

Revista Colombiana de Estadística  
N° 3 - 1981

## SIMULACION

*José Francisco Parra Garcés*

Profesor Asociado  
Universidad Nacional.

### Sumario.

En este artículo se presentan algunas definiciones de Simulación así como los principales métodos utilizados por dicha técnica. Se discriminan una serie de ventajas y desventajas de las técnicas de Simulación. También se enumeran las fases asociadas con el Método de Montecarlo; se explican los procedimientos para generar números aleatorios y valores de variables aleatorias con distribución de probabilidad conocida.

### Introducción.

La simulación se refiere a la operación de un modelo numérico que representa la estructura de un proceso dinámico. Dados los valores de las condiciones iniciales, los parámetros y las variables exógenas, se lleva a cabo una simulación para representar la conducta del proceso a través del tiempo.

Igualmente, la simulación es la representación

de la realidad mediante el empleo de un modelo u otro mecanismo que reaccionará del mismo modo que la realidad bajo una serie de condiciones dadas.

Simular es evaluar cursos alternativos de acción, mediante técnicas cuantitativas, basados en hechos y suposiciones, con un modelo matemático programable, a fin de facilitar la toma real de decisiones en condiciones de incertidumbre.

#### METODOS DE SIMULACION.

Montecarlo. En muchas ocasiones se tienen experimentos en los que es aconsejable utilizar algún procedimiento de muestreo pero tomar físicamente la muestra es imposible o demasiado costoso. En tales casos, a menudo se puede obtener información útil a partir de alguna clase de muestreo simulado.

El muestreo simulado implica el reemplazo del universo real de elementos por el universo teórico correspondiente, descrito por una cierta distribución de probabilidad que se supone adecuada y la selección de una muestra de esa población teórica, mediante una tabla de números aleatorios.

El método de "montecarlo" es el procedimiento para tomar esa muestra, así como la discusión de los problemas de decisión que dependen fundamentalmente de dichos métodos de muestreo.

El método se utiliza para resolver problemas que dependen de la probabilidad, en los que la experimentación física es impracticable o sumamente costosa, y donde es imposible la creación de una fórmula exacta.

Fundamentalmente se está estudiando una prolongada secuencia de fases o acontecimientos, cada uno de los cuales se relaciona con la probabilidad. Se puede escribir la función matemática para la probabilidad de cada fase o suceso, pero frecuentemente es imposible escribir una ecuación que sintetice las probabilidades de todas las fases o sucesos.

Juegos Operacionales. "Jugar" es utilizar un modelo de juego para permitir a los participantes tomar decisiones y observar el comportamiento del modelo como resultado de sus acciones.

Un "Juego operacional" es la utilización seria del juego, con el fin de determinar tanto soluciones óptimas para estrategias como estructuras óptimas para sistemas.

Los "juegos operacionales" se refieren a aquellas situaciones donde hay algún conflicto de intereses entre los jugadores o entre quienes toman decisiones, dentro de la estructura de un ambiente simulado.

Las dos formas de juegos operacionales que se

usan más extensamente, son los juegos de administración de negocios (programables) y los juegos militares.

Los participantes en los juegos de negocios deben tomar decisiones basados en informaciones del pasado. Esas decisiones crean el ambiente en el que se toman las decisiones subsiguientes, e influyen en él. Sus características son las decisiones en secuencia, una rápida retroalimentación y nuevas reacciones.

Los juegos militares son esencialmente mecanismos de adiestramiento para los dirigentes militares, que les permiten poner a prueba estrategias alternativas en condiciones bélicas simuladas.

La simulación del efecto de operación de estrategias en un sistema empresarial, basado en un modelo de juegos operacionales, muestra los resultados del juego en términos de costos o de otras bases de criterio.

Simulación de sistemas. Es un método en el que la información utilizada en el análisis de un problema complicado, se procesa mediante el funcionamiento de un modelo.

El modelo de simulación es una reproducción del ambiente de funcionamiento, y sus características

permiten que el observador analice la reacción del ambiente a ciertas actividades alternativas de la administración. Esa reacción del ambiente proporciona un medio para determinar la decisión que se tome en el problema.

Este método se distingue del enfoque de Montecarlo en los siguientes aspectos:

1. El método de simulación de sistemas obtiene muestras entre una población real, en vez de obtenerlas en una tabla de números aleatorios.

2. En la simulación de sistemas no se emplea ningún duplicado teórico de la población real.

3. El método de simulación de sistemas emplea un modelo matemático que puede resolverse analíticamente para ayudar a tomar una decisión. Sin embargo, cuando hay situaciones complicadas que no se prestan para analizarlos con un modelo matemático la técnica de montecarlo es la solución.

## VENTAJAS Y DESVENTAJAS DE LAS TECNICAS DE SIMULACION.

Ventajas. 1. Son muy útiles porque permiten experimentar con un modelo en vez del sistema real que está funcionando.

2. Las técnicas de simulación permiten que el

grupo manipule una réplica del verdadero sistema para efectuar corridas de prueba antes de comprometer a la empresa a efectuar grandes desembolsos en efectivo.

3. Los estudios de simulación constituyen una forma muy valiosa y conveniente para descomponer en subsistemas un sistema complicado. A su vez, cada subsistema puede simularse individual o conjuntamente con otros. Este tipo de simulación también permite que el observador aumente su conocimiento de lo que hace funcionar al sistema, y deja observar la relación de causa y efecto que puede dar por resultado algunas sugerencias para mejorar el sistema y sus subsistemas relativos.

4. En muchos casos en que hay relaciones complicadas de naturaleza aleatoria y predecible, es más fácil utilizar un proceso simulado, que desarrollar un complicado modelo matemático que represente todo el proceso que se estudia.

5. La simulación que utiliza algún modelo matemático del sistema, nos permite determinar mediante tanteo, los valores de las variables controlables que produzcan los mejores resultados para la empresa.

6. El empleo de juegos de negocios ha sido sumamente benéfico para el adiestramiento del personal administrativo en todos los niveles, porque permite

que los jugadores observen la reacción recíproca de sus decisiones en las políticas y objetivos de la compañía, en condiciones de incertidumbre. Como casi todos los juegos de negocios emplean computadores, dan a los participantes cierta familiaridad con el procesamiento electrónico de los datos.

7. La simulación en computadoras permite invertir el tiempo en el análisis de situaciones esencialmente dinámicas.

8. Un modelo de simulación puede explicarse más fácilmente al personal administrativo, porque esencialmente es una descripción del comportamiento de un sistema o proceso. Si es más fácil la comprensión con la simulación que con un complicado modelo matemático comparable, las probabilidades de éxito aumentan considerablemente.

Desventajas. 1. No produce soluciones óptimas, y cada corrida de simulación es como un experimento aislado que se efectúa bajo una serie de condiciones dadas, definida por una serie de valores para la solución de entrada, y por lo tanto se necesitarán muchas corridas de simulación.

2. A medida que aumenta la capacidad de empleo de la simulación, puede haber una tendencia para depender frecuentemente de esa técnica, a causa de su

relativa facilidad de aplicación, lo que puede dar por resultado la substitución de la simulación en vez de emplear técnicas matemáticas analíticas cuando son más adecuadas.

3. Cuando se hace referencia a un modelo matemático usado en un programa de simulación en computadora, puede ser imposible cuantificar todas las variables que afectan el comportamiento del sistema, o bien el número de las variables que se revisan puede sobrepasar la capacidad de la computadora de que se dispone.

Es posible que todas las entradas conocidas no estén incluidas en el modelo, debido a errores de omisión o comisión, y algunas relaciones entre los insumos y los resultados pueden desconocerse, o puede ser imposible averiguarlas. Las diversas relaciones entre las variables del sistema pueden ser tan complicadas que no puedan expresarse con una o varias ecuaciones matemáticas. Por consiguiente la simulación está sujeta a las mismas deficiencias que otros modelos matemáticos.

4. La simulación ejecutiva tiene ciertas desventajas. La simulación excesivamente simplificada hace que los participantes creen que se sobreestima a la administración. El problema consiste en la imposibilidad de incorporar todas las variables pertinentes para que la simulación sea completamente real.



En la mayor parte de los casos los participantes no actúan como lo harían en situaciones de la vida real, y hay la tendencia a considerar la simulación como artificial, hasta el punto en que su participación se relaciona con las ganancias y no con el aprendizaje. Les preocupa encontrar la clave del éxito, por ejemplo, la combinación correcta de precios, publicidad y número de vendedores que establece el modelo de juego. El deseo de ganar en términos de totales de activos y ganancias, oculta la posible experiencia del aprendizaje mismo.

#### EMPLEO DEL METODO DE MONTECARLO.

Complementando las definiciones consideradas anteriormente, el método de montecarlo es una simulación con técnicas de muestreo, o sea que en vez de obtener muestras de una población real, se obtienen de un duplicado teórico de la población.

El método de montecarlo puede emplearse para resolver varios problemas diferentes. El primero es el que comprende cierta clase de proceso estocástico, y el segundo es el tipo de problema determinístico matemático que no puede resolverse fácilmente, o tal vez de ningún modo, con métodos determinísticos.

Para el primer tipo de problemas, se han desa-

rollado métodos de montecarlo para simular datos basándose en distribuciones de probabilidad. Para el segundo tipo de problemas, puede ser posible obtener soluciones aproximadas, simulando un proceso estocástico cuya función de distribución acumulada satisface las relaciones funcionales y los requerimientos de la solución del problema determinístico.

El método de montecarlo comprende las siguientes fases:

1. Determinación de la distribución de probabilidad de la variable de que se trata.

Con los datos estadísticos disponibles sobre el comportamiento de la variable a estudiar, es preciso comprobar a través de la prueba chi-cuadrado, o por cualquier otro procedimiento, la ley de probabilidad seguida por el fenómeno en consideración.

2. Obtención de una muestra de esa distribución mediante números aleatorios.

En efecto, se usa una serie de números aleatorios para generar una serie de valores que tengan las mismas características de distribución de la experiencia real que se quiera simular.

#### GENERADOR DE NUMEROS ALEATORIOS.

Uno de los métodos más sencillos posibles para

tratar de determinar una serie de números aleatorios, comprende el empleo de 10 esferas, fichas o cosas parecidas, que sean idénticas a excepción de la enumeración de 0 a 9. Si esos elementos se seleccionan sin ningún prejuicio (de uno en uno con reemplazamiento) podemos obtener una serie de dígitos aleatorios. Podría hacerse un registro de una serie muy grande de números para usarse en los problemas, de manera que no hubiera necesidad de volver a los objetos físicos que se usaron para obtener los números aleatorios.

Otro método, con las mismas características del anterior, sería utilizar ruletas como las que se emplean en los sorteos de las loterías.

Para preparar los trabajos de tal modo que el computador pueda operar con esos datos, se ha procurado obtener números aleatorios por medio de fórmulas matemáticas que cumpliendo las pruebas estadísticas, no requieran más operaciones que las empleadas por los computadores.

Los métodos aritméticos tales como la mitad de cuadrados y el método de las congruencias, se basan generalmente en alguna clase de relación recursiva relacionada con enteros, o sea que cada número nuevo deriva del anterior.

El primer valor se escoge en forma aleatoria entre una población finita de enteros, de modo que la

máquina pueda producir un valor inicial que se requiera para iniciar la relación recursiva. En algún punto se producirá un número que ya ha ocurrido, y de ese modo se forma una secuencia de circuito cerrado con un ciclo continuo de ese punto en adelante. La longitud de esa secuencia de circuito cerrado se llama periodo del generador, y es conveniente que sea igual o casi igual al total de la población de enteros de la máquina. (El periodo puede ser mayor si se usa una relación recursiva que comprenda más de un número previo).

El problema consiste en encontrar una relación que produzca una secuencia suficientemente aleatoria de números, con un periodo prolongado y con un mínimo de tiempo de computadora. Los números generados por computadoras que logran pasar las pruebas estadísticas con respecto a su carácter aleatorio, se llaman números pseudo-aleatorios, aunque se produzcan mediante un proceso completamente determinístico.

#### METODO DE LA MITAD DE CUADRADOS,

Por lo que se refiere a los computadores, el primer método aritmético se debe a Von Neumann y consiste en tomar un número elevarlo al cuadrado, y después "decapitarlo" por los dos lados (más que "decapitarlo"); repitiendo el procedimiento un número suficiente de veces se forma la secuencia equiprobable de base con las partes centrales de cada número.

Ahora bien, en este tipo de métodos de obtención de números equiprobables, como en muchos otros parecidos, se corre el riesgo de obtener una serie periódica en la cual a partir de la obtención de una serie determinada de equiprobables, se va repitiendo continuamente la extracción de los datos, lo que hace que el método se venga abajo.

Sea el número 8632. Su cuadrado será 69923044, siendo 9230 el número equiprobable buscado, se eleva al cuadrado el número 9230, resultando el número 85192900, a partir del cual se obtiene el número equiprobable 1929, pudiéndose obtener de esta forma cuantos números aleatorios se deseen.

#### METODO DE LAS CONGRUENCIAS.

Para simulaciones manuales es posible ( y cómodo ) construir una muestra utilizando una tabla de números aleatorios; sin embargo, si se utiliza una computadora no es aconsejable este método (habría que leer la tabla de números aleatorios de tarjetas o de cinta, y estas son operaciones lentas en una computadora).

El llamado método de las congruencias arranca con un número entero arbitrario  $X_0$ , y a partir de éste se construye:

$$\begin{aligned}
 X_1 &= K X_0 \\
 X_2 &= K X_1 \\
 &\dots \\
 X_\delta &= K X_{\delta-1}
 \end{aligned}$$

donde  $K$  es un entero fijo y los valores  $X_i$  se ajustan de acuerdo con algunas reglas que se consideran más adelante.

Puede demostrarse que los números  $X_1, X_2, \dots, X_\delta$  así contruidos tienen las siguientes propiedades.

1. Cualquiera que sea  $K$  y  $X_i$ , la serie se repite a sí misma al cabo de un número de terminos  $h$ ; se dice que  $h$  es el periodo de la serie, su valor depende de  $K$  y  $X_0$ .

2. Los valores de los  $X_i$  y antes de que la serie se repita, los  $h$  valores son todos diferentes y se suceden en un orden impredecible de tal manera que, a los ojos de quien no supiera como fueron obtenidos, pasarían como ordenados al azar.

Sea por ejemplo  $K = 28$  y  $X_0 = 9$ , entonces:

$$K X_0 = 252 \quad \text{por tanto} \quad X_1 = 52$$

$$K X_1 = 28 \times 52 = 1456 \quad \text{por tanto} \quad X_2 = 56$$

$$K X_2 = 28 \times 56 = 1568 \quad \text{por tanto} \quad X_3 = 68$$

Continuando así encontraríamos 20 números dife-

rentes y  $X_{21}$  sería igual a 52 tras lo cual la serie se repite.

Si el periodo es suficientemente grande (lo cual puede lograrse escogiendo números con muchos dígitos) los valores:

$$\frac{X_1}{N} = P_1, \frac{X_2}{N} = P_2, \frac{X_3}{N} = P_3, \dots, \frac{X_\delta}{N} = P_\delta$$

pueden usarse como probabilidades acumuladas donde  $N = 10^n$  y  $n$  es el número de dígitos contenidos en cada  $X_i$ .

El valor  $X_0$  no puede terminar ni en cero, ni en cinco y tampoco ser par, es recomendable que sea cercano a la raíz cuadrada de  $10^n$ .

Una formulación adecuada para obtener el equiprobable puede ser:

$$X_i = K X_{i-1} = (10^n + 3) \times X_{i-1}$$

donde el número inicial  $X_0$  tiene  $2n$  cifras.

Al número  $X_i$  se le truncan cifras superiores (izquierda) permaneciendo las  $2n$  inferiores.

## GENERACION DE VALORES DE VARIABLES ALEATORIAS CON DISTRIBUCION DE PROBABILIDAD CONOCIDA.

Aunque los números aleatorios, tal como se definieron en la sección anterior, pueden utilizarse a veces directamente en un modelo de simulación, es más probable que deban generarse valores de variables aleatorias con distribuciones de probabilidad conocidas.

En casi todos los casos, se emplean números aleatorios para generar esos valores de variables aleatorias, mediante técnicas del tipo que se describen en esta parte; sin embargo, los valores de las variables aleatorias normalmente distribuidas pueden obtenerse en forma directa de tablas publicadas.

Debido a que el empleo de tablas no es muy práctico en los modelos de computadora, ni siquiera en el caso de distribución normal, se necesitan por lo tanto métodos programables para la generación de valores de variables aleatorias normales.

El método más directo para obtener valores de variables aleatorias con una distribución deseada, es utilizar la inversa de la expresión matemática para la función de distribución acumulativa.

Con el fin de ilustrar el procedimiento en términos generales, defínase a "Y" como una variable aleatoria, con una función de probabilidad  $f(Y)$  y



una función de distribución acumulativa  $F(y)$ . Sea  $A_1; A_2; \dots; A_n$  una muestra artificial de números aleatorios que varían entre cero y uno y sea  $F^{-1}(\cdot)$  la función inversa de  $F(\cdot)$ , entonces la relación entre  $A$  y " $Y$ " puede escribirse como:

$$y_1 = F^{-1}(A_1), y_2 = F^{-1}(A_2), \dots, y_n = F^{-1}(A_n)$$

En el caso de que  $F^{-1}(\cdot)$  no sea expresable en forma cerrada, habría que resolver para  $y_1, y_2, \dots, y_n$ , las ecuaciones correspondientes:

$$F(y_1) = A_1; F(y_2) = A_2; F(y_3) = A_3; \dots; F(y_n) = A_n$$

#### INTERPRETACION GRAFICA.

Para tomar un elemento al azar de una población descrita por la función de densidad  $f(x)$  se procede como sigue:

1. Se grafica la función acumulativa de probabilidad (el método funciona igualmente bien si se grafica el complemento  $1-F(x)$ ).

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(y) dy$$

2. Se escoge al azar un número entre cero y uno (con tantos decimales como se desee), mediante una tabla de dígitos aleatorios o mediante los procedimientos anteriormente descritos.

3. Se proyecta horizontalmente el punto sobre el eje de ordenadas que corresponde a este número aleatorio entre cero y uno, hasta que se interseca la curva  $F(x)$ .

4. Se anota el valor de  $X$  (abscisa) que corresponde al punto de intersección. Este valor " $x$ " se toma como el valor muestreado de la variable aleatoria " $X$ ".

En la gráfica siguiente se muestra el procedimiento a seguir

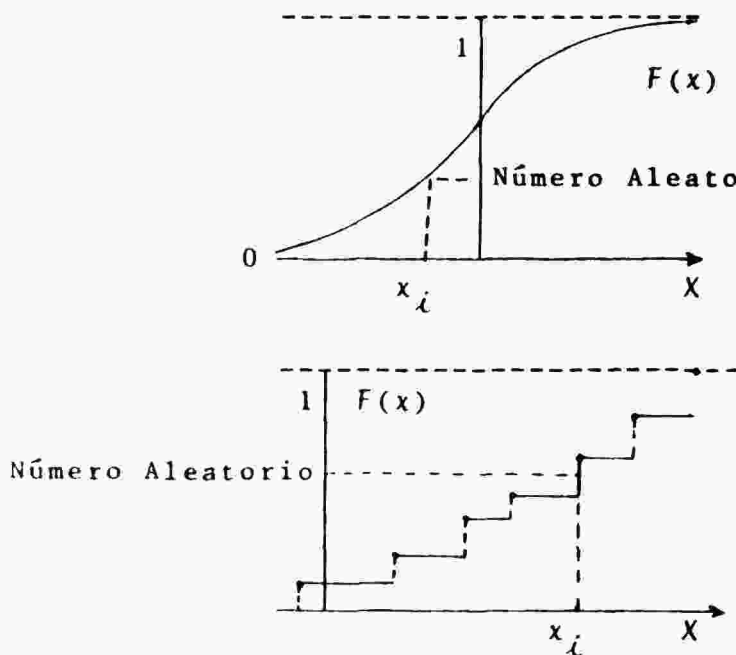


Figura N° 1

GENERACION DE VALORES DE UNA VARIABLE ALEATORIA CON  
DISTRIBUCION DE PROBABILIDAD BINARIA . $p$ .

En lo que sigue  $A_1, A_2, \dots, A_n$  representará una muestra artificial de una variable aleatoria con distribución uniforme entre 0 y 1, y  $x_1, x_2, \dots, x_n$  la muestra artificial de la distribución en consideración.

Sea  $p$  el parámetro de la distribución binaria. Definimos:

$$\begin{aligned} x_k &= 1 & \text{si} & & A_k \leq p \\ x_k &= 0 & \text{si} & & A_k > p \end{aligned}$$

Puede considerarse que este caso es la especialización general del método.

GENERACION DE VALORES DE UNA VARIABLE ALEATORIA CON  
DISTRIBUCION DE PROBABILIDAD BINOMIAL.

Sean  $n$  y  $p$  los parámetros de esta distribución. Para cada valor  $x_k$  requerido, generamos preliminarmente una muestra  $y_1, y_2, \dots, y_n$  de una distribución binaria con parámetro  $p$ , y hacemos:

$$x_k = y_1 + y_2 + \dots + y_n .$$

GENERACION DE VALORES DE UNA VARIABLE ALEATORIA CON DISTRIBUCION DE PROBABILIDAD UNIFORME.

Puede utilizarse el concepto de función inversa para obtener valores de variables uniformemente distribuidas a lo largo de otros intervalos. Para una v.a. uniformemente distribuida en el intervalo  $[a, b]$  la función de densidad es:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{para } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{para } x < a \text{ ó } x > b \end{cases}$$

La función de distribución acumulativa se obtiene por medio de la integración:

$$F(x_i) = \int_a^{x_i} \frac{1}{b-a} dx = \frac{x}{b-a} \Big|_a^{x_i}$$

$$F(x_i) = \frac{x_i - a}{b-a}$$

De acuerdo con el procedimiento establecido sustituimos  $F(x_i)$  por  $A_i$  para obtener:

$$A_i = \frac{x_i - a}{b-a}$$

y resolviendo para  $x_i$ , obtenemos la relación inversa:

$$x_i = a + A_i (b-a)$$

El procedimiento para generar valores de variables aleatorias uniformemente distribuidas consiste en generar números aleatorios y sustituirlos por  $A_i$  en la ecuación anterior, para encontrar los valores correspondientes de  $x_i$ .

#### GENERACION DE VALORES DE UNA VARIABLE ALEATORIA CON DISTRIBUCION DE PROBABILIDAD EXPONENCIAL.

La distribución exponencial, cuya primordial aplicación se centra en los fenómenos de espera, es una ley continua cuya formulación obtiene la probabilidad de que por ejemplo entre dos sucesos (salidas o llegadas) transcurra un intervalo de  $t$  unidades de tiempo. Esta formulación será la siguiente:

$$f(t) = \begin{cases} \mu e^{-\mu t} & \text{para } t \geq 0 \text{ y } \mu > 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

donde  $\mu$  indica el promedio de sucesos que acontecen por unidad de tiempo. Y la probabilidad acumulada  $F(t)$  para  $t_i$  será la probabilidad de que entre dos sucesos transcurra un intervalo de tiempo no superior a  $t_i$ .

La función de probabilidad acumulada será:

$$F(t_i) = \int_0^{t_i} \mu e^{-\mu t} dt = 1 - e^{-\mu t_i}$$

Para efectuar la simulación del intervalo  $t_i$  que media entre dos sucesos, una vez extraído el

dígito seudoequiprobable  $A_i$  es preciso, con base en este dígito, obtener en la función acumulada de la ley exponencial correspondiente el valor aleatorio  $t_i$ . El programa que en el ordenador simula esta situación se basa, para obtener el valor  $t_i$  en función del equiprobable  $A_i$ , en el siguiente algoritmo:

$$A_i = F(t_i) = 1 - e^{-\mu t_i}$$

$$1 - A_i = e^{-\mu t_i}$$

$$\ln(1 - A_i) = -\mu t_i$$

$$t_i = -\frac{1}{\mu} \ln(1 - A_i)$$

Puesto que  $A_i$  está uniformemente distribuída de 0 a 1, la cantidad  $(1 - A_i)$  de la ecuación anterior tiene la misma distribución. Por ende, la ecuación puede simplificarse ligeramente, utilizando  $A_i$  en lugar de  $(1 - A_i)$ , entonces:

$$t_i = -\frac{1}{\mu} \ln(A_i).$$

#### GENERACION DE VALORES DE UNA VARIABLE ALEATORIA CON DISTRIBUCION DE PROBABILIDAD ERLAG-K.

La función de probabilidad que se presenta en esta sección recibe su nombre debido al ingeniero danés llamado A.K. Erlag.

En esta distribución se simula que las unidades que llegan a un centro de servicio pasan por  $k$  fases, cada una con una duración exponencial que tiene la forma:

$$f_i(t') = \mu' e^{-\mu' t'}$$

de tal forma que no se permite que una unidad entre al centro de servicio hasta que la anterior no haya abandonado la última fase.

Si  $T$  es una variable aleatoria que indica la duración total del servicio prestado en  $k$  fases, o dicho en otra forma el intervalo de tiempo que separa el acontecimiento de número  $n$  y  $n+k$ , entonces su función de probabilidad será:

$$g_k(t) = \frac{\mu'^k t^{k-1} e^{-\mu' t}}{(k-1)!} \quad \begin{array}{l} t \geq 0 \\ k = 1, 2, \dots \end{array}$$

que es la llamada distribución Erlang- $k$ .

La variable  $t$  se puede expresar como la suma de variables  $t'_i$  exponencialmente distribuidas.

$$t = t'_1 + t'_2 + t'_3 + \dots + t'_k$$

Si  $k$  y  $\mu'$  son los parámetros de la distribución erlang- $k$ , se generan independientemente por el método en consideración  $k$  valores  $y_1, y_2, y_3, \dots, y_k$  de una distribución exponencial con parámetro  $\mu'$  y hacemos:

$$t_i = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_k$$

resulta

$$t_i = -\frac{1}{\mu'} \ln(1-A_1) - \frac{1}{\mu'} \ln(1-A_2) - \frac{1}{\mu'} \ln(1-A_3) - \dots - \frac{1}{\mu'} \ln(1-A_k)$$

$$t_i = -\frac{1}{\mu'} \{ \ln(1-A_1) + \ln(1-A_2) + \ln(1-A_3) + \dots + \ln(1-A_k) \}$$

$$t_i = -\frac{1}{\mu'} \{ \ln(1-A_1)(1-A_2)(1-A_3) \dots (1-A_k) \} \quad (1)$$

Lo anterior ya que es complicado obtener el valor  $t_i$  en función de  $A_i$  a través de la función de probabilidad acumulada de la erlang- $k$ , sería:

$$A_i = G_k(x_i) = \int_0^{x_i} \frac{\mu'^k t^{k-1} e^{-\mu' t}}{(k-1)!} dt$$

La simulación de una variable  $x_i$  que sigue la ley erlang- $k$  se basa en la generación de  $k$  dígitos pseudoequiprobables  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_k$  y en la aplicación de estos valores en la fórmula (1) obtenida anteriormente.

#### GENERACION DE VALORES DE UNA VARIABLE ALEATORIA CON DISTRIBUCION DE PROBABILIDAD NORMAL.

Sea  $X$  una variable aleatoria normalmente distribuida, es decir:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^2/\sigma^2} \quad \text{para } -\infty \leq x \leq \infty$$



donde  $\sigma$  es la desviación estándar y  $\mu$  la esperanza matemática.

De acuerdo con el procedimiento establecido, la simulación de un valor  $x_i$  de esta variable aleatoria se logra al resolver la ecuación

$$A_i = \int_{-\infty}^{x_i} f(x) dx$$

lo cual equivale gráficamente a:

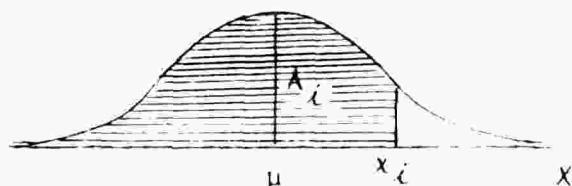


Figura N° 2

por lo complicado de las operaciones, es más sencillo obtener los valores simulados de  $X$  mediante la distribución normal tipificada, en donde:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0;1)$$

El seudoequiprobable  $A_i$  se utilizaría para simular un valor de la variable  $Z$  y por medio de ésta el correspondiente de la variable  $X$ .

$$A_i = \int_{-\infty}^{z_i} f(z) dz$$

donde:

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} \quad \text{para } -\infty \leq z \leq \infty$$

lo que gráficamente se interpreta así:

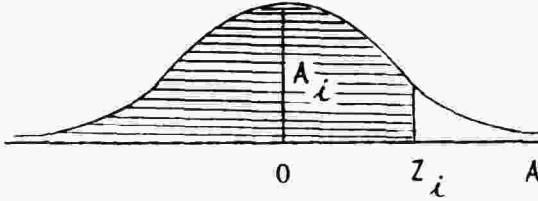


Figura N° 3

O sea que:

$$z_i = \frac{x_i - \mu}{\sigma}$$

El valor simulado de  $X$  será entonces:

$$x_i = \sigma z_i + \mu$$

Otro procedimiento se basa en el conocimiento que se tiene de la distribución de  $A_i$ , que es uniforme entre 0 y 1 y en las conclusiones dadas por el teorema central del límite.

Si hacemos:

$$a_i = A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_R$$

obtendremos, muy aproximadamente, muestras de una distribución normal con media  $R/2$  y varianza  $R/12$ .

Los valores generador de  $X_i$  se obtienen:

$$X_i = \frac{a_i - R/2}{\sqrt{R/12}} \sigma + \mu$$

$R = 12$  es un valor conveniente, ya que es suficientemente grande para que el teorema central del límite dé buena aproximación y evita la división por  $\sqrt{R/12}$ .

#### GENERACION DE VALORES DE UNA VARIABLE ALEATORIA CON DISTRIBUCION DE PROBABILIDAD POISSON.

Considérese una serie de acontecimientos independientes  $E$  que se suceden en el tiempo (por ejemplo, llegadas de clientes a una tienda, paso de vehículos sobre una carretera, errores cometidos por una secretaria, etc.) La variable  $X$  que indica el número de acontecimientos que se producen en un intervalo de tiempo, de acuerdo con características especiales se demuestra que tiene como función de cuantía:

$$P(X=x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} \quad \text{para } X = 0, 1, 2, \dots$$

donde  $\lambda$  indica el número medio de acontecimientos que se producen por unidad de tiempo.

La función de probabilidad acumulada será:

$$P(X \leq x_i) = A_i = \sum_{x=0}^{x_i} \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}$$

$$A_i = e^{-\lambda} \left\{ 1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2} + \frac{\lambda^3}{3!} + \dots + \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} \right\}$$

Como la distribución de Poisson corresponde a una variable aleatoria discreta, y  $X_i$  solo puede tomar valores numerables; se ha de simular el valor de esta variable de modo que el correspondiente valor  $P(X \leq x_i)$  sea igual o inmediatamente superior a  $A_i$ .

$$e^{-\lambda} \left( 1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2} + \frac{\lambda^3}{3!} + \dots + \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} \right) \geq A_i$$

$$\left( 1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2} + \frac{\lambda^3}{3!} + \dots + \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} \right) \geq A_i e^{\lambda}$$

Por tanto, el valor  $X_i$  simulado será aquel que iguale esta ecuación, o que haga por primera vez que el valor del primer miembro sea el que sobrepasa al segundo.

Otro procedimiento manual consistiría en utilizar las tablas de la distribución de Poisson, obteniendo los valores numéricos de  $X$  y de sus probabilidades de acuerdo con el valor conocido de  $\lambda$  y en aplicar el proceso mostrado en la gráfica N° 1.

El proceso mostrado en la gráfica mencionada anteriormente se describe en palabras en la siguiente sección.

## GENERACION DE VALORES DE UNA VARIABLE ALEATORIA CON DISTRIBUCION DE PROBABILIDAD DISCRETA.

Cuando se conocen los valores que puede tomar la variable aleatoria y sus correspondientes probabilidades, la simulación de valores de una variable aleatoria  $X$  con función de probabilidad  $P(X=x)$  se basa en la utilización de las probabilidades acumuladas para establecer una codificación que permita determinar cuáles números aleatorios generan un particular valor de la variable aleatoria.

Esta codificación debe garantizar que una proporción de números aleatorios igual a la establecida por la probabilidad puntual sea la que simule un valor de la variable.

Para lo anterior se recomienda utilizar números aleatorios con igual número de dígitos a los contenidos por las cifras decimales de la probabilidad.

En forma general el procedimiento se ilustra a continuación para probabilidades con dos cifras decimales.

Esto indica que todos los números aleatorios comprendidos en el intervalo 00 a  $(100P(X \leq X_1) - 1)$  generan el valor de la variable  $X$  igual a  $X_1$  así de la misma manera para los demás intervalos.

$X$	$P(X=x)$	$P(X \leq x_1)$	CODIFICACION
$X_1$	$P(X=x_1)$	$P(X \leq x_1)$	00 a 100 $P(X \leq x_1) - 1$
$X_2$	$P(X=x_2)$	$P(X \leq x_2)$	$P(X \leq x_1)100$ a $100 P(X \leq x_2) - 1$
$X_3$	$P(X=x_3)$	$P(X \leq x_3)$	$P(X \leq x_2)100$ a $100 P(X \leq x_3) - 1$
.	.	.	. . . . .
.	.	.	. . . . .
.	.	.	. . . . .
$X_n$	$P(X=x_n)$	1	$P(X \leq x_{n-1})100$ a 99

Esta explicación no quiere decir que éste sea el único procedimiento a seguir para la codificación y para la simulación, en realidad existen diferentes procedimientos.

\* \* \*

#### BIBLIOGRAFIA

- [1] Clark, Charles, *The Utility of Statistics of Random Numbers*, Operation Research.
- [2] Escudero, L., *La Simulación de la Empresa*, España, Deusto, (1973).
- [3] Hammersley, S.M. y Handscomb, D.C., *Monte Carlo Methods*, New York, John Wiley.
- [4] Meier, R.N., y Pazer, H., *Técnicas de Simulación en Administración y Economía*, Mertrillas, (1975).

\*