Revista Colombiana de Estadística
Nº 10 - 1984

PROCESOS MARKOVIANOS DEL SISTEMA DE DESCUENTOS Y SOBREPRIMAS PARA EL SEGURO DE RESPONSABILIDAD CIVIL EN AUTOMOVILES*

Alfonso Guzmán Jurado
Alberto Granados Díaz
Estadísticos U.N.

Introducción. El objetivo principal de este trabajo es el de aplicar un modelo estocástico al actual sistema de descuentos sobre la prima en los seguros de automóviles que opera en el país y con base en él, plantear un modelo más completo que logre mayor equilibrio entre el cobro de la prima y la frecuencia de

---

* Resumen de tesis para optar el título de Estadístico en la Universidad Nacional. Director: Luis G. Moreno. Director Asociado: Jesús Lizardo Barrios.

los siniestros que presenta cada asegurado, lo cual se buscará a través de un modelo markoviano que ayude a inferir el comportamiento de estos descuentos en los períodos futuros, proyectando la información de un año y estableciendo la tendencia que presenten los desplazamientos entre los diversos estados del proceso.

Las pérdidas que ocasiona el ramo de automóviles en la actividad aseguradora, es la principal motivación para estudiar este problema a través de algunas herramientas que proporciona la Estadística, como son los Procesos Estocásticos, el Muestreo, las pruebas de Bondad de Ajuste y las Distribuciones de Probabilidad.

El seguro de automóvil, en algunos países, opera con descuentos y sobreprimas por buena o mala experiencia siniestral, respectivamente. En Colombia, solamente se ofrecen descuentos, por lo que resulta interesante medir el beneficio que representaría para el asegurador el implatar las sobreprimas, lo cual se hará mediante una propuesta del sistema a seguir.

I. Diseño de la muestra.

A pesar de que trabajos de esta naturaleza deberían mostrar las tendencias de todo el mer cado asegurador, por la dificultad de acceso a la información requerida, la población se redujo a los automóviles asegurados en la Compañía de Seguros Bolívar, la cual tuvo en 1981 año base del estudio, un total de 55.322 pólaz vigentes según informes estadísticos de Fasecolda.

La información requerida se encuentra archivada secuencialmente, por lo que se utilizó el muestreo sistemático y por medio de un formulario diseñado para recopilar la información relevante, se obtuvo el estado de descuento que cada póliza tenía en el período inmediatamente anterior y si ésta presentó o no algún siniestro.

1.1. Tamaño de la Muestra.

La distribución del número de siniestros, por estudios ya realizados (7), se puede ajustar a una distribución de Poisson. Para trabajar con esta distribución se debe estimar su valor esperado, el cual puede hacerse mediante la media muestral. Esto conduce a calcular un ta maño de muestra n para estimar la media poblacional, que mediante el muestreo aleatorio simple (4), es:

$$n = \frac{(K^2S^2)/\varepsilon^2}{1 + (K^2S^2/N\varepsilon^2)} \tag{1.1}$$

donde

N : Tamaño Poblacional

S^2: Varianza Muestral

K : Valor de la abscisa de la curva normal que corta un área de α en las colas de la distribución.

ε : Error máximo admisible.

Con una muestra piloto equivalente al 1% de la población se obtuvo que $S^2 = 0{,}57483$. Una vez conocida la varianza muestral, con $\varepsilon = 2{,}5\%$, $N = 55.352$ y trabajando con un nivel de confianza del 95%, o sea con $K = 1{,}96$; se despeja (1.1) de donde se obtiene el valor de $n = 3.321$.

Después de seleccionar la muestra de este tamaño, se encontraron 95 unidades vacías, reduciéndose así la muestra a 3.226 pólizas y la distribución de frecuencias observada se da en la Tabla 1.

Tabla 1

Nº de Siniestros	Frecuencia
0	2.688
1	447
2	78
3	13
4 ó más	0

II. Determinación de las distribuciones de los Siniestros.

Entre las distribuciones Poisson, Binomial Negativa y Geométrica Generalizada (7), se buscará la distribución de probabilidad que más se ajuste a la muestra obtenida, para lo cual se presentan las respectivas funciones de frecuencia con la estimación de sus parámetros.

2,1, Distribución de Poisson.

$$P(X=k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \qquad \text{para } \lambda > 0 \text{ y } k = 0,1,..$$

Con $E(X) = Var(X) = \lambda$. (2.1)

Por los métodos de Momentos y Máxima Verosimilitud, se obtiene que $\hat{\lambda} = \bar{X} = 0,199008$.

2.2. Distribución Binomial Negativa.

$$P(X=k) = \frac{\Gamma(a+k)}{k!\Gamma(a)} \left(\frac{1}{1+\tau}\right)^k \left(\frac{\tau}{1+\tau}\right)^a \tag{2.2}$$

para a y τ no negativos.

Por el método de Momentos (7), se tiene que:

$$\hat{\tau} = \frac{\bar{X}}{S^2-\bar{X}} = 6,029933 \quad \text{y} \quad \hat{a} = \bar{X}\hat{\tau} = 1.200005$$

2.3. Distribución Geométrica Generalizada.

$$P(X=k) = \begin{cases} a\theta^k(1-\theta) & \text{si} \quad k \geqslant 1 \\ 1 - a\theta & \text{si} \quad k = 0 \end{cases} \tag{2.3}$$

con $0 \leqslant \theta \leqslant 1$ y $0 \leqslant a \leqslant \frac{1}{\theta}$.

2.3.1. Método de Momentos.

$$\hat{\theta} = \frac{S^2-\bar{X}+\bar{X}^2}{S^2+\bar{X}+\bar{X}^2} = 0,154279 \text{ y } \hat{a} = \frac{2\bar{X}^2}{S^2+\bar{X}-\bar{X}^2} = 0,168305.$$

2.3.2. Método de Máxima Verosimilitud.

$$\hat{\theta} = 1 - \frac{(n-n_0)}{n\bar{X}} = 0,161994 \quad \text{y}$$

$$\hat{a} = \frac{n-n_0}{n\theta} = 1,029484$$

donde n_0 es el número de pólizas en la muestra que no presentan reclamos.

2.4. Determinación de la Distribución.

Utilizando la prueba Chi-Cuadrado de bondad de ajuste en cada una de las distribuciones calculadas, se encontró la que más se ajusta a la muestra, mediante la siguiente fórmula:

$$\chi^2 = \sum_{k=0}^{r} \frac{(O_k - E_k)^2}{E_k} = \sum_{k=0}^{r} \frac{(n_k - np_k)^2}{np_k} \qquad (3.4)$$

Donde:

n_k: Número de casos observados con k siniestros.

n : Tamaño de la muestra.

p_k: Probabilidad de que a un asegurado le ocurran k siniestros.

r : Grados de Libertad.

Tabla 2

DISTRIBUCIONES DE FRECUENCIAS - CUADRO COMPARATIVO					
	Observadas	Poisson	Bin.Neg. Momentos	Geométrica Momentos	Generalizada Max. Veros.
0	2688	2645,85	2683,49	3142,23	2688,00
1	447	526,16	458,07	70,84	450,85
2	78	52,35	71,69	10,93	73,83
3 ó más	13	3,64	12,75	2,00	14,12
χ^2obs		49,20	0,84	2535,13	0,46
G.L.		3	3	3	3
$P(\chi^2>\chi^2\text{obs})$		0	0,84	0	0,93

En la Tabla 2 se observa claramente que la distribución Geométrica Generalizada, es la que más se ajusta a la distribución empírica.

III. Desarrollo de los procesos.

3.1. Sistemas de descuentos vigentes.

En Colombia, los seguros de automóviles tienen un descuento por no reclamación que opera según el tiempo durante el cual no se presenten siniestros, como se puede observar en la Tabla 3.

Tabla 3

Estado de descuento	Tiempo de no reclamación	Prima a pagar (P-D)
0	4 años consecutivos o más	50 %
1	3 años consecutivos	60 %
2	2 años consecutivos	70 %
3	Un año	80 %
4	Menos de un año.	100 %

(P-D) Prima - Descuento.

Matemáticamente, el sistema objeto de este estudio se puede describir mediante la matriz estocástica

$$A = [P_{ij}] \qquad (i, j = 0, 1, 2, 3, 4)$$

donde cada P representa la probabilidad de transición del estado de descuento i al estado de j, los cuales están definidos en la Tabla 3.

Si el asegurado presenta un reclamo, pierde el descuento y vuelve a pagar el 100% de la prima. También se puede observar que la transisión de un estado a otro no consecutivo, es imposible; por lo tanto, se plantean las siguientes ecuaciones:

$$P_{01} = P_{01} = P_{03} = P_{11} = P_{12} = P_{13} = P_{22} = P_{23} = 0$$

y

$$P_{20} = P_{30} = P_{31} = P_{40} = P_{41} = P_{42} = 0.$$

Considerando los eventos posibles, se puede construír la matriz estocástica A

$$A = \begin{bmatrix} P_{00} & 0 & 0 & 0 & P_{04} \\ P_{10} & 0 & 0 & 0 & P_{14} \\ 0 & P_{21} & 0 & 0 & P_{24} \\ 0 & 0 & P_{32} & 0 & P_{34} \\ 0 & 0 & 0 & P_{43} & P_{44} \end{bmatrix}$$

Acudiendo a la muestra, se obtuvieron los siniestros condicionados al estado de descuento al que pertenecían en el período anterior y con estos, los valores positivos de la matriz A. Los resultados aparecen en la Tabla 4.

Si $p_i = P(X_i = 0)$ y $q_i = P(X_i \geq 1) = 1 - p_i$ $(i = 0,1,2,3,4)$, representando la variable aleatoria X_i: el número de siniestros por asegurado en el estado i.

Tabla 4

Estado i	Casos Obs. n_i	No siniestrados m_i	siniestrados $n_i - m_i$
0	532	484	48
1	263	250	13
2	474	367	107
3	711	544	167
4	1246	1043	203

Con la anterior información se puede determinar:

$$p_i = \frac{m_i}{n_i} \qquad y \qquad q_i = \frac{n_i - m_i}{n_i}$$

a su vez, para el presente caso, se deduce que

$$P_{00} = p_0$$
$$P_{i,(i-1)} = p_i \qquad (i = 1,2,3,4)$$
$$P_{i4} = q_i \qquad (i = 0,1,2,3,4)$$

con lo cual se halla la matriz del sistema actual

$$A = \begin{bmatrix} 0,909774 & 0 & 0 & 0 & 0,090226 \\ 0,950570 & 0 & 0 & 0 & 0,049439 \\ 0 & 0,774262 & 0 & 0 & 0,225738 \\ 0 & 0 & 0,76512 & 0 & 0,234880 \\ 0 & 0 & 0 & 0,837079 & 0,162921 \end{bmatrix}$$

3.2. Sistema Propuesto.

Por las razones expuestas en la introducción, se propone un modelo de descuentos y sobreprimas para castigar las pólizas que presnten mala experiencia y bonificar los buenos resultados, además, que la pérdida del descuento sea gradual y no como viene operando.

Procurando tener un equilibrio entre estos factores, se sugiere que el asegurado gane un escalafón de descuento por cada año que no presente reclamos y pierda, así mismo, un escaño por cada siniestro cobrado durante el mismo período.

Si la prima del primer año corresponde al 100%, los estados de descuentos, según la prima a pagar, quedarían distribuídos como aparece en la Tabla 5.

Dadas estas bases, es fácil notar que las p = P(un asegurado tenga i siniestros durante un año) servirán para configurar la matriz de transición para este sistema.

Tabla 5

Estado	Prima a pagar	Estado	Prima a pagar	Estado	Prima a pagar
0	60%	3	90%	6	130%
1	70%	4	100%	7	140%
2	80%	5	120%	8	150%

$$
B = \begin{bmatrix}
p_o & p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 & p_6 & p_7 & 1-\sum_0^7 p \\
p_o & 0 & p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 & p_6 & 1-\sum_0^6 p \\
0 & p_o & 0 & p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 & 1-\sum_0^5 p \\
0 & 0 & p_o & 0 & p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & 1-\sum_0^4 p \\
0 & 0 & 0 & p_o & 0 & p_1 & p_2 & p_3 & 1-\sum_0^3 p \\
0 & 0 & 0 & 0 & p_o & 0 & p_1 & p_2 & 1-\sum_0^2 p \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_o & 0 & p_1 & 1-\sum_0^1 p \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_o & 0 & 1-p_o \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p & 1-p_o
\end{bmatrix}
$$

Utilizando la distribución Geométrica Generalizada y estimando sus parámetros por el método de Máxima Verosimilitud, se obtiene que los elementos de la matriz B son:

p_o	$= 0,83323$	$1-\sum^{7} p$	$= 4,89\ E-7$
p_1	$= 0,139754$	$1-\sum^{6} p$	$= 3,015\ E-7$
p_2	$= 0,022639$	$1-\sum^{5} p$	$= 1,8605\ E-5$
p_3	$= 0,00366743$	$1-\sum^{4} p$	$= 1,14846\ E-4$
p_4	$= 0,000594101$	$1-\sum^{3} p$	$= 0,000708947$
p_5	$= 0,000096241$	$1-\sum^{2} p$	$= 0,00437638$
p_6	$= 0,000015590$	$1-p-p_1$	$= 0,0270157$
p_7	$= 0,000002526$	$1-p$	$= 0,16677$

3.3. Comparación de los dos Sistemas.

Conociendo las probabilidades de estado estacionario de cada una de las dos Cadenas de Markov, se pueden comparar los dos sistemas en un mismo futuro. Con este fin se hallan las matrices estacionarias que son respectivamente las de los anexos 1 y 2.

3.3.1. Tasa Promedio de Ingresos a Largo Plazo.

Esta tasa viene dada una función de las probabilidades de estado estacionario y de los porcentajes de prima a pagar $K(j)$, siendo

$$\tau = \sum_{j=0}^{M} K(j)\pi_j \qquad (3.1)$$

Si τ_o indica la tasa promedio del sistema actual y τ_1 representa la tasa promedio del sistema propuesto y utilizando los vectores estacionarios de las matrices A y B, se obtiene:

$$\tau_o = 0{,}6133 \quad \text{y} \quad \tau_1 = 0{,}6377.$$

Conclusiones.

A través de los objetivos planteados para este trabajo, se logró formular un sistema de descuentos más equilibrado que el actual, en él habría mayor justicia ante la calidad del riesgo que representa cada asegurado.

Se puede concluír que, a largo plazo, los ingresos de la compañía estudiada en el ramo de automóviles, aumentarían en un 4% al implantar el sistema propuesto.

Puesto que el aumento de ingresos se percibe muy marginal, para mejorar los resultados finales, el método propuesto no parece suficiente si las frecuencias de los siniestros, condicionadas a su estado de descuento, se mantienen inalteradas.

Para lograr alguna mejoría se presentan dos alternativas, que son: esperar que la implantación de sobreprimas mejore la siniestralidad o, definitivamente, aumentar las tasas que se vienen cobrando en este ramo.

* *

A N E X O 1

MATRIZ ESTACIONARIA DEL SISTEMA ACTUAL

A27	COL 1	COL 2	COL 3	COL 4	COL 5
FILA1	0.637291	0.06049	0.078126	0.10211	0.121983
FILA2	0.637291	0.06049	0.078126	0.19211	0.121983
FILA3	0.637291	0.06049	0.078126	0.10211	0.121983
FILA4	0.637291	0.06049	0.078126	0.10211	0.121983
FILA5	0.637291	0.06049	0.078126	0.10211	0.121983

*

A N E X O 2

MATRIZ ESTACIONARIA DEL SISTEMA PROPUESTO

B70	COL 1	COL 2	COL 3	COL 4	COL 5
FILA1	0.761214	0.152356	0.0551747	0.0199811	0.00723601
FILA2	0.761214	0.152356	0.0551747	0.0199811	0.00723601
FILA3	0.761214	0.152356	0.0551747	0.0199811	0.00723601
FILA4	0.761214	0.152356	0.0551747	0.0199811	0.00723601
FILA5	0.761214	0.152356	0.0551747	0.0199811	0.00723601
FILA6	0.761214	0.152356	0.0551747	0.0199811	0.00723601
FILA7	0.761214	0.152356	0.0551747	0.0199811	0.00723601
FILA8	0.761214	0.152356	0.0551747	0.0199811	0.00723601
FILA9	0.761214	0.152356	0.0551747	0.0199811	0.00723601

B70	COL 6	COL 7	COL 8	COL 9
FILA1	0.00262047	0.000948984	0.000343669	0.000124458
FILA2	0.00262047	0.000948984	0.000343669	0.000124458
FILA3	0.00262047	0.000948984	0.000343669	0.000124458
FILA4	0.00262047	0.000948984	0.000343669	0.000124458
FILA5	0.00262047	0.000948984	0.000343669	0.000124458
FILA6	0.00262047	0.000948984	0.000343669	0.000124458
FILA7	0.00262047	0.000948984	0.000343669	0.000124458
FILA8	0.00262047	0.000948984	0.000343669	0.000124458
FILA9	0.00262047	0.000948984	0.000343669	0.000124458

BIBLIOGRAFIA

Bailey, R., Le Roy, J., *Two Studies in Automovile Insurance Rate Making*. The Astin Bulletin, 1960, 192-217.

Beard, R., Pentikainen, T., Pessoner, E., *Risk Theory*. Methuen & Co., 1969.

Buhlmann, H., *Mathematical Methods in Risk Theory*. New York. Ed. Springer Verlag, 1970.

Cochran, W., *Técnicas de Muestreo*. México: Compañía Editorial Continental, 1980.

Feller, W., *An Introduction to Probability Theory and its aplications*. Vol.1, John Wiley & Sons, 1957.

Gerber, H., *An Introduccion to Mathematical Risk Theory*. Richard D. Irwin Inc., 1979.

Gossiaux, A. Lemaire, J., *Methodes d'ajustement de distributions de siniestres*. Bulletin Association of Swiss Actuaries, "ASA", Nº 1, 1981, 87-95.

Hillier, F., Lieberman, G., *Introducción a la Investigación de Operaciones*. México: Ed. McGraw-Hill, 1982.

Karlin, S., *A First Course in Stochastic Processes*. New York: Academic Press.

Seal, H., *Stochastic Theory of Risk Bussiness*. New York: Ed. Wiley, 1969.

Vepsäläimen, S., *Aplications to a Theory of Bonus Systems*. The Astin Bulletin, Vol. III, part. 3, 1972, 212-221.

* * *