Revista Colombiana de Estadística
Nº 7 - 1983

LA TRANSPOSICION Y OTRAS SIMETRIAS DE MATRICES CUADRADAS

(notas preliminares)

Ramón Fandiño
Profesor Asistente
Universidad Nacional

Francisco Cepeda C.
Profesor Asociado
Universidad Nacional

Introducción.

Sobre la base del grupo óctico (reflexiones y rotaciones del cuadrado) sugerimos realizar estos movimientos sobre matrices cuadradas, uno de los cuales es la transposición ya que al analizar sus propiedades más relievantes surgen algunos interrogantes a los que parcialmente damos solución, siendo también nuestro deseo el de plantear ciertas inquietudes.

Para facilitar nuestro punto de vista hemos dividido el presente trabajo en tres partes:

I) Información acerca del grupo óctico,

II) la transposición de matrices y

III) enfoque general de "estas simetrías" que amplían el concepto que se tiene de la transposición de matrices en el álgebra lineal.

I. Consideremos el cuadrado $ABCD$ como está representado en la siguiente figura:

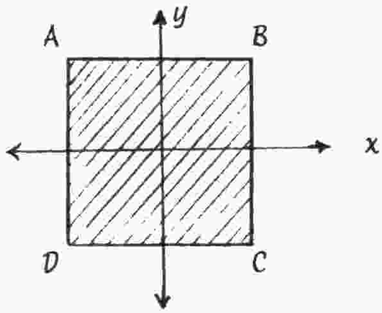

Figura 1

Sea G el conjunto de sus simetrías como se especifican a continuación:

$$r_{AC},\ r_{BD},\ r_x,\ r_y \qquad \text{(reflexiones)}, \qquad (1)$$

$$\rho_\alpha = i\pi/_2, \qquad i = 0,1,2,3 \quad \text{(rotaciones)}. \qquad (2)$$

que notaremos en lo sucesivo como:

$$G = \{\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_8\}\ , \qquad (3)$$

$(G, \circ)$ es el grupo óctico, donde "$\circ$" es la composición de dos elementos θ_i, θ_j cualesquiera de G (Caicedo 1981), por ejemplo: $\theta_7 = \theta_3 \circ \theta_4 = \theta_4 \circ \theta_3$, como se ilustra en el gráfico 2.

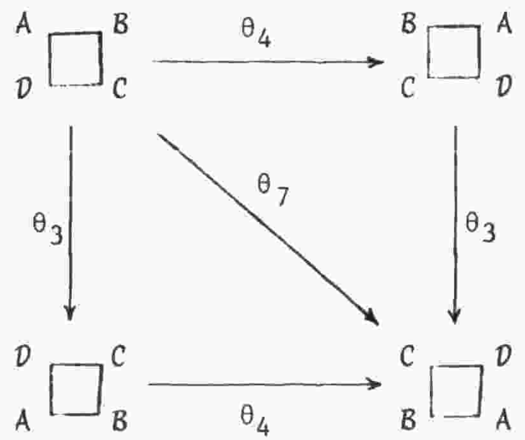

Figura 2

De acuerdo a la operación "∘" definida, obtenemos:

$$\theta_i^2 = \theta_i \circ \theta_i \ , \qquad i = 1,2,\ldots,8 \ ; \tag{4}$$

no es difícil verificar que:

$$\theta_1^2 = \theta_2^2 = \theta_3^2 = \theta_4^2 = \theta_7^2 = \theta_5 = \rho_0 = e \ \text{(involutiva)}, \tag{5}$$

$$\theta_6^4 = \theta_8^4 = \rho_0 = \theta_5 = e \ , \tag{6}$$

conocemos además que $G = [r_y, \rho_{\pi/2}]$, pero en este trabajo queremos destacar la importancia de los movimientos θ_3 y θ_4, por lo cual usaremos:

$$G = [\theta_1, \theta_3, \theta_4]. \tag{7}$$

II. Los movimientos anteriores sobre cualquier matriz cuadrada m nos conduce a que θ_1 corresponde a la transposición de dicha matriz. Sin embargo nos llama la atención que en un primer curso de álgebra lineal, se hable únicamente de ésta, más no de los restantes movimientos que induce al grupo óctico. Resultados análogos se obtienen mediante espejos colocados frente a una matriz vertical u horizontalmente, reflejándose simétricamente dicha matriz, (Fandiño 1982), como sigue:

Si

$$m = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

entonces

$$m^{RH} = \begin{pmatrix} b & a \\ d & c \end{pmatrix}$$

será su reflejo horizontal, en tanto que

$$m^{RV} = \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix}$$

es el reflejo vertical de m, tal como puede verse también si en la Figura 2, en lugar del cuadrado $ABCD$, lo reemplazamos por una matriz cualquiera, es así que T, RV, RH (la transposición, el reflejo vertical y el reflejo horizontal), son respectivamente: θ_1, θ_3 y θ_4, con lo que se tendría:

$$G = [T, RV, RH] \tag{8}$$

en tanto que el grupo óctico puede expresarse por

$$G = \{T, RH, RV, T\circ RH, RH\circ RV, T\circ RV, T\circ RH\circ RV, e\} \tag{9}$$

con lo que nos queda claro que θ_1 coincide efectivamente con "T", y concluír que éste es solo un caso particularmente importante de las ocho "simetrías" consideradas. Entonces porqué solo se habla de la transposición, existiendo los otros movimientos?

III. Consideremos la acción de G sobre el conjunto de las matrices cuadradas. Sea:

$$M = \{(a_{ij}) \mid a_{ij} \in \mathbb{R}, \quad i,j = 1,2,3,..,n\}, \tag{10}$$

$$\begin{aligned} G\times M &\longrightarrow M \\ (\theta_i, m) &\longrightarrow \theta_i(m) = m^{\theta_i}, \end{aligned} \tag{11}$$

simbolismo acostumbrado para describir algunas propiedades que parecía caracterizaban a la transposición θ_1, pero es fácil comprobar que verifican también: $\theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5$ y θ_7. Así:

$$[m^{\theta_i}]^{\theta_i} = m\ , \tag{12}$$

$$(m_1+m_2)^{\theta_i} = m_1^{\theta_i} + m_2^{\theta_i}\ , \tag{13}$$

$$(cm_1)^{\theta_i} = cm_1^{\theta_i}, \qquad \forall m_1, m_2 \in M, \forall c \in \mathbb{R} \tag{14}$$

Describamos algunas en que difieren:

$$(m_1 m_2)^{\theta_1} = m_2^{\theta_1} m_1^{\theta_1} , \tag{15}$$

para "$R\ V$" se obtendría

$$(m_1 m_2)^{RV} = m_1^{RV} m_2 , \quad \forall m_1, m_2 \in M. \tag{16}$$

Surgen igualmente conjuntos $P_f(\theta_i)$, de matrices que permanecen inalteradas si sobre éstas se realiza la acción de alguno de los $\theta_i \in G$. Especifiquemos un poco más esta notación:

$$P_f(\theta_i) = \{m \in M/m^{\theta_i} = m\}, \tag{17}$$

esto es, matrices fijas "bajo la acción de θ_i"; sea:

$$S^* = \{P_f(\theta_i)/\theta_i \in G\}$$

con lo cual se tiene que:

$$P_f(T) = P_f(\theta_1) \in S^*. \tag{19}$$

Sin embargo, hasta donde nos consta, siempre se habló de el conjunto de las matrices simétricas en el sentido usual, es decir, según la transpuesta "θ_1". Este conjunto es muy importante en la rama de la Estadística, señalemos que son matrices simétricas, la de varianzas y covarianzas, la de correlación, la que caracteriza a una forma cuadrática, etc. De modo que al sugerir nuevas "simetrías" o nuevos conjuntos de matrices simétricas o palíndromas (Fandiño 1982) cabe también preguntarse si no se ampliará el conjunto de sus aplicaciones a las ya conocidas en Estadística?

Consideremos para ello:

$$P_{\delta}(\theta_i) \cap P_{\delta}(\theta_j) \ , \quad i,j = 1,2,\ldots,8 \qquad (20)$$

$$A = \bigcap_{\alpha \in I} P_{\delta}(\theta_\alpha) \ , \quad I \subseteq \{1,2,\ldots,8\} \qquad (21)$$

Si m es una matriz cuadrada que pertenece a uno cualquiera de los conjuntos anteriormente especificados, entonces m posee más de una simetría y puede asociarse con una de tantas estructuras cristalinas, si éstas se representan matricialmente. Los cristales en general poseen simetrías muy particulares (Zagalskaya 1976).

Pero es un inconveniente la singularidad de m, si ésta es una matriz palíndroma vertical u horizontal, esto es:

$$\text{Si } m \in P_{\delta}(\theta_3) \rightarrow \det(m) = 0, \qquad (22)$$

$$\text{Si } m \in P_{\delta}(\theta_4) \rightarrow \det(m) = 0, \qquad (23)$$

cosa que no es válida para matrices simétricas en el sentido usual (transpuesta), pues estas no siempre son singulares.

Finalmente, creemos que es importante tocar otros temas que a nuestro modo de ver tienen relación con el concepto de transpuesta de una matriz, estos son:

a) la traza,

b) polinomio característico,

pues basta observar sus definiciones y notar que incluyen los elementos de la diagonal "principal", que no es otra cosa que el eje sobre el que se hizo, la reflexión θ_1. Lo que parece sugerirnos, ampliar la concepción que se tiene de ellos considerando las nuevas simetrías mencionadas, cosa que no es tan trivial.

Un breve recorrido, por uno de los temas del álgebra lineal, rama de la matemática tan antigua como la matemática misma, puesto que algunos de sus problemas fueron ya planteados en la antiguedad, como es el de la ecuación lineal, nos ha mostrado que continua siendo muy rica en temas de investigación y que al ampliar el panorama de los temas "aparentemente" acabados se amplía también el de sus aplicaciones (Maltsev, 1972).

* *

BIBLIOGRAFIA

Caicedo, J.F., *Introducción a la Teoría de Grupos*, Monografía editada por el Depto. de

Matemáticas de la U. Nal. de Col., Bogotá, 1981.

Fandiño, R., "Reflexión de matrices y palindromía. Revista Colombiana de Estadística Nº 5, Bogotá, 1982.

Maltsev, A.I., *Fundamentos de álgebra lineal*, Edit.Mir. Moscú, 1972.

Zagalskaya, I.G., Litbinskaya, G.P., *Microcristalografía geométrica*. Curso práctico, Editorial Umoscovita. Moscú, 1976.

* * *