.2521	5.0026	-0.1925	10.0060
20	-0.3619	0.9957	-0.2967	2.4705	-0.2440	4.9885	-0.1856	9.9823
	-0.3616	0.9980	-0.2967	2.4795	-0.2440	4.9898	-0.1854	9.9919
	-0.3613	0.9986	-0.2966	2.4821	-0.2439	4.9978	-0.1854	9.9922
	-0.3611	1.0104	-0.2963	2.5138	-0.2437	5.0041	-0.1852	10.0970
	-0.3608	1.0114	-0.2960	2.5142	-0.2436	5.0089	-0.1850	10.1025
21	-0.3500	0.9848	-0.2863	2.4783	-0.2370	4.9501	-0.1808	9.9669
	-0.3495	0.9874	-0.2861	2.4809	-0.2368	4.9506	-0.1807	9.9670
	-0.3494	0.9884	-0.2860	2.4852	-0.2365	4.9543	-0.1806	9.9673
	-0.3492	1.0047	-0.2857	2.5914	-0.2364	5.0043	-0.1806	10.0160
	-0.3491	1.0061	-0.2855	2.5916	-0.2363	5.0086	-0.1805	10.0165
22	-0.3389	0.9912	-0.2781	2.4851	-0.2294	4.9906	-0.1749	9.9416
	-0.3388	0.9991	-0.2779	2.4851	-0.2293	4.9921	-0.1748	9.9888
	-0.3388	0.9995	-0.2779	2.4856	-0.2292	4.9958	-0.1747	9.9889
	-0.3387	1.0003	-0.2778	2.5148	-0.2292	5.0135	-0.1746	10.0139
	-0.3385	1.0006	-0.2775	2.5149	-0.2289	5.0136	-0.1745	10.0153
23	-0.3286	0.9995	-0.2701	2.4904	-0.2229	4.9932	-0.1708	9.9849
	-0.3284	0.9996	-0.2701	2.4944	-0.2229	4.9949	-0.1707	9.9863
	-0.3283	0.9996	-0.2700	2.4956	-0.2228	4.9950	-0.1706	9.9983
	-0.3283	1.0024	-0.2700	2.5002	-0.2227	5.0027	-0.1706	10.0091
	-0.3282	1.0042	-0.2699	2.5028	-0.2226	5.0027	-0.1706	10.0105
24	-0.3188	0.9964	-0.2627	2.4974	-0.2168	4.9715	-0.1669	9.7515
	-0.3187	0.9978	-0.2626	2.4981	-0.2168	4.9717	-0.1668	9.7534
	-0.3186	0.9979	-0.2626	2.4981	-0.2168	4.9889	-0.1667	9.7534
	-0.3185	1.0016	-0.2626	2.5018	-0.2167	5.0233	-0.1667	10.1566
	-0.3185	1.0029	-0.2625	2.5087	-0.2164	5.0243	-0.1666	10.1571
25	-0.3107	0.9984	-0.2562	2.4992	-0.2115	4.9958	-0.1623	9.9970
	-0.3107	0.9987	-0.2561	2.4992	-0.2114	4.9978	-0.1623	9.9984
	-0.3107	0.9997	-0.2561	2.4994	-0.2114	4.9989	-0.1621	9.9994
	-0.3106	1.0008	-0.2560	2.5002	-0.2113	5.0037	-0.1621	10.0031
	-0.3105	1.0025	-0.2560	2.5016	-0.2113	5.0044	-0.1620	10.0095

5. Conclusiones.

- a. De acuerdo a los resultados obtenidos, la estadística aquí propuesta convergen asintóticamente a la distribución normal.
- b. La prueba adaptada por Castillo(1993) es menos potente que la prueba propuesta por McWilliams(1990), y que la basada en la estadística C , para los casos estudiados.
- c. La prueba basada en la estadística C^* es más potente que la de McWilliams(1990), cuando la distribución de la cual se extrae la muestra es asimétrica y posee ambas colas, por ejemplo el caso 5 de la *FDLG*. Luego se puede indicar: a la hora de contrastar la hipótesis de simetría es más conveniente usar C , ya que cuando la distribución posee solamente una cola, usando un análisis exploratorio de los datos es suficiente para establecer simetría o no.
- d. La prueba propuesta por McWilliams(1990) es más potente que la prueba basada en la estadística C , cuando la distribución de la cual se extrae la muestra posee solamente una cola, situación en la que es evidente la asimetría de la distribución, por ejemplo, el caso 9 de la *FDLG*.

6. Referencias

1. Butler, C. C., *A Test of Symmetry Using the Sample Distribution Function*, The Annals of Mathematical Statistics 40 (1969), 2211-2214.
2. Castillo, O. O., *Una prueba para Simetría Basada en Rachas*, Tesis no publicada de Maestría, Universidad Nacional de Colombia (1993).
3. Corzo, J., *Métodos No-Paramétricos basados en Rachas*, Notas del Simposio de Estadística. Estadística No-Paramétrica, Universidad Nacional de Colombia (1997).
4. Hill, D. L., Rao, P. V., *Test of Symmetry based on Cramér Von-Mises Statistics*, Biometrika 64 (1977), 489-494.
5. McWilliams, T., *A Distribution-Free Test for Symmetry on a Runs Statistics*, Journal of the American Statistical Association 85, (1990), 1130-1133.
6. Peña, S., *Estadística Modelos y Métodos*, Alianza Editorial. Madrid, España 1 (1988).
7. Rothman, E. D. y Woodrooffe M., *A Cramér Von-Mises Type Statistics for Testing Symmetry*, The Annals of Mathematical Statistics 43 (1972), 2035-2038.
8. Srinivasan, R. y Godio L. B., *A Cramér Von-Mises Type Statistics for Testing Symmetry*, Biometrika 61 (1974), 196-198.