

## Una nueva prueba para el parámetro de diferenciación fraccional

### A New Test for the Fractional Differencing Parameter

ELKIN CASTAÑO<sup>1,2,a</sup>, KAROLL GÓMEZ<sup>3,b</sup>, SANTIAGO GALLÓN<sup>3,c</sup>

<sup>1</sup>FACULTAD DE CIENCIAS, UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA, MEDELLÍN, COLOMBIA

<sup>2</sup>FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS, UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA, MEDELLÍN, COLOMBIA

<sup>3</sup>DEPARTAMENTO DE ECONOMÍA, FACULTAD DE CIENCIAS HUMANAS Y ECONÓMICAS,  
UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA, MEDELLÍN, COLOMBIA

---

#### Resumen

Este documento presenta una nueva prueba para el parámetro de diferenciación fraccional de un modelo ARFIMA, basada en una aproximación autorregresiva de su componente a corto plazo. El comportamiento de la prueba se estudia por medio de experimentos Monte Carlo en una distribución normal, y se compara con el comportamiento de algunas de las pruebas más utilizadas. Para los casos estudiados, se concluye que la nueva prueba tiene generalmente potencias superiores, conservando un tamaño adecuado. A partir de la estimación del parámetro de diferenciación fraccional usando el modelo aproximado, es posible identificar el modelo correcto para la componente a corto plazo, lo cual permite mejorar la inferencia sobre dicho parámetro. Una ventaja adicional del procedimiento propuesto es que permite probar la existencia de larga memoria en presencia de errores dependientes, como en el caso de modelos de volatilidad de la familia ARCH. Se ilustra su aplicación en un procedimiento de identificación y estimación de un modelo ARFIMA-ARCH usando datos simulados.

**Palabras clave:** memoria larga, modelo ARFIMA, aproximación autorregresiva, identificación, prueba de hipótesis, diferencia fraccional.

#### Abstract

This paper presents a new test for the fractional differencing parameter of an ARFIMA model, based on an autoregressive approximation of its short-range component. The test's behavior is studied using Monte Carlo simulations under a normal distribution and is compared to results found for others well-known long memory tests. In general, the results show that

---

<sup>a</sup>Profesor asociado, profesor titular. E-mail: elkincv@gmail.com

<sup>b</sup>Profesor auxiliar. E-mail: kgomezp@unal.edu.co

<sup>c</sup>Profesor auxiliar. E-mail: sgallong@unal.edu.co

the new test has a superior power while maintaining an adequate size of the test. From the estimation of the fractional differencing parameter using the approximate model, it is possible to identify the correct model for the short-term component, which allows improving the inference on the above mentioned parameter. An additional advantage of the proposed procedure is the possibility of testing long memory in the presence of dependent errors such as in the volatility models of ARCH family. The identification and estimation procedure is applied to simulated data from an ARFIMA-ARCH model

**Key words:** Long memory, Arfima model, Autoregressive process, Identification, Testing hypothesis, Fractional differencing.

## 1. Introducción

La existencia de fuertes dependencias en algunas series de tiempo económicas fueron observadas en los trabajos pioneros de Granger (1980) y Granger & Joyeux (1980). Desde entonces, varios autores han encontrado evidencia sobre la presencia de una componente de memoria larga en series económicas y financieras. Mandelbrot (1962), Cheung (1993), Tschernig (1994), Hauser (1997), Beran & Ocker (1999), Velasco (1999) y Soofi et al. (2006) la detectan en series de tasas de cambio; en los precios de los activos financieros fue encontrada por Cheung & Lai (1995), Chow et al. (1995), Bhardwaj & Swanson (2004); mientras que en series macroeconómicas, Diebold & Rudebush (1989), Sowell (1992), Hassler & Wolters (1995), Hyung & Franses (2001), Bos et al. (2002), Chio & Zivot (2007) y Stock & Watson (2002) encontraron evidencia de su presencia. El concepto de memoria larga generalmente se relaciona, desde un punto de vista empírico, con la persistencia que muestran las autocorrelaciones muestrales de ciertas series de tiempo estacionarias, las cuales decrecen a un ritmo muy lento, pero finalmente convergen hacia cero. Este comportamiento no es compatible con la función de autocorrelación (ACF) de los modelos estacionarios autorregresivos y de medias móviles (ARMA), que imponen un decrecimiento exponencial en las autocorrelaciones, ni con el grado extremo de persistencia de los modelos integrados no estacionarios (ARIMA). En la figura 1, se compara el comportamiento de la ACF para algunos procesos ARMA, ARIMA y ARFIMA.

Granger (1980) y Granger & Joyeux (1980) señalan que la práctica habitual de diferenciar una serie, aparentemente no estacionaria, hasta conseguir estacionariedad puede tener consecuencias negativas en la correcta modelación de algunas series. Muchas veces, la serie diferenciada se convierte en una serie en la cual se ha eliminado la componente de bajas frecuencias, muy importante en las predicciones a largo plazo. Para modelar esta clase de series, la diferenciación entera es excesiva, pero la no diferenciación tampoco es adecuada. Con el fin de cubrir este vacío entre los casos extremos de modelos con raíces unitarias, típicamente utilizados para series no estacionarias homogéneas y modelos estacionarios que imponen un decrecimiento exponencial de las autocorrelaciones, Granger (1980), Granger & Joyeux (1980) y Hosking (1981) proponen una clase de procesos intermedios en

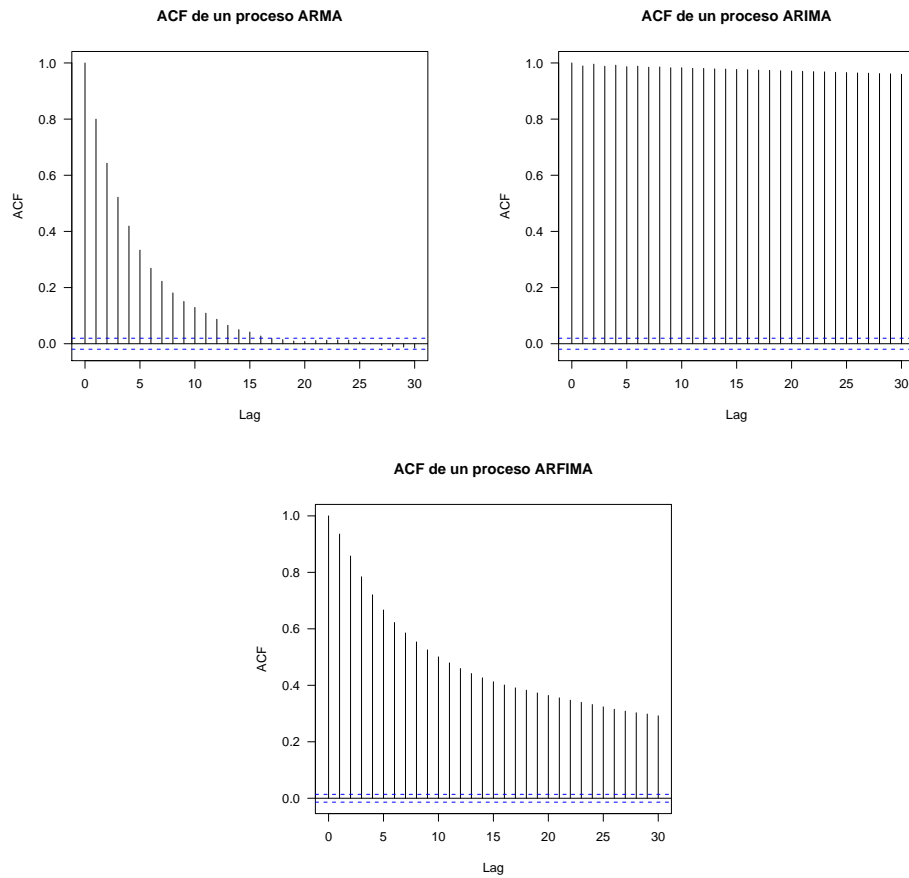


FIGURA 1: Comparación de las funciones de autocorrelación.

los cuales el orden de integración es fraccionario, introduciendo los modelos autorregresivos y de medias móviles fraccionalmente integrados (ARFIMA). En este documento se propone una nueva prueba para el parámetro de diferenciación fraccional de un modelo ARFIMA, basada en una aproximación autorregresiva de su componente a corto plazo. Para los casos estudiados, la prueba conserva un tamaño adecuado y en general resulta ser más potente que algunas otras pruebas propuestas en la literatura. Puede emplearse para el caso de errores no correlacionados serialmente, pero dependientes, como en el caso de la familia de modelos ARCH. Este documento está organizado de la siguiente manera: en la segunda sección, se describe el fenómeno de memoria larga, se define el modelo  $ARFIMA(p, d, q)$  y se presentan algunas propiedades básicas del modelo. En la tercera sección, se presenta el nuevo procedimiento para contrastar la hipótesis nula de memoria corta contra la alternativa de memoria larga. En la cuarta, se describe brevemente cada uno de los contrastes de larga memoria alternativos empleados para evaluar el comportamiento de la nueva prueba. En la quinta, se presentan los resultados

del comportamiento de la prueba por medio de experimentos de simulación Monte Carlo. En la sexta sección, se ilustra la aplicación del procedimiento propuesto para la identificación y estimación de un modelo ARFIMA–ARCH usando datos simulados. Finalmente, se presentan las conclusiones de este trabajo.

## 2. Procesos de memoria larga ARFIMA

### 2.1. El proceso ARFIMA

Se dice que un proceso estocástico  $\{Z_t\}$  sigue un proceso ARFIMA( $p, d, q$ ) si es una solución a la ecuación

$$\phi(B)(1 - B)^d Z_t = \theta_0 + \theta(B)a_t, \quad t = 1, \dots, T \quad (1)$$

donde  $\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p$  y  $\theta(B) = 1 - \theta_1 B - \dots - \theta_q B^q$  son, respectivamente, los polinomios autorregresivo y de medias móviles de orden  $p$  y  $q$  en términos del operador de rezago  $B$  de un proceso ARMA, cuyos ceros están fuera del círculo unidad y sin raíces comunes;  $d$  y  $\theta_0$  son números reales, y  $a_t$  son variables aleatorias no observables, independientes e idénticamente distribuidas con media cero y varianza finita  $\sigma_a^2$ , y  $(1 - B)^d = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{d}{k} (-B)^k$  es el operador de diferencia fraccional.

### 2.2. Algunas propiedades del proceso ARFIMA

Suponga que sigue un proceso ARFIMA( $p, d, q$ ). Si  $d > -0.5$ , entonces  $Z_t$  es invertible; si  $d < 0.5$ ,  $Z_t$  es estacionario; si  $-0.5 < d < 0$ , entonces la ACF de  $Z_t$  decrece más rápido que cuando  $0 < d < 0.5$ , y el proceso exhibe una fuerte reversión a la media. En este último caso, el proceso es llamado antipersistente. Si  $0 < d < 0.5$ ,  $Z_t$  es estacionario de memoria larga. Hosking (1981) prueba que en esta situación existe una constante positiva  $C_p$  tal que

$$\rho_k \approx C_p k^{2d-1}, \quad k \rightarrow \infty \quad (2)$$

Es decir, la ACF decae hiperbólicamente hacia cero y no es sumable. La expresión exacta de la función de autocorrelación es derivada en Hosking (1981).

Otra de las propiedades que distingue los modelos ARFIMA de los modelos ARMA de memoria corta y de los modelos integrados ARIMA es la forma en que el proceso responde a un cambio unitario en la perturbación del modelo. En un modelo ARIMA, el efecto de una innovación sobre el nivel futuro de la serie es persistente y no hay reversión a la media, mientras que, en un modelo ARFIMA, el efecto acaba desapareciendo, aunque a un ritmo más lento que el exponencial presente en los procesos ARMA. Para una descripción más detallada y completa de los procesos de larga memoria véase Beran (1994), Baillie (1996), Robinson (2003) y Brockwell & Davies (2006).

El proceso ARFIMA( $p, d, q$ ) proporciona una gran flexibilidad en la modelación del comportamiento dinámico de una serie temporal. Este permite describir simultáneamente las propiedades dinámicas a largo plazo a través del parámetro  $d$ , y la correlación serial a corto plazo a través de los parámetros de la componente ARMA del modelo.

### 3. Procedimiento propuesto para contrastar la hipótesis de larga memoria

Considere el anterior proceso ARFIMA( $p, d, q$ ) estacionario e invertible,  $\phi(B)(1-B)^d Z_t = \theta_0 + \theta(B)a_t$ , donde los polinomios  $\phi(B)$  y  $\theta(B)$  satisfacen las mismas condiciones de regularidad exigidas para el modelo ARMA( $p, q$ ).

Si  $d > -0.5$ , es decir, el proceso es invertible, entonces podemos reescribirlo como

$$(1 - B)^d \pi(B) Z_t = a_t \quad (3)$$

donde  $\pi(B) = \phi(B)/\theta(B) = 1 - \pi_1 B - \pi_2 B^2 - \dots$  es la componente a corto plazo del modelo ARFIMA.

Seguendo a Said & Dickey (1984), para cierto orden  $p^*$  suficientemente grande, el proceso anterior puede ser aproximado como

$$(1 - B)^d \pi^*(B) Z_t = a_t \quad (4)$$

donde  $\pi^*(B) = 1 - \pi_1^* B - \dots - \pi_{p^*}^* B^{p^*}$ .

Basados en este modelo aproximado ARFIMA( $p^*, d, 0$ ), el procedimiento propuesto sugiere contrastar la hipótesis nula de memoria corta,  $H_0 : d = 0$ , con la alternativa de memoria larga  $H_1 : d > 0$ , empleando los resultados asintóticos de la distribución del estimador máximo verosímil del parámetro  $d$ . Es decir, el estadístico de la prueba es

$$t_d = \frac{\hat{d}}{se(\hat{d})} \quad (5)$$

donde  $\hat{d}$  es el estimador máximo verosímil de  $d$ ,  $se(\hat{d})$  es la estimación de su error estándar y bajo  $H_0$ ,  $t_d \xrightarrow{dist} N(0, 1)$ .

Las propiedades de tamaño y potencia dependen de la selección de  $p^*$ . Las simulaciones realizadas en la siguiente sección mostraron que la elección de  $p^* \approx T^{1/3}$  parece adecuada. Schwert (1989) sugiere seleccionar  $p^* = \lfloor c(T/100)^{1/l} \rfloor$ , donde  $\lfloor x \rfloor$  indica la parte entera del argumento  $x$ . Aunque se probaron las propuestas con  $c = 8.12$  y  $l = 4$ , la primera aproximación parece funcionar mejor. Una vez estimado el modelo preliminar, la inferencia sobre  $d$  puede mejorarse usando los resultados obtenidos en dicha estimación con el fin de identificar un modelo más adecuado para el proceso. En la sección 5 se ilustra el procedimiento.

## 4. Descripción de las pruebas de larga memoria empleadas para la evaluación del procedimiento propuesto

Antes de proceder con la evaluación del comportamiento de la nueva prueba, se describirá brevemente cada uno de los contrastes de larga memoria alternativos usados en el estudio.

### La prueba de Geweke y Porter-Hudak (1983)

El contraste semiparamétrico de larga memoria de Geweke & Porter-Hudak (1983) se basa en la inferencia sobre el estimador del parámetro de diferenciación fraccional de la ecuación de regresión de mínimos cuadrados en el dominio de la frecuencia

$$\log I_z(w_j) = c + d \log(4 \sin^2(w_j/2)) + \varepsilon_j$$

donde  $I_z(w_j)$  es el periodograma de  $Z_t$  en la frecuencia  $w_j = 2\pi j/T$  con  $j = 1, \dots, m = \lfloor T^{1/2} \rfloor$ , donde  $\lfloor x \rfloor$  denota el mayor entero que es menor o igual a  $x$ .

Geweke & Porter-Hudak (1983) argumentan que cuando  $-0.5 < d < 0$  y se cumplen algunas condiciones adicionales, entonces

$$GPH = \frac{\hat{d} - d}{\text{var}(\hat{d})^{1/2}} \xrightarrow{dist} N(0, 1)$$

donde  $\text{var}(\hat{d})^{1/2} = \pi^2/6 \left( \sum_{j=1}^m (R_j - \bar{R})^2 \right)^{-1}$  con  $R_j = \log(4 \sin^2(w_j/2))$ .

El estimador GPH es simple de aplicar y robusto a no normalidad; sin embargo, presenta problemas de sesgo y eficiencia en presencia de componentes a corto plazo con raíces cercanas al círculo de unidad del proceso  $Z_t$ .

### El contraste de Kwiatowski, Phillips, Schmidt y Shin (1992) (KPSS)

El contraste de KPSS, desarrollado para probar la hipótesis nula de estacionariedad, también puede emplearse para probar larga memoria (Lee & Schmidt 1996). Esta prueba está basada en la representación estructural  $Z_t = \delta_0 + \delta_1 t + r_t + \varepsilon_t$ ,  $r_t = r_{t-1} + u_t$ , donde  $\varepsilon_t$  es un proceso estacionario y  $u_t \sim i.i.d(0, \sigma_u^2)$ . La hipótesis nula de corta memoria del contraste es  $H_0 : \sigma_u^2 = 0$  contra  $H_1 : \sigma_u^2 > 0$ , donde el estadístico de prueba tipo, multiplicadores de Lagrange (LM), está dado por

$$LM_{KPSS} = T^{-2} \sum_{t=1}^T S_t^2 / \hat{\sigma}_{\hat{\varepsilon}}^2$$

donde  $S_t = \sum_{i=1}^t \varepsilon_i$  es la suma parcial de los residuales de la regresión de  $Z_t$  sobre una constante y una tendencia lineal,  $\hat{\varepsilon}_t$ , y  $\hat{\sigma}_{\hat{\varepsilon}}^2 = \sum_{t=1}^T \hat{\varepsilon}_t^2 / T$  es la varianza de los

residuales. Los valores críticos para la prueba fueron encontrados por Kwiatkowski et al. (1992).

Cuando  $\varepsilon_t \sim i.i.d(0, \sigma_\varepsilon^2)$ , entonces  $\sigma_\varepsilon^2$  converge a  $\sigma^2$ . En caso contrario, el denominador adecuado para el estadístico es un estimador de  $\sigma^2$  y no de  $\hat{\sigma}_\varepsilon^2$ , donde  $\sigma^2$  es la varianza a largo plazo definida por  $\sigma^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} T^{-1} E(S_t^2)$ . Un estimador consistente para  $\sigma^2$  está dado por el estimador de Newey & West (1987):

$$s_{T,l}^2 = T^{-1} \sum_{t=1}^T \hat{\varepsilon}_t^2 + 2T^{-1} \sum_{s=1}^l w(s,l) \sum_{t=s+1}^T \hat{\varepsilon}_t \hat{\varepsilon}_{t-s}$$

con  $w(s,l) = 1 - s/(l+1)$ ,  $l = \lfloor 8(T/100)^{2/25} \rfloor$ .<sup>1</sup>

### La prueba de Robinson (1994)

El contraste de Robinson (1994) es una prueba semiparamétrica que emplea el enfoque del dominio de la frecuencia a partir de la estimación de la densidad espectral de  $Z_t$  para obtener estimaciones consistentes del coeficiente de Hurst (1951),  $H = d + \frac{1}{2}$ , o equivalentemente del parámetro de diferencia fraccional  $d = H - \frac{1}{2}$ .

El estimador consistente del coeficiente de Hurst para contrastar  $H_0 : H = 1/2$  con  $H_1 : H > 1/2$  (equivalente a  $H_0 : d = 0$  contra  $H_1 : d > 0$ ) está dado por

$$\hat{H}_{m,b} = 1 - \frac{\log(\hat{F}(b\omega_m)/\hat{F}(\omega_m))}{2 \log(b)}$$

el cual está basado en el estimador del periodograma promedio entre la frecuencia cero y  $\omega = 2\pi m/T$ , definido como  $\hat{F}(\omega) = 2\pi T^{-1} \sum_{j=1}^{\lfloor T\omega/2\pi \rfloor} I(\omega_j)$  con  $\omega_j = 2\pi j/T$  y  $b \in (0, 1)$  y donde  $I(\omega_j) = |(2\pi T)^{-1/2} \sum_{t=1}^T Z_t e^{it\omega_j}|^2$  es el periodograma. Usualmente se asume  $b = 1/2$  y  $m = \lfloor T^{1/2} \rfloor$ .

Se desconoce la distribución asintótica del estimador. Para  $1/2 < H < 3/4$  o ( $0 < d < 1/4$ ),  $m^{1/2}(\hat{H}_{m,b} - H)$  converge en el límite a la distribución normal (Lobato & Robinson 1996). Una de las principales desventajas de la prueba es su pobre comportamiento en términos del sesgo y error cuadrático medio.

### La prueba de Lobato y Robinson (1998)

El estadístico de prueba tipo LM, de Lobato & Robinson (1998), para contrastar  $H_0 : d = 0$  con  $H_1 : d > 0$  está dado por

$$LM_{LR} = \left( m^{1/2} \hat{C}_1 / \hat{C} \right)^2 \longrightarrow \chi_1^2$$

con  $\hat{C}_k = m^{-1} \sum_{j=1}^m \nu_j^k \operatorname{Re}\{I(\omega_j)\}$ ,  $\hat{C} = \hat{C}_0$ , donde las expresiones de  $I(\omega_j)$  y  $\nu_j$  están dadas por  $I(\omega_j) = |(2\pi T)^{-1/2} \sum_{t=1}^T Z_t e^{it\omega_j}|^2$  y  $\nu_j = \log j - m^{-1} \sum_{j=1}^m \log j$ .

<sup>1</sup>Otras propuestas para el ancho de banda son  $l = \lfloor 4(T/100)^{1/4} \rfloor$  y  $l = \lfloor 12(T/100)^{1/4} \rfloor$ .

### La prueba de Tanaka (1999)

A diferencia de Robinson (1994), Tanaka (1999) aborda el problema de estimación e inferencia sobre el parámetro de diferenciación fraccional en el dominio del tiempo, proponiendo una prueba tipo LM con base en la estimación máximo verosímil del modelo ARFIMA  $\phi(B)(1-B)^d Z_t = \theta(B)a_t$  con  $\phi(B)$  y  $\theta(B)$  definidos como en (1) y bajo el supuesto de normalidad de  $a_t$ .

La prueba LM para contrastar la hipótesis nula de corta memoria contra la alternativa de larga memoria está dada por el estadístico

$$LM_{TANAKA} = T^{-1/2} \sum_{k=1}^{T-1} \frac{1}{k} \hat{\rho}_k$$

donde  $\hat{\rho}_k = \sum_{t=k+1}^T \hat{a}_{t-k} \hat{a}_t / \sum_{t=k+1}^T \hat{a}_t^2$  es la autocorrelación de orden  $k$  de los residuales  $a_t = \hat{\phi}(B) \hat{\theta}^{-1}(B) (1-B)^d Z_t$ . Tanaka (1999) muestra que el estadístico tiene una distribución límite normal.

### La prueba de Harris, McCabe y Leybourne (2008) (HML)

La prueba de HML para contrastar la hipótesis nula de corta memoria con alternativas de larga memoria es una modificación de la prueba de Tanaka (1999) calculada sobre el proceso  $(1-B)^d Z_t = a_t$ , donde el estadístico se construye solamente para las autocorrelaciones muestrales de orden superior, esto es,

$$LM_{h,HML} = (T-h)^{-1/2} \sum_{k=h}^{T-1} \frac{\hat{\rho}_k}{k-h+1}$$

La novedad del estadístico modificado radica en que este elimina los efectos de la presencia de parámetros ruidosos inducidos por la autocorrelación de corta memoria no observada o porque el modelo paramétrico ajustado ARMA, a corto plazo, no aproxima el verdadero proceso generador de los datos, lo cual causa problemas de distorsión de tamaño en las pruebas (Harris et al. 2008). El estadístico se distribuye asintóticamente normal con la hipótesis nula.

## 5. Experimento Monte Carlo

Para estudiar el comportamiento del procedimiento propuesto, se simuló el modelo ARFIMA(1,1)

$$(1 - \phi B)(1 - B)^d Z_t = (1 - \theta B)a_t \quad (6)$$

para los valores de  $\phi = 0, 0.5, 0.9$ ,  $\theta = -0.8, -0.4, 0, 0.4, 0.8$  y  $d = 0, 0.2, 0.4$ . El proceso de ruido blanco  $a_t$  sigue una distribución  $N(0, 1)$ . Se realizaron simulaciones para realizaciones de tamaño  $T = 500, 1000$ . Para la prueba propuesta se



utilizó  $p^* = 8$  en el caso de  $T = 500$  y de  $p^* = 10$  para  $T = 1000$ . Las simulaciones se realizaron empleando el programa TSM, versión 4.24 (Davidson 2007), y la estimación máximo verosímil condicional.

Los resultados de la simulación, usando 5000 repeticiones, fueron comparados con los presentados por Harris et al. (2008) (HML), que compara las pruebas de Kwiatkowski et al. (1992) (KPSS), Robinson (1994), Lobato & Robinson (1998) y Tanaka (1999). Estas tres últimas requieren la parametrización del modelo a corto plazo para  $a_t$ ; por tanto, se calcularon versiones para estas pruebas suponiendo que  $a_t$  sigue procesos AR(1) y ARMA(1,1). Se consideraron dos elecciones para el ancho de banda. La primera, sugerida por Lobato & Robinson (1998), se basa en una aproximación AR(1) del espectro de  $a_t$ . La segunda versión usa una aproximación ARMA(1,1) del espectro de  $a_t$ . Finalmente, se incluyen los resultados para la prueba de Geweke & Porter-Hudak (1983) (GPH). Las potencias fueron calculadas usando un nivel de significancia de  $\alpha = 0.05$ .

La tabla 1 presenta los resultados para el caso  $d = 0$ , es decir, el tamaño de las pruebas. Para  $T = 500$  observaciones, el tamaño promedio de la prueba propuesta es 0.064, el cual está cerca de su nivel nominal y se comporta bien frente a las demás pruebas alternativas. Para el caso de la prueba de Robinson y Tanaka bajo un AR(1), se observa un tamaño promedio de 0.33 y un comportamiento errático, con tamaños hasta de 1.0. La prueba de Lobato & Robinson (1998), bajo un AR(1), presenta un tamaño promedio 0.139 y, en algunos casos, hay alejamientos grandes del tamaño nominal (hasta de 0.963). Para la prueba GPH, el tamaño promedio es 0.255 y presenta grandes distorsiones en presencia de coeficientes grandes en la componente autorregresiva (hasta de 0.738).

Para  $T = 1000$  observaciones, el tamaño promedio de la prueba propuesta es 0.061, acercándose más al nivel nominal. La prueba de Robinson y Tanaka, bajo un AR(1), obtiene un tamaño promedio de 0.354, el cual aumenta a pesar de que el tamaño muestral es mayor, y de nuevo sigue mostrando comportamiento errático, con tamaños hasta de 1.0. La prueba de Lobato & Robinson (1998), bajo un AR(1), ahora con un tamaño de 0.168, también presenta un aumento en el tamaño promedio, y de nuevo hay algunos casos con alejamientos grandes del tamaño nominal (hasta de 0.999). La prueba de Lobato & Robinson (1998), bajo un ARMA(1,1), aumenta su tamaño de 0.05 a 0.065. Finalmente, la prueba GPH disminuye su tamaño promedio a 0.213, pero sigue presentando grandes distorsiones en presencia de coeficientes grandes en la componente autorregresiva.

La tabla 2 presenta la potencia de las pruebas para  $d = 0.2$ . Para  $T = 500$ , las pruebas con grandes distorsiones en su tamaño, Robinson (1994) y Tanaka (1999) AR(1) y GPH, que las hacen de poca utilidad práctica, obtienen las potencias promedio mayores de 0.631 y 0.531, respectivamente. Estas pruebas son inestables, mostrando potencias de cero o próximas a cero en algunos de los casos de componentes de media móviles grandes y positivas. El procedimiento propuesto, que conserva un tamaño adecuado, obtiene la mayor potencia promedio (0.40) entre las demás pruebas, incluida la prueba de Robinson (1994) y Tanaka (1999), que utiliza la especificación ARMA(1,1) del verdadero modelo a corto plazo. La menor potencia la obtiene la prueba HLM (0.171).

TABLA 1: Tamaño de las pruebas.

$\phi$	$\theta$									
	-0.8	-0.4	0	0.4	0.8	-0.8	-0.4	0	0.4	0.8
	$T = 500$					$T = 1000$				
	NUEVA									
0.0	0.068	0.038	0.039	0.038	0.000	0.081	0.047	0.044	0.039	0.000
0.5	0.085	0.047	0.040	0.049	0.002	0.075	0.044	0.050	0.044	0.003
0.9	0.155	0.092	0.082	0.065	0.159	0.135	0.071	0.073	0.060	0.152
	HLM									
0.0	0.044	0.041	0.042	0.048	0.046	0.048	0.042	0.046	0.046	0.045
0.5	0.042	0.038	0.039	0.044	0.049	0.047	0.046	0.044	0.045	0.049
0.9	0.072	0.064	0.074	0.076	0.058	0.053	0.050	0.054	0.052	0.050
	KPSS									
0.0	0.053	0.053	0.052	0.052	0.068	0.057	0.057	0.056	0.047	0.049
0.5	0.060	0.060	0.058	0.054	0.040	0.063	0.063	0.062	0.054	0.034
0.9	0.117	0.116	0.116	0.116	0.114	0.115	0.115	0.116	0.114	0.111
	Robinson (1994)					Tanaka(1999) AR(1)				
0.0	0.004	0.002	0.024	0.000	0.000	0.006	0.000	0.029	0.000	0.000
0.5	1.000	0.847	0.016	0.112	0.000	1.000	0.994	0.024	0.200	0.000
0.9	1.000	1.000	0.048	0.015	0.913	1.000	1.000	0.045	0.009	0.997
	Robinson (1994)					Tanaka(1999) ARMA(1,1)				
0.0	0.022	0.024	0.023	0.021	0.014	0.031	0.028	0.027	0.028	0.017
0.5	0.020	0.017	0.016	0.010	0.013	0.024	0.024	0.024	0.015	0.020
0.9	0.049	0.043	0.029	0.008	0.019	0.046	0.038	0.030	0.014	0.017
	Lobato & Robinson (1998) AR(1)									
0.0	0.040	0.052	0.041	0.000	0.000	0.046	0.057	0.047	0.000	0.000
0.5	0.028	0.036	0.081	0.272	0.000	0.040	0.049	0.097	0.373	0.000
0.9	0.034	0.036	0.041	0.461	0.963	0.066	0.071	0.069	0.611	0.999
	Lobato & Robinson (1998) ARMA(1,1)									
0.0	0.105	0.111	0.016	0.014	0.009	0.111	0.114	0.020	0.016	0.011
0.5	0.083	0.080	0.077	0.034	0.007	0.099	0.095	0.095	0.054	0.012
0.9	0.037	0.039	0.042	0.041	0.057	0.067	0.073	0.070	0.070	0.066
	GPH									
0.0	0.053	0.053	0.050	0.048	0.004	0.049	0.054	0.052	0.044	0.009
0.5	0.072	0.076	0.073	0.067	0.005	0.063	0.065	0.061	0.054	0.012
0.9	0.738	0.735	0.730	0.720	0.402	0.606	0.604	0.601	0.579	0.351

Para  $T = 1000$ , todas las pruebas aumentan su potencia promedio. La prueba de Robinson (1994) y Tanaka (1999), bajo un AR(1), alcanza la mayor potencia promedio, pero es la que tiene mayores distorsiones en su tamaño y, como antes, en algunos casos tiene potencia cero (componentes de media móviles grandes y positivas). Le sigue la prueba de Robinson (1994) y Tanaka (1999) bajo un ARMA(1,1), la cual usa la verdadera especificación del término de error, que la hace de poco uso real en la práctica. La siguiente potencia promedio la obtiene la prueba GPH, la cual posee grandes sesgos en su tamaño. Las pruebas de Lobato y Robinson logran potencias muy similares. Con la especificación AR(1), la potencia es inestable, presentando potencia de 0 en algunos casos (componentes de media móviles grandes y positivas). Con la especificación ARMA(1,1), la prueba usa una información con la que generalmente no se cuenta en aplicaciones reales. La prueba propuesta obtiene

una potencia promedio de 0.471 y, en general, las mayores potencias en el caso de componentes de media móviles grandes y positivas. Finalmente, la prueba HLM logra la menor potencia promedio (0.217).

TABLA 2: Potencia de las pruebas para  $d = 0.2$ .

$\phi$	$\theta$									
	-0.8	-0.4	0	0.4	0.8	-0.8	-0.4	0	0.4	0.8
	$T = 500$					$T = 1000$				
	NUEVO									
0.0	0.423	0.373	0.414	0.518	0.645	0.523	0.484	0.526	0.421	0.705
0.5	0.411	0.325	0.333	0.392	0.598	0.495	0.450	0.452	0.516	0.727
0.9	0.342	0.271	0.268	0.259	0.438	0.359	0.318	0.328	0.312	0.449
	HLM									
0.0	0.133	0.135	0.134	0.106	0.053	0.198	0.188	0.197	0.153	0.056
0.5	0.143	0.136	0.143	0.139	0.080	0.206	0.200	0.204	0.203	0.100
0.9	0.284	0.282	0.285	0.280	0.235	0.320	0.318	0.318	0.310	0.280
	KPSS									
0.0	0.198	0.196	0.198	0.205	0.150	0.255	0.253	0.253	0.257	0.188
0.5	0.196	0.197	0.196	0.197	0.151	0.250	0.250	0.251	0.253	0.209
0.9	0.280	0.280	0.281	0.276	0.261	0.311	0.311	0.310	0.310	0.300
	Robinson (1994)					Tanaka(1999) AR(1)				
0.0	0.906	0.416	0.799	0.417	0.000	0.999	0.788	0.984	0.733	0.000
0.5	1.000	1.000	0.157	0.810	0.000	1.000	1.000	0.422	0.987	0.000
0.9	1.000	1.000	0.962	0.000	0.997	1.000	1.000	0.999	0.000	1.000
	Robinson (1994)					Tanaka(1999) ARMA(1,1)				
0.0	0.752	0.599	0.144	0.605	0.148	0.974	0.914	0.417	0.903	0.352
0.5	0.180	0.184	0.188	0.175	0.193	0.454	0.465	0.486	0.473	0.464
0.9	0.938	0.812	0.514	0.131	0.148	0.995	0.959	0.716	0.157	0.420
	Lobato & Robinson (1998) AR(1)									
0.0	0.382	0.541	0.879	0.410	0.000	0.655	0.807	0.985	0.793	0.000
0.5	0.122	0.169	0.354	0.842	0.000	0.309	0.372	0.622	0.973	0.000
0.9	0.145	0.152	0.154	0.162	0.997	0.371	0.379	0.375	0.384	1.000
	Lobato & Robinson (1998) ARMA(1,1)									
0.0	0.813	0.736	0.251	0.427	0.097	0.964	0.928	0.494	0.806	0.258
0.5	0.362	0.368	0.354	0.306	0.107	0.629	0.631	0.623	0.575	0.293
0.9	0.145	0.152	0.154	0.150	0.154	0.371	0.379	0.375	0.378	0.352
	GPH									
0.0	0.396	0.384	0.379	0.347	0.089	0.477	0.483	0.486	0.462	0.234
0.5	0.421	0.421	0.419	0.411	0.107	0.505	0.505	0.503	0.483	0.256
0.9	0.948	0.945	0.946	0.938	0.813	0.939	0.939	0.931	0.934	0.847

La tabla 3 presenta los resultados para  $d = 0.4$ . Para  $T = 500$ , las pruebas con grandes distorsiones en su tamaño, Robinson (1994) y Tanaka (1999) AR(1) y GPH, que las hacen de poca utilidad práctica, obtienen las potencias promedio mayores de 0.644 y 0.831, respectivamente. Estas pruebas son inestables mostrando potencias bajas, y en algunas casos cercanas a cero, cuando la componente de media móvil es grande y positiva. El procedimiento propuesto, que conserva un tamaño adecuado, obtiene la mayor potencia promedio (0.597) entre las demás pruebas, incluida la prueba de Robinson (1994) y Tanaka (1999), que utiliza la

especificación ARMA(1,1) del verdadero modelo a corto plazo. La menor potencia promedio la obtiene la prueba KPSS (0.392).

Para  $T = 1000$ , todas las pruebas aumentan su potencia promedio. La prueba GPH obtiene la mayor potencia promedio (0.922), pero también tiene grandes sesgos en su tamaño. Le sigue la prueba de Lobato y Robinson bajo un AR(1), con una potencia promedio de 0.787. Sin embargo, esta prueba presenta también algunas distorsiones importantes en su tamaño. La siguiente potencia promedio de 0.783 la alcanza la prueba de Robinson (1994) y Tanaka (1999), que utiliza la especificación ARMA(1,1) del verdadero modelo a corto plazo. La siguiente potencia promedio de 0.772 la obtiene la prueba propuesta, la cual conserva un tamaño adecuado y su comportamiento es estable. La prueba KPSS es nuevamente la prueba con menor potencia promedio (0.510).

TABLA 3: Potencia de las pruebas para  $d = 0.4$ .

	$\theta$									
	-0.8	-0.4	0	0.4	0.8	-0.8	-0.4	0	0.4	0.8
	$T = 500$					$T = 1000$				
	NUEVO									
0.0	0.886	0.591	0.630	0.487	0.412	0.866	0.829	0.651	0.710	0.798
0.5	0.685	0.635	0.654	0.710	0.736	1.000	0.780	1.000	0.893	0.769
0.9	0.525	0.476	0.476	0.474	0.577	0.677	0.623	0.608	0.591	0.781
	HLM									
0.0	0.396	0.390	0.391	0.388	0.144	0.585	0.580	0.581	0.577	0.237
0.5	0.400	0.402	0.407	0.400	0.301	0.591	0.592	0.585	0.582	0.491
0.9	0.605	0.595	0.595	0.602	0.545	0.713	0.706	0.714	0.710	0.686
	KPSS									
0.0	0.368	0.371	0.371	0.368	0.380	0.495	0.495	0.488	0.486	0.515
0.5	0.370	0.372	0.370	0.372	0.375	0.496	0.496	0.497	0.492	0.501
0.9	0.436	0.434	0.433	0.436	0.420	0.540	0.540	0.539	0.543	0.531
	Robinson (1994)					Tanaka(1999)		AR(1)		
0.0	0.997	0.629	0.948	0.998	0.009	1.000	0.943	1.000	1.000	0.021
0.5	1.000	1.000	0.266	0.546	0.469	1.000	1.000	0.439	0.884	0.817
0.9	1.000	1.000	1.000	0.032	0.061	1.000	1.000	1.000	0.014	0.038
	Robinson (1994)					Tanaka(1999)		ARMA(1,1)		
0.0	0.904	0.683	0.391	0.217	0.608	0.998	0.963	0.843	0.067	0.922
0.5	0.209	0.106	0.101	0.311	0.233	0.349	0.232	0.283	0.763	0.509
0.9	1.000	1.000	0.993	0.643	0.102	1.000	1.000	1.000	0.803	0.232
	Lobato & Robinson (1998)					AR(1)				
0.0	0.527	0.700	0.970	0.997	0.035	0.849	0.943	0.999	1.000	0.201
0.5	0.247	0.253	0.344	0.905	0.566	0.628	0.631	0.706	0.994	0.874
0.9	0.366	0.366	0.363	0.352	0.915	0.744	0.751	0.747	0.750	0.993
	Lobato & Robinson (1998)					ARMA(1,1)				
0.0	0.944	0.841	0.425	0.431	0.501	0.998	0.982	0.762	0.658	0.880
0.5	0.361	0.388	0.411	0.432	0.363	0.724	0.747	0.766	0.776	0.752
0.9	0.366	0.366	0.363	0.352	0.326	0.744	0.751	0.747	0.750	0.710
	GPH									
0.0	0.810	0.810	0.804	0.777	0.475	0.907	0.907	0.908	0.900	0.778
0.5	0.828	0.834	0.826	0.818	0.541	0.924	0.919	0.918	0.906	0.793
0.9	0.993	0.992	0.992	0.992	0.967	0.993	0.996	0.995	0.994	0.987

## 6. Aplicación a la identificación de un modelo simulado ARFIMA-GARCH

A continuación se ilustra la aplicación del procedimiento propuesto para la identificación y estimación de un modelo simulado ARFIMA(0,  $d$ , 2)–ARCH(2),

$$\begin{aligned}(1 - B)^d Z_t &= (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2) a_t, & a_t &= \sigma_t \varepsilon_t \\ \sigma_t^2 &= \alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2 + \alpha_2 a_{t-2}^2\end{aligned}\quad (7)$$

donde las  $\varepsilon_t \sim i.i.d.N(0, 1)$ ,  $d = 0.3$ ,  $\theta_1 = 0.4$ ,  $\theta_2 = 0.3$ ,  $\alpha_0 = 0.1$ ,  $\alpha_1 = 0.5$ ,  $\alpha_2 = 0.2$ . Se generaron  $T = 500$  observaciones. Las estimaciones presentadas fueron realizadas con el programa TSM, versión 4.24 (Davidson 2007), usando máxima verosimilitud condicional.

### Procedimiento de identificación y estimación

- i) Aproxime la componente a corto plazo por medio de un proceso autorregresivo de orden  $p^*$ , donde  $p^* = 8 \approx T^{1/3}$ . Estime el modelo aproximado ARFIMA(8,  $d$ , 0). Los resultados se presentan en la tabla 4.

TABLA 4: Estimación del modelo aproximado ARFIMA autorregresivo.

<i>Parameter</i>	<i>Estimate</i>	<i>Std. Err.</i>	<i>t Ratio</i>	<i>p-Value</i>
ARFIMA d	0.23426	0.12994	1.803	0.036
AR1	0.40029	0.13768	2.907	0.004
AR2	0.20112	0.05071	3.966	0.000
AR3	-0.13347	0.05016	-2.661	0.008
AR4	-0.06710	0.05350	-1.254	0.210
AR5	-0.01630	0.05397	-0.302	0.763
AR6	0.11886	0.05206	2.283	0.023
AR7	-0.03456	0.04894	-0.706	0.480
AR8	-0.00881	0.04593	-0.192	0.848
sqrt(Error Variance)	0.17380	0.00560	—	—
Ljung-Box ( <i>residuals</i> ): Q(10)	= 4.0883	0.943		
Ljung-Box ( <i>squared residuals</i> ): Q(10)	= 139.915	0.000		

La estimación de  $d$  en el modelo aproximado es significativa para un nivel de significancia mayor de 0.036. El estadístico de Ljung-Box para los residuales del modelo anterior, cuyo valor  $p$  se encuentra entre llaves, indica que el modelo aproximado captura la correlación serial presente en la serie fraccionalmente diferenciada; por tanto, la aproximación es adecuada.

- ii) Use  $\hat{d} = 0.23426$  para diferenciar fraccionalmente la serie. Es decir, obtenga la serie

$$Z_t^{\hat{d}} = (1 - B)^{0.23456} Z_t$$

Sobre esta serie utilice las técnicas tradicionales de identificación de un modelo ARMA( $p, q$ ) para la componente a corto plazo. La figura 2 muestra la

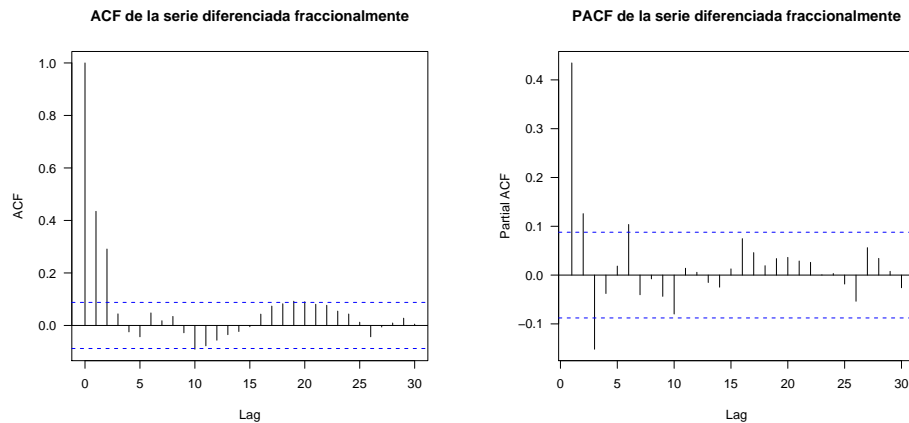


FIGURA 2: Identificación de la componente a corto plazo.

ACF muestral y la función de autocorrelación parcial (PACF) muestral para la serie fraccionalmente diferenciada.

Los resultados obtenidos parecen ser consistentes con un MA(2).

- iii) Estime el modelo ARFIMA(0,  $d$ , 2) identificado y obtenga sus residuales. La tabla 5 presenta los resultados de la estimación.

TABLA 5: Estimación del modelo identificado para la componente a corto plazo.

<i>Parameter</i>	<i>Estimate</i>	<i>Std. Err.</i>	<i>t Ratio</i>	<i>p-Value</i>
ARFIMA $d$	0.30269	0.05320	5.690	0.000
MA1	0.30677	0.05844	5.249	0.000
MA2	0.28149	0.04899	5.746	0.000
sqrt(Error Variance)	0.17523	0.00560	—	—
Ljung-Box ( <i>residuals</i> ): Q(10) = 14.362 0.157				
Ljung-Box ( <i>squared residuals</i> ): Q(10) = 157.431 0.000				

El estadístico de Ljung-Box para los residuales del modelo anterior confirma que el modelo MA(2) es adecuado para la componente a corto plazo. Sin embargo, el mismo estadístico, para los residuales al cuadrado, indica la posible existencia de efectos ARCH en la varianza del proceso. La ACF y PACF muestral de los residuales al cuadrado aparecen en la figura 3.

Los resultados parecen ser consistentes con un proceso ARCH(2, 0).

- iv) Estime simultáneamente todos los parámetros del modelo identificado. La tabla 6 presenta los resultados de la estimación del modelo ARFIMA(0,  $d$ , 2)–ARCH(2).

Note que el modelo identificado corresponde a la especificación del modelo simulado. La prueba de la hipótesis  $H_0$  de memoria corta contra la hipótesis  $H_1$  de memoria larga puede realizarse con el modelo correctamente especificado. En este caso, mejora la inferencia sobre  $d$ .

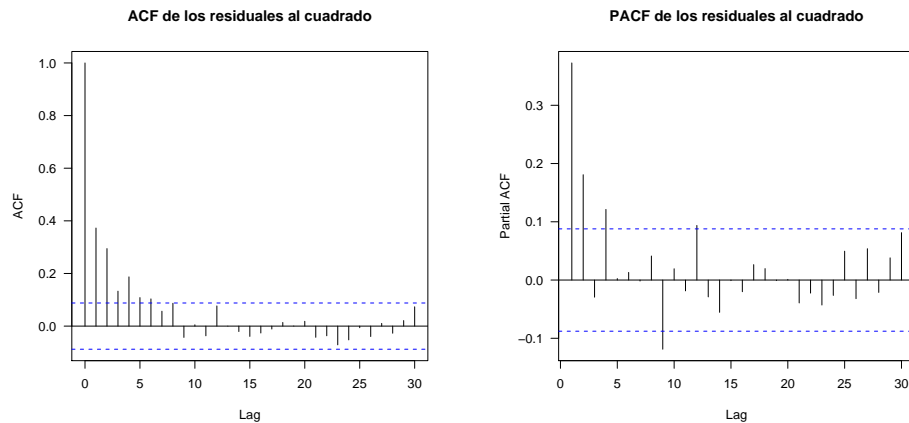


FIGURA 3: Identificación de la componente ARCH.

TABLA 6: Estimación del modelo completo.

<i>Parameter</i>	<i>Estimate</i>	<i>Std. Err.</i>	<i>t Ratio</i>	<i>p-Value</i>
ARFIMA $d$	0.30988	0.04791	6.468	0.000
MA1	0.36660	0.05140	7.132	0.000
MA2	0.29739	0.03707	8.022	0.000
sqrt(GARCH Intercept)	0.09661	0.007	—	—
GARCH Alpha1	0.41718	0.09776	4.267	0.000
GARCH Alpha2	0.35162	0.09262	3.796	0.000
Ljung-Box ( <i>residuals</i> ): Q(10) = 9.4524	0.490			
Ljung-Box ( <i>squared residuals</i> ): Q(10) = 10.9165	0.364			

## 7. Conclusiones

Las siguientes son las principales conclusiones obtenidas para el procedimiento propuesto en los casos estudiados:

1. La aproximación autorregresiva para la componente a corto plazo del modelo ARFIMA permite conservar un tamaño promedio adecuado para la prueba de memoria corta. A medida que el tamaño muestral crece, el tamaño de la prueba tiende a su valor nominal.
2. La potencia promedio de la prueba propuesta es, en muchos casos, mayor que la de las otras pruebas usadas para comparación, y sus valores son más estables. A medida que el tamaño muestral crece, la potencia de la prueba aumenta.
3. En algunos casos, el procedimiento propuesto tiene menor potencia que la prueba GPH, la de Robinson-Tanaka bajo una especificación AR(1) y la de Lobato y Robinson bajo una especificación AR(1), pero estas tienen grandes distorsiones en su tamaño en presencia de componentes autorregresivos grandes y positivas. Esto las hace de poca utilidad práctica.

4. El procedimiento propuesto puede emplearse en la identificación del modelo correcto para la componente a corto plazo. En este modelo, la inferencia sobre  $d$  puede mejorarse.
5. La prueba puede emplearse para el caso en que los errores son no correlacionados serialmente, pero son dependientes, como en el caso de la familia de modelos GARCH.
6. La aplicación del procedimiento propuesto para la identificación y estimación de un modelo ARFIMA-ARCH parece funcionar bien.

[Recibido: diciembre de 2007 — Aceptado: mayo de 2008]

## Referencias

- Baillie, R. (1996), 'Long Memory Processes and Fractional Integration in Econometrics', *Journal of Econometrics* **73**, 5–59.
- Beran, J. (1994), *Statistics for Long-Memory Processes*, Chapman & Hall/CRC, New York, United States.
- Beran, J. & Ocker, D. (1999), 'SEMIFAR Forecasts, with Applications to Foreign Exchanges Rates', *Journal of Statistical Planning and Inference* **80**, 137–153.
- Bhardwaj, G. & Swanson, N. R. (2004), 'An Empirical Investigation of the Usefulness of ARFIMA Models for Predicting Macroeconomic and Financial Time Series', *Journal of Econometrics* **131**, 539–578.
- Bos, C. S., Franses, P. H. & Ooms, M. (2002), 'Inflation, Forecast Intervals and Long Memory Regression Models', *International Journal of Forecasting* **110**, 167–185.
- Brockwell, P. J. & Davies, R. (2006), *Time Series: Theory and Methods*, second edn, Springer-Verlag, New York, United States.
- Cheung, Y. W. (1993), 'Long Memory in Foreign-Exchanges Rates', *Journal of Business and Economic Statistics* **11**, 93–101.
- Cheung, Y. W. & Lai, K. (1995), 'A Search of Long Memory in International Stock Market Returns', *Journal of International Money and Finance* **14**, 597–615.
- Chio, K. & Zivot, E. (2007), 'Long Memory and Structural Changes in the Forward Discount: An Empirical Investigation', *Journal of International Money and Finance* **26**, 342–363.
- Chow, K. V., Denning, K. C., Ferris, S. & Noronha, G. (1995), 'Long-Term and Short-Term Price Memory in the Stock Market', *Economics Letters* **49**, 287–293.



- Davidson, J. (2007), 'Time Series Modelling Version 4.24'. Tomado en diciembre de 2007 de la página web.  
\*<http://www.timeseriesmodelling.com>
- Diebold, F. & Rudebush, G. (1989), 'Long Memory and Persistence in Aggregate Output', *Journal of Monetary Economics* **24**, 189–209.
- Geweke, J. & Porter-Hudak, S. (1983), 'The Estimation and Application of Long-Memory Time Series Models', *Journal of Time Series Analysis* **4**, 221–238.
- Granger, C. W. J. (1980), 'Long Memory Relationships and the Aggregation of Dynamic Models', *Journal of Econometrics* **14**, 227–238.
- Granger, C. W. J. & Joyeux, R. (1980), 'An Introduction to Long-Memory Time Series Models and Fractional Differencing', *Journal of Time Series Analysis* **1**, 15–39.
- Harris, D., McCabe, B. & Leybourne, S. (2008), 'Testing for Long Memory', *Forthcoming in Econometric Theory* **24**, 143–175.
- Hassler, U. & Wolters, J. (1995), 'Long Memory in Inflation Rates: International Evidence', *Journal of Business and Economic Statistics* **13**, 37–45.
- Hauser, M. (1997), 'Semiparametric and Nonparametric Testing for Long Memory: A Monte Carlo Study', *Empirical Economics* **22**, 247–271.
- Hosking, J. R. M. (1981), 'Fractional Differencing', *Biometrika* **68**, 165–176.
- Hurst, H. E. (1951), 'Long-Term Storage Capacity of Reservoirs', *Transactions of the American Society of Civil Engineers* **116**, 770–799.
- Hyung, N. & Franses, P. H. (2001), Structural Breaks and Long Memory in US Inflation Rates: Do They Matter for Forecasting?, Econometric institute reports, 13, Erasmus School of Economics, Erasmus University Rotterdam, Rotterdam, Netherlands.
- Kwiatkowski, D., Phillips, P. C. B., Schmidt, P. & Shin, Y. (1992), 'Testing the Null Hypothesis of Stationarity against the Alternative of a Unit Root: How Sure are we that Economic Time Series Have a Unit Root?', *Journal of Econometrics* **54**, 159–178.
- Lee, D. & Schmidt, P. (1996), 'On the Power of the KPSS Test of Stationarity against Fractionally Integrated Alternatives', *Journal of Econometrics* **73**(1), 285–302.
- Lobato, I. N. & Robinson, P. M. (1998), 'A Nonparametric Test for  $I(0)$ ', *Review of Economic Studies* **65**, 475–495.
- Lobato, I. & Robinson, P. M. (1996), 'Averaged Periodogram Estimation of Long Memory', *Journal of Econometrics* **73**, 303–324.

- Mandelbrot, B. (1962), 'Sur certains prix spéculatifs: faits empiriques et modèle basé sur les processus stables additifs de Paul Lévy', *Comptes Rendus* **254**, 3968–3970.
- Newey, W. & West, K. (1987), 'A Simple, Positive Semi-Definite, Heteroscedasticity and Autocorrelation Consistent Covariance Matrix', *Econometrica* **55**, 703–708.
- Robinson, P. (2003), *Time Series with Long Memory*, Oxford University Press, London, United Kingdom.
- Robinson, P. M. (1994), 'Semiparametric Analysis of Long-Memory Time Series', *Annals of Statistics* **22**, 515–539.
- Said, S. & Dickey, D. (1984), 'Testing for Unit Roots in Autoregressive-Moving Average Models of Unknown Order', *Biometrika* **71**, 599–607.
- Schwert, G. W. (1989), 'Tests for Unit Roots: A Monte Carlo Investigation', *Journal of Business and Economic Statistics* **7**, 147–159.
- Soofi, A., Wang, S. & Zhang, Y. (2006), 'Testing for Long Memory in the Asian Foreign Exchange Rates', *Journal of Systems Science and Complexity* **19**, 182–190.
- Sowell, F. (1992), 'Maximum Likelihood Estimation of Stationary Univariate Fractionally Integrated Time Series Models', *Journal of Econometrics* **53**, 165–188.
- Stock, J. & Watson, M. (2002), 'Macroeconomic Forecasting Using Diffusion Indexes', *Journal of Business and Economic Statistics* **20**, 147–162.
- Tanaka, K. (1999), 'The Non-stationary Fractional Unit Root', *Econometric Theory* **15**, 549–582.
- Tschernig, R. (1994), 'Long Memory in Foreign Exchange Rates Revisited', Institute of Statistics and Econometrics. Humboldt University of Berlin.
- Velasco, C. (1999), 'Gaussian Semiparametric Estimation of Non-stationary Time Series', *Journal of Time Series Analysis* **20**, 87–127.