Revista Colombiana de Estadística
Nº 5 - 1982

LA TASA INSTANTANEA DE INTERES COMO UN PROCESO ESTACIONARIO

Luis G. Moreno O.

Introducción.

En la teoría del interés compuesto, por lo general, se trata con una tasa constante de interés. Algunas veces, sin embargo, es posible tratar con una tasa de interés que aunque varíe, no lo hace en forma aleatoria. Por tal razón, buscando una aproximación alterna, el propósito de este artículo es tratar la tasa de interés y más concretamente, la tasa instantánea de interés, como una variable aleatoria con distribuciones tales como, la distribución Uniforme y la distribución Exponencial.

Teoría.

Sea $\{\delta_t\}$ un proceso estrictamente estacionario de tiempo discreto ($t = 1,2,3,\ldots$), donde la variable aleatoria δ_t indica la tasa instantánea de interés durante el período de tiempo t. Recordemos que la tasa efectiva de interés en el período t, i_t, viene dada por la relación

$$i_t = e^{\delta_t} - 1 \, ,$$

esto es, un peso invertido al comienzo del período t, bajo la tasa instantánea δ_t, se convierte en

$$1 + i_t = e^{\delta_t}$$

pesos, al final de este período. En general, si un peso invertido al comienzo del primer período de tiempo, se reinvierte junto con los intereses producidos, durante los primeros n períodos, este peso se habrá convertido en

$$S_n = \prod_{t=1}^{n} (1 + i_t) = \exp \{ \sum_{t=1}^{n} \delta_t \}$$

pesos, al final del n-ésimo período.

En lo sucesivo, supondremos que las variables aleatorias δ_t son independientes entre si. Además, puesto que el proceso $\{\delta_t\}$ es estrictamente estacionario, tenemos que todas las variables δ_t tiene la misma distribución de probabilidad.

Distribución uniforme.

Supongamos que las variables aleatorias δ_t tie nen distribución Uniforme sobre el mismo intervalo $[0,b]$. Así, la función generatriz de momentos de cualquiera de las variables δ_t, tiene la forma,

$$M_\delta(r) = \frac{1}{b}\,\frac{e^{br} - 1}{r}$$

Entonces, como las variables δ_t son independientes, la función generatriz de momentos de la variable aleatoria

$$D_n = \delta_1 + \delta_2 + \ldots + \delta_n$$

viene dada por

$$M_{D_n}(r) = \frac{1}{b^n}\left(\frac{e^{br} - 1}{r}\right)^n .$$

Por tanto, el valor esperado de la variable aleatoria S_n se puede escribir como sigue

$$ES_n = M_{D_n}(1) = \left(\frac{e^b - 1}{b}\right)^n .$$

De acuerdo a este resultado, si un peso se invierte al comienzo del primer período de tiempo, y se reinvierte por n períodos, al comienzo de cada uno de ellos, se espera que al final del n-ésimo período, él se convierta en

$$\left(\frac{e^b - 1}{b}\right)^n$$

pesos. Por ejemplo, si $b = 0,5$, vemos que el resultado

$$ES_n \doteqdot (1,2974)^n$$

se ajusta a una tasa efectiva anual del 29,74 % y a un período de tiempo anual. Por el contrario, si $b = 1$, observamos que el resultado

$$ES_n \doteqdot (1,71828)^n$$

concuerda con una tasa efectiva anual del 31,08 % y un período bianual de tiempo.

Distribución exponencial.

Supongamos ahora que las variables aleatorias δ_t tienen distribución exponencial con parámetro λ. La variable aleatoria D_n posee entonces distribución Gamma con parámetros n y λ, y su función generatriz de momentos viene dada por

$$M_{D_n}(r) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - r} \right)^n \qquad \lambda > r$$

Por consiguiente, el valor esperado de la variable aleatoria S_n se puede expresar en la forma

$$ES_n = M_{D_n}(1) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - 1} \right)^n \qquad \lambda > 1$$

Teniendo en cuenta este resultado, si un peso se invierte al iniciarse el primer período de tiempo, y se reinvierte durante n períodos, al comienzo de cada uno de ellos, se espera que al final del n-ésimo período, el se convierta en

$$\left(\frac{\lambda}{\lambda-1}\right)^n$$

pesos. Por ejemplo, cuando $\lambda = 3$ observamos que

$$ES_n = (1,50)^n$$

concuerda, con una tasa efectiva anual del 50 % y un período de tiempo anual, o con una tasa efectiva anual del 22,47 % y un período bianual de tiempo. Por el contrario, cuando $\lambda = 5$ vemos que el resultado

$$ES_n = (1,25)^n$$

se ajusta a una tasa efectiva anual del 25 % y a un periódo de tiempo anual.

Conclusiones.

De los ejemplos presentados cuando se trató cada una de las distribuciones anteriores se desprende que, siguiendo el comportamiento de los parámetros involucrados, estas distribuciones se pueden utilizar en casos prácticos.

En la distribución Uniforme, cuando $b \to 0$ vemos que $ES_n \to 1$; en otras palabras, a medida que b disminuye de valor, la tasa efectiva de interés, i_t, también disminuye de valor; esto es, cuando $b \to 0$, $i_t \to 0$.

En la distribución exponencial, si el parámetro $\lambda \to \infty$ observamos que $ES_n \to 1$; es decir, a medida que el parámetro λ se incrementa, la tasa efectiva anual de interés va disminuyendo, de tal forma que, cuando $\lambda \to \infty$, $i_t \to 0$.

Otra forma de analizar la tasa instantánea de interés δ_t, es tratarla como una variable aleatoria distribuída normalmente. Esto se puede ver en la referencia mencionada a continuación.

*

REFERENCIA

Wilkie, A.D., *The Rate of Interest as a Stochastic Process-Theory and Applications*. Vigésimo Congreso Internacional de Actuarios. 1976.

* * *

NOTA A LOS AUTORES

Los artículos enviados para publicación en la Revista Colombiana de Estadística, deben cumplir las siguientes normas:

1. Estar escritos a máquina, a doble espacio y en un máximo de diez páginas.
2. Acompañarse de un resumen en español y uno en inglés de un máximo de 7 líneas cada uno.
3. En las citas bibliográficas evitar el uso de "véase (14)"; utilizar en cambio "Rao (1959a)".
4. No enumerar la bibliografía; utilizar el siguiente modelo:

   Fisz, M. (1963). Probability Theory and Mathematical Statistics, 3a.ed. John Wiley, New York.

   Goodman, L.A. (1957). Runs tests and Likelihood ratio tests for Markoff chains. The Annals of Mathematical Statistics, 20, 255-262.
5. Los trabajos deben ser enviados a la siguiente dirección:

   Revista Colombiana de Estadística
   Departamento de Matemáticas y Estadística
   Universidad Nacional de Colombia
   Bogotá, D.E. Colombia S.A.

Fecha límite para entrega de artículos para el próximo número: *10 de Agosto de 1982.*