Revista Colombiana de Estadística
N° 13 Julio de 1986.

CONTRIBUCION AL ESTUDIO DE FORMAS CUADRATICAS EN ESTADISTICA MULTIVARIADA

J. Poltronieri.

Resumen. En el estudio de formas cuadráticas hemos obtenido resultados para la matriz aleatoria $Y \sim N(\Gamma, V\otimes\Sigma)$ en el caso V-singular. Los teoremas requieren que la matriz Σ sea no singular. Aquí estudiamos el caso Σ-singular y obtenemos condiciones similares al caso no singular. Además estudiamos las formas cuadráticas del tipo $Y'HY$ con $H_{p\times p}$ simétrica. También obtenemos las fórmulas de covarianza entre matrices aleatorias introduciendo el producto de Kronecker antisimétrico.

Abstracts. We consider the aleatorie matrix $Y \sim N(\Gamma, V\otimes\Sigma)$ for case V-singular and the case when Σ is singular.

More over we study the form of the type $Y'HY$ with H $p\times p$ symetric, and we obtain the formules of covariances betwwen aleatories matrices.

<u>Introducción</u>. En el estudio de las formas cuadráticas hemos obtenido resultados en el caso en que la matriz $Y = (Y_1,\ldots,Y_n)$ de n observaciones p-dimensionales se distribuya como una $N(\Gamma,V\otimes\Sigma)$ en el caso en que V es singular, Todos estos teoremas requieren que la matriz Σ sea definida positiva. Sin embargo estos resultados que pueden generalizar al caso Σ singular. Se hace necesario definir la distribución *Wishart* Σ-*singular* y se establecen propiedades similares al caso no singular.

Las formas cuadráticas estudiadas son de la forma $YAY' = \sum a_{\alpha\beta}Y_\alpha Y'_\beta$ con $A_{n\times n}$ matriz simétrica, pero además se pueden definir las fórmulas cuadráticas $Y'HY$ con $H_{p\times p}$ simétrica. Se obtienen condiciones para que se distribuyan como una Wishart Σ-singular o V-singular en general; así como las fórmulas de varianzas y covarianzas de las formas consideradas.

Notación y definiciones.

Consideremos n observaciones p-dimensionales $y_\alpha \sim N_p(\mu_\alpha, v_{\alpha\alpha}\Sigma)$ $\alpha = 1,\ldots,n$ y definimos:

$$Y = (y_1,\ldots,y_n) = \begin{bmatrix} y^{1\prime} \\ \vdots \\ y^{p\prime} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11} \cdots y_{1n} \\ \vdots \quad\quad \vdots \\ y_{p1} \cdots y_{pn} \end{bmatrix} \sim N(\Gamma, V\otimes\Sigma)$$

donde

$$\Gamma = (\mu_1,\ldots,\mu_n) \text{ i.e. } E(Y) = \Gamma,$$

$$Var(Y) = V\otimes\Sigma = (cov(y_\alpha, y_\beta))$$

Observemos que

$$y^j \sim N(\pi_j, \sigma_{jj}V) \quad j = 1,\ldots,p \text{ y que:}$$

$$cov(y^i, y^j) = \sigma_{ij}V, \quad cov(y_\alpha, y_\beta) = v_{\alpha\beta}\Sigma$$

donde

$$\Gamma' = (\pi_1,\ldots,\pi_p) \text{ i.e. } Y' \sim N(\Gamma', \Sigma\otimes V)$$

Definición 1.

Sea $Y \sim N(\Gamma, I\otimes\Sigma)$ con Σ-singular, diremos que la matriz aleatoria YY' se distribuye como una Wishart Σ-singular con n grados de libertad y parámetro de decentraje $\Gamma\Gamma'$ si su función característica es:

$$\phi(\Theta) = |I-2i\Theta\Sigma|^{-\frac{1}{2}} e^{itr(i-2i\Theta\Sigma)^{-1}\Theta\Gamma\Gamma'}$$

con Σ-singular

y la denotamos $W(\Sigma,n,\Gamma\Gamma')$ Σ-singular

<u>Teorema 1</u>. Sea $Y \sim N(\Gamma, I\otimes\Sigma)$ Σ-singular y sea A una matriz simétrica $n\times n$ de rango r, entonces:

$$YAY' \sim W(\Sigma,r,\Gamma A\Gamma') \quad \Sigma\text{-singular sí y solo si } A \text{ es idempotente}$$

<u>Demostración</u>. Sea A una matriz simétrica, existe P ortogonal tal que $PAP' = D_\lambda$ matriz de valores propios de A i.e.

$$YAY' = ZD_\lambda Z' = \sum \lambda_\alpha Z_\alpha Z_\alpha' \text{ con } Z = YP \sim N(\Gamma P, I\otimes\Sigma)$$

entonces:

$$\phi(\Theta) = \prod_{\alpha=1}^{n} |I-2i\lambda_\alpha\Theta\Sigma|^{-\frac{1}{2}} e^{i\lambda_\alpha \upsilon_\alpha'(I-2i\lambda_\alpha\Theta\Sigma)^{-1}\Theta\upsilon_\alpha}$$

$$= |I-2i\Theta\Sigma|^{-\frac{r}{2}} e^{itr(I-2i\Theta\Sigma)^{-1}\Theta\Gamma A\Gamma'}$$

si y solo sí A es idempotente i.e. $\lambda_\alpha = 1$,

$\alpha = 1,\ldots,r;\quad \lambda_\alpha = 0,\quad \alpha = r+1,\ldots,n.$

Notemos que $\upsilon = \Gamma P$ y que $\Gamma A\Gamma' = \sum_{\alpha=1}^{r} \upsilon_\alpha \upsilon_\alpha'$

<u>Teorema 2.</u> Sea $Y \sim N(\Gamma, V\otimes\Sigma)$ Σ-singular, V no singular, entonces:

$YAY' \sim W(\Sigma, tr(AV), \Gamma A\Gamma')$ Σ-singular sí y solo si AV es idempotente

<u>Demostración</u>. Sea P tal que $PVP' = I$ i.e.

$$Z = YP' \sim N(\Gamma P', I\otimes\Sigma).\quad \text{Así:}$$

$YAY' = Z(P')^{-1}AP^{-1}Z' \sim W(\Sigma, q, \Gamma A\Gamma')$ Σ-singular

sí y solo si $(P')^{-1}AP^{-1}$ es idempotente donde

$q = tr(AV)$ es decir AV es idempotente.

<u>Teorema 3.</u> Sea $Y \sim N(\Gamma, V\otimes\Sigma)$ Σ-singular, V-singular de rango r, entonces:

$YAY' \sim W(\Sigma, tr(AV), \Gamma A\Gamma')$ Σ-singular sí y solo

sí $\quad VAVAV = VAV$

$\quad \Gamma A\Gamma' = \Gamma AVA\Gamma'$

$\quad \Gamma AV = \Gamma AVAV$

<u>Demostración</u>. Sea $Y = \Gamma + XL'$ donde $X \sim N(0, I_r\otimes\Sigma)$, $L_{r\times n}$ es tal que $V = LL'$ y

$L'AL = D_\lambda$ matriz diagonal cuyos valores propios no nulos coinciden con los de AV. Así tenemos que

$$YAY' = XL'ALX'+\Gamma AL'X'+XLA\Gamma'+\Gamma A\Gamma'$$

$$\phi(\Theta) = E(e^{itr\Theta YAY'})$$

$$= e^{itr\Gamma A\Gamma'\Theta}E(e^{itr(\Theta XL'ALX')+2itr(XL'A\Gamma'\Theta)})$$

sabemos que:

$$tr\Theta XL'ALX' = \sum_{\alpha=1}^{r} \lambda_\alpha X'_\alpha \Theta X_\alpha \ ,$$

$$trXL'A\Gamma'\Theta = \sum_{\alpha=1}^{r} b'_\alpha X_\alpha$$

donde $b'_\alpha = L'_\alpha A\Gamma'\Theta$. Sea $H_{p\times r}$ una matriz tal que $\Sigma = HH'$, $H'\Theta H = D_\delta$ es una matriz diagonal cuyos valores propios no nulos coinciden con los de $\Theta\Sigma$. Sea $X_\alpha = HZ_\alpha$ con $Z_\alpha \sim N(0,I_r)$ (vamos a suprimir los índices "α" para aligerar la escritura):

$X'\Theta X+2b'X = Z'H'\Theta HZ+2b'HZ$ entonces:

$$E(e^{i(X'\Theta X+2b'X)})$$

$$= |I_r-2iH'\Theta H|^{-\frac{1}{2}}e^{-2b'H(I_r-2iH'\Theta H)^{-1}H'b}$$

$$= |I_p-2i\Theta\Sigma|^{-\frac{1}{2}}e^{-2b'\Sigma(I_p-2i\Theta\Sigma)^{-1}b}$$

Así tenemos que la función característica es:

$$\phi(\Theta) = e^{itr\Gamma A\Gamma'\Theta} \prod_{\alpha=1}^{r} |I-2i\lambda_\alpha\Theta\Sigma|^{-\frac{1}{2}}$$

$$exp(-2 \sum_{\alpha=1}^{r} L_\alpha' A\Gamma'\Theta\Sigma(I-2i\lambda_\alpha\Theta\Sigma)^{-1}\Theta\Gamma AL_\alpha)$$

entonces:

$YAY' \sim W(\Sigma, q, \Gamma A\Gamma')$ Σ-singular sí y solo si

- $\lambda_\alpha = 1$, $\alpha = 1,\ldots,q = tr(AV), \lambda_\alpha = 0$ $\alpha = q+1, \ldots, r$ i.e. $L'AL$ es idempotente sí y solo si $VAVAV = VAV$

- $\Gamma A\Gamma' = \Gamma AVAVA\Gamma' = \Gamma AVA\Gamma'$

- $\Gamma AV = \Gamma AVAV$

Para la demostración es necesario verificar que si:

$$itr\ A - itr\ B + itr(I-2i\Theta\Sigma)^{-1}\Theta B - 2tr\Theta\Sigma\Theta(C-B)$$

$$= itr(I-2i\Theta\Sigma)^{-1}\Theta D$$

entonces $A = B = D$ lo que implica que $tr\Theta\Sigma\Theta(C-B) = 0$ y por la forma de $C-B$ que se descompone de manera tal que $tr\Theta\Sigma\Theta(C-B) = trHH' = 0$ implica que $H = 0$ teniéndose que $B = C$.

Para demostrar que $A = B = D$ se define Θ como la matriz cero salvo en la entrada ij. Así tenemos que $a_{ij} = b_{ij}$ y $a_{ij} = d_{ij}$.

<u>Corolario</u>. Si $Y \sim N(\Gamma, V\otimes\Sigma)$ entonces $Y = \Gamma + KXL'$ donde $X \sim N(0, I_r \otimes I_s)$ $V = LL'$, $\Sigma = KK'$; las matrices son de tamaño $L_{n\times r}$, $K_{p\times s}$ con $r = rang V$ $s = rang$.

Recordemos que si $Y \sim N(\Gamma, V\otimes\Sigma)$ Σ-singular o V-singular:

$$Z = YH \sim N(\Gamma H, H'VH\otimes\Sigma)$$

$$X = AY \sim N(A\Gamma, V\otimes A\Sigma A')$$

<u>Teorema 4</u>. Sea $Y \sim N(\Gamma, V\otimes\Sigma)$ Σ-singular V-singular entonces:

YA y YB son independientes sí y solo si $A'VB = 0$

<u>Demostración</u>. Sea $X \sim N(0, I_r\otimes\Sigma)$ tal que $Y = \Gamma + XL'$ con $V = LL'$, $L_{r\times n}$ $r = rang V$ entonces:

$$YB = \Gamma B + XL'B = \Gamma B + KZL'B$$

$$YA = \Gamma A + XL'A = \Gamma A + KZL'A$$

donde $X = KZ$, $Z \sim N(0, I_r\otimes I_s)$ y $KK' = \Sigma$, $K_{p\times s}$ $s = rang\,\Sigma$. Así YB, YA son independientes sí y solo si $KZL'A$, $KZL'B$ son independientes sí y solo si $ZL'A$, $ZL'B$ son independientes sí y solo sí $A'LL'B = 0 = A'VB$.

Corolario. - $\mathrm{cov}(KZL'A, KZL'B) = A'VB \otimes \Sigma$

- si $X \sim N(\Gamma, V \otimes \Sigma)$ Σ-singular, V-singular:

$$\mathrm{cov}(KXA, HXB) = A'VB \otimes K\Sigma H'$$

Teorema 5. Sea $Y \sim N(\Gamma, V \otimes \Sigma)$ Σ-singular, V-singular entonces:

YAY' y YB son independientes sí y solo si
$-B'VAV = 0$
$-B'VA\Gamma' = 0$

Demostración. Sea $X \sim N(0, I_r \otimes I_s)$ tal que $Y = \Gamma + KXL'$ con $V = LL'$ $L_{r \times n}$ $L'AL$ diagonal y $KK' = \Sigma$, $K_{s \times p}$ entonces:

$YAY' = KXL'ALXK' + KXL'A\Gamma' + \Gamma ALX'K' + \Gamma A\Gamma'$

$YB = \Gamma B + KXL'B$ son independientes sí y solo si:

- $KXL'B$ y $KXL'ALXK'$ son independientes y

- $KXL'B$ y $KXL'A\Gamma'$ son independientes.

i.e. sí y solo si: - $B'LL'A\Gamma' = B'VA\Gamma' = 0$

$$- B'LL'AL = 0 \text{ i.e. } B'VAV = 0$$

Corolario. YAY' y YBY' son independientes sí y solo si $VAVBV = 0$

$$\Gamma AVB\Gamma' = 0$$

$$\Gamma BVAV = \Gamma AVBV = 0$$

Teorema 6. Sea $Y \sim N(\Gamma, V \otimes \Sigma)$ Σ-singular, V-singular y sea $A_{n\times n}$ simétrica, $B_{n\times p}$ y $C_{p\times p}$ entonces:

$$(YAY'+YB+C)^* \sim W(\Sigma, tr(AV), (A\Gamma'+\tfrac{1}{2}B)'V(A\Gamma'+\tfrac{1}{2}B))$$

Σ-singular sí y solo si

$$- VAVAV = VAV$$

$$- (A\Gamma'+\tfrac{1}{2}B)'V = (A\Gamma'+\tfrac{1}{2}B)'VAV$$

$$- (\Gamma A\Gamma'+\Gamma B+C)^* = (A\Gamma'+\tfrac{1}{2}B)'V(A\Gamma'+\tfrac{1}{2}B) \text{ donde}$$

$$Q^* = \tfrac{1}{2}(Q+Q')$$

Demostración. Sea $X \sim N(0, I_r \otimes I_s)$ tal que $Y = \Gamma+KXL'$ donde $\Sigma = KK'$, $V = LL'$, $L'AL = D_\lambda$ diagonal de valores $\{\lambda_1,\ldots,\lambda_r\}$ cuyos valores no nulos coinciden con los valores no nulos de AV. La función característica es:

$$\phi(\Theta) = e^{itr\Theta(\Gamma A\Gamma'+\Gamma B+C)^*} E(e^{itr\Theta KXL'ALX'K'+2i\Theta KXL'(A\Gamma'+\frac{1}{2}B)})$$

$$= e^{itr\Theta(\Gamma A\Gamma'+\Gamma B+C)^*} \prod_{\alpha=1}^{r} E(e^{i\lambda_\alpha X_\alpha' K_\alpha' \Theta K X_\alpha + 2ig_\alpha' X_\alpha})$$

donde

$$G = (L'A\Gamma'+\tfrac{1}{2}L'B)\Theta, \qquad G' = (g_1,\ldots,g_r).$$

Así:

$$\phi(\Theta) = e^{itr\Theta(\Gamma A\Gamma'+\Gamma B+C)^*} \prod_{\alpha=1}^{r} |I_s - 2i\lambda_\alpha K'\Theta K|^{-\frac{1}{2}}$$

$$\exp\{-2\sum_{\alpha=1}^{r} g_\alpha' K(I_s-2i\lambda_\alpha K'\Theta K)^{-1}K' g_\alpha\}$$

$$= e^{itr\Theta(\Gamma A\Gamma'+\Gamma B+C)^*} \prod_{\alpha=1}^{r} |I_p - 2i\lambda_\alpha \Theta\Sigma|^{-\frac{1}{2}}$$

$$\exp\{-2\sum_{\alpha=1}^{r} g_\alpha' \Sigma(I_p-2i\lambda_\alpha\Theta\Sigma)^{-1} g_\alpha$$

entonces es la función característica de una Wishart Σ-singular sí y solo si

- $\lambda_\alpha = 1$, $\alpha = 1,\ldots,tr(AV) = q$, $\lambda_\alpha = 0$

  $\alpha = q+1,\ldots,r$ es decir $L'AL$ es idempotente sí y solo si $VAVAV = VAV$

- $itr\Theta(\Gamma A\Gamma'+\Gamma B+C)^* - 2\sum_{\alpha=1}^{q} g_\alpha'\Sigma(I-2i\Theta\Sigma)^{-1}g_\alpha$

  $-2\sum_{\alpha=q+1}^{r} g_\alpha'\Sigma g_\alpha =$

$$itr(I-2i\Theta\Sigma)^{-1}\Theta(A\Gamma'+\tfrac{1}{2}B)'V(A\Gamma'+\tfrac{1}{2}B).$$

Si se toma en euenta que $g'_\alpha = L'_\alpha(A\Gamma'+\tfrac{1}{2}B)\Theta$ y que $\sum_{\alpha=1}^{q} L_\alpha L'_\alpha = VAV$ se tiene que el término de la izquierda es igual a:

$$itr\Theta(\Gamma A\Gamma'+\Gamma B+C)^* - itr\Theta(A\Gamma'+\tfrac{1}{2}B)'VAV(A\Gamma'+\tfrac{1}{2}B)+$$

$$itr(I-2i\Theta\Sigma)^{-1}\Theta(A\Gamma'+\tfrac{1}{2}B)'VAV(A\Gamma'+\tfrac{1}{2}B)-2tr\Sigma\Theta$$

$$(A\Gamma'+\tfrac{1}{2}B)'(V-VAV)(A\Gamma'+\tfrac{1}{2}B)$$

por lo que se tiene:

$$-\ (\Gamma A\Gamma'+\Gamma B+C)^* = (A\Gamma'+\tfrac{1}{2}B)'V(A\Gamma'+\tfrac{1}{2}B)$$

$$-\ (A\Gamma'+\tfrac{1}{2}B)'V = (A\Gamma'+\tfrac{1}{2}B)'VAV$$

Para la demostración de lo anterior se utiliza el mismo argumento que en el teorema 3.

<u>Teorema 7</u>. Sea $X \sim N(\Gamma, V\otimes\Sigma)$ Σ-singular y sean A_i $n\times n$ matrices simétricas $i = 1,\ldots,q$, $reng(VA_iV) = r_i$ y $A = \sum_{i=1}^{q} A_i$, $rang(VAV) = r$. Si

i) V es no singular

ii) V es singular, $\Gamma = 0$

iii) V es singular, $\Gamma \neq 0$ y A_i es semidefinida positiva $i = 1,\ldots,q$ entonces las condiciones siguientes:

a) $XA_iX' \sim W(\Sigma, r_i, \Gamma A\Gamma')$ Σ-singular

b) XA_iX' son independientes $i = 1,\ldots,q$

c) $XAX' \sim W(\Sigma, r, \Gamma A\Gamma')$ Σ-singular

d) $r = \sum_{i=1}^{q} r_i$

son implicadas por dos de las condiciones (*a*), (*b*), (*c*) y por (*a*) y (*d*) (ver (4), pag.71).

<u>Teorema 8</u>. Sea $X \sim N(\Gamma, V\otimes\Sigma)$ Σ-singular, V-singular entonces la forma cuadrática XAX' tiene por función característica:

$$\phi(\Theta) = \prod_{\alpha=1}^{r} |I - 2i\lambda_\alpha \Theta\Sigma|^{-\frac{1}{2}}$$

$$e^{-2(\sum_{\alpha=1}^{r} L_\alpha' A\Gamma'\Theta\Sigma(I-2i\lambda_\alpha\Theta\Sigma)^{-1}\Theta\Gamma A L_\alpha + itr\Theta\Gamma A\Gamma'}$$

donde $q = rang(VAV)$, L $n\times r$, $LL' = V$, $L'AL = D$ diagonal, $r = rangV$.

Si los q valores propios no nulos de AV son iguales a δ y si $\Gamma AVAVA\Gamma' = \delta\Gamma AVA\Gamma'$ entonces:

$\frac{1}{s}(XAX'-\Gamma(A-\frac{AVA}{s})\Gamma') \sim W(\Sigma,q,\frac{1}{s}\Gamma AVA\Gamma')$ Σ-singular

(ver (2))

Hemos generalizado la noción de distribución Wishart para el caso Σ singular y verificado que los resultados son similares al caso no singular. Este resultado nos servirá para poder estudiar las distribuciones del tipo $Y'HY$ que analizaremos en la próxima sección.

ESTUDIO DE LAS FORMAS CUADRATICAS $Y'KY$

Consideremos k una matriz simétrica $p\times p$ y la forma cuadrática $Y'KY$ matriz aleatoria $n\times n$, la cual se escribe:

$$Y'KY = (Y^1,\ldots,Y^p)K\begin{bmatrix} Y^{1'} \\ \vdots \\ Y^{p'} \end{bmatrix} = \sum_{ij} K_{ij}Y^iY^{j'}$$

donde $Y' \sim N(\Gamma',\Sigma\otimes V)$ por lo que:

$$Y^i \sim N(\nu_i,\sigma_{ii}V),\ cov(Y^i,Y^j) = \sigma_{ij}V.$$

Consideremos primeramente que $\Sigma = I_p$ y sea P ortogonal tal que $PKP' = D_\lambda$ matriz diagonal de valores propios de K , entonces:

$$Y'KY = Z'D_\lambda Z = \sum\lambda_i Z^iZ^{i'}$$

con $Z' = (Z^1,\ldots,Z^p) \sim N(\Gamma'P', I_p \otimes V)$.

La función característica está dada por:

$$\phi(\Theta) = E(e^{itr\Theta Y'KY}) = E(e^{itr\Theta\sum_j \lambda_j Z^j Z^{j'}})$$

$$= \prod_{j=1}^{p} |I-2i\lambda_j\Theta|^{-\frac{1}{2}} e^{i\lambda_j \nu_j'(I-2i\lambda_j\Theta)^{-1}\Theta\nu_j}$$

entonces la forma cuadrática tiene una distribución Wishart $W(V,q,\Gamma'K\Gamma)$ $q = tr(K)$ sí y solo si:

$$\phi(\Theta) = \prod_{j=1}^{p} |I-2i\lambda_j\Theta|^{-\frac{1}{2}} e^{i\nu_j'\lambda_j(I-2i\lambda_j\Theta)^{-1}\Theta\nu_j}$$

$$= |I-2i\Theta|^{-\frac{1}{2}q} e^{itr(I-2i\Theta)^{-1}\Theta\Gamma K\Gamma'}$$

i.e. $\lambda_j = 1$ $j = 1,\ldots,q$; $\lambda_j = 0_q j = q+1,\ldots,p$ es decir K es idempotente pues $\sum_{j=1} \nu_j\nu_j' = \Gamma'K\Gamma$.

Así hemos demostrado el siguiente teorema.

<u>**Teorema 9**</u>. Sea $Y' \sim N(\Gamma', I_p \otimes V)$ entonces $Y'KY \sim W(V,q,\Gamma'K\Gamma)$ sí y solo si K es idempotente con $q = trK$.

Vamos a analizar el caso en que V es singular y Σ es singular. Sea A una matriz $p\times r$ de rango completo tal que $AA' = \Sigma$, $A'KA = D_\lambda$ matriz de valores propios no nulos iguales a los valores propios de $K\Sigma$, y sea $V = \ell L'$ L $n\times s$ de rango completo, $s = \operatorname{rang}V$, entonces:

$$Y = \Gamma + AZL' \quad \text{donde } Z \sim N(0, I_r \otimes I_s)$$

Así $Y'KY = LZ'A'KAZL' + LZ'A'K\Gamma + \Gamma'KAZL' + \Gamma'K\Gamma$

por lo que

$$\operatorname{tr}\Theta Y'KY = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j Z^{j\prime} L'\Theta L Z^j + 2\operatorname{tr} Z'A'K\Gamma\Theta L + \operatorname{tr}\Gamma'K\Gamma$$

$$= \sum_{j=1}^{r} \lambda_j Z^{j\prime} L'\Theta L Z^j + 2\sum_{i=1}^{r} b_i' Z^i + \operatorname{tr}\Gamma'K\Gamma$$

donde $B' = \begin{bmatrix} b_1' \\ \vdots \\ b_r' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1' \\ \vdots \\ a_r' \end{bmatrix} K\Gamma\Theta L$. La función característica es:

$$\phi(\Theta) = e^{i\operatorname{tr}\Gamma'K\Gamma\Theta} \prod_{j=1}^{r} E(e^{i\lambda_j Z^{j\prime} L'\Theta L Z^j + 2b_j' Z_j}) =$$

$$= e^{i\operatorname{tr}\Gamma'K\Gamma\Theta} \prod_{j=1}^{r} |I_s - 2i\lambda_j L'\Theta L|^{-\frac{1}{2}}$$

$$e^{-2a_j' K\Gamma\Theta L(I_s - 2i\lambda_j L'\Theta L)^{-1} L'\Theta\Gamma' K a_j}$$

$$= e^{i\operatorname{tr}\Gamma'K\Gamma\Theta} \prod_{j=1}^{r} |I_n - 2i\lambda_j \Theta V|^{-\frac{1}{2}}$$

$$e^{-2a_j' K\Gamma\Theta V(I_n - 2i\lambda_j \Theta V)^{-1}\Theta\Gamma' K a_j}$$

$$= |I_n - 2i\Theta V|^{-\frac{1}{2}q} e^{i\operatorname{tr}(I_n - 2i\Theta V)^{-1}\Theta\Gamma'K\Gamma}$$

sí y solo si $-\lambda_j = 1$ $j = 1,\ldots,q = tr(\Sigma K)$,

$\lambda_j = 0$ $j = q+1,\ldots,n$ ($A'KA$ es idempotente es

decir $\Sigma K\Sigma K\Sigma = \Sigma K\Sigma$ y

$$-2tr(I-2i\Theta V)^{-1}\Theta\Gamma' K\sum_{j=1}^{q} a_j a_j' K\Gamma\Theta V - 2tr\Gamma\Theta V\Theta\Gamma' K$$

$$\sum_{j=q+1}^{n} a_j a_j' K$$

$$= -2tr(I-2i\Theta V)^{-1}\Theta\Gamma' K\Sigma K\Sigma K\Gamma\Theta V - 2trV\Theta\Gamma' K(\Sigma-\Sigma K\Sigma)K\Gamma\Theta$$

Así:

$$-2trV\Theta\Gamma'(K\Sigma K-K\Sigma K\Sigma K)\Gamma\Theta + itr(I-2i\Theta V)^{-1}\Theta\Gamma' K\Sigma K\Sigma K\Gamma$$

$$-itr\Theta\Gamma' K\Gamma - itr\Theta\Gamma' K\Sigma K\Sigma K\Gamma = itr(I-2i\Theta V)^{-1}\Theta\Gamma' K\Gamma$$

por lo que:

$$\Gamma' K\Gamma = \Gamma' K\Sigma K\Sigma K\Gamma$$

$\Gamma' K\Gamma = \Gamma' K\Sigma K\Sigma$ i.e. $\Gamma' K\Gamma = \Gamma' K\Sigma K\Gamma$ (ver teorema 3).

Así tenemos el resultado siguiente:

Teorema 10. Sea $Y' \sim N(\Gamma', \Sigma\otimes V)$ V-singular, Σ-singular entonces la forma cuadrática $Y'KY \sim W(V, tr(K\Sigma), \Gamma' K\Gamma)$ V-singular sí y solo si:

$- \Sigma K \Sigma K \Sigma = \Sigma K \Sigma$

$- \Gamma' K \Gamma = \Gamma' K \Sigma K \Gamma$

$-\Gamma' K \Sigma = \Gamma' K \Sigma K \Sigma$

Teorema 11. Sea $Y' \sim N(\Gamma', \Sigma \otimes V)$ Σ-singular, V-singular entonces $Y'H$, $Y'K$ son independientes sí y solo si $H \Sigma K' = 0$

La demostración es similar al argumento del teorema 4.

Corolario. $cov(AY'K, BY'H) = K \Sigma H' \otimes A' V B$

Los resultados siguientes son consecuencia inmediata de la analogía entre las formas YAY' y $Y'KY$ y las formas YB y $Y'H$ que hemos demostrado en el teorema 10 y el teorema 11. Para las demostraciones, se repiten los argumentos utilizados en el teorema 3.

Teorema 12. Sea $Y' \sim N(\Gamma', \Sigma \otimes V)$ V-singular, Σ-singular entonces $Y'HY$ y $Y'K$ son independientes sí y solo si $K' H = 0$, $K' V H = 0$

Corolario. $Y'HY$ y $Y'KY$ son independientes sí y solo si $\Sigma H \Sigma K \Sigma = 0$

$\Gamma' H \Sigma K \Gamma = 0$

$\Gamma' H \Sigma K \Sigma = \Gamma' K \Sigma H \Sigma = 0$

Teorema 13. Sea $Y' \sim N(\Gamma', \Sigma \otimes V)$ V-singular, Σ-singular y sea H $p\times p$ una matriz simétrica, K $p\times n$ y C $n\times n$ matrices, entonces:

$$(Y'HY+Y'K+C)^* \sim W(V, tr(H\Sigma), (H\Gamma+\tfrac{1}{2}K)'\Sigma(H\Gamma+\tfrac{1}{2}K))$$

V-singular sí y solo si

- $\Sigma H\Sigma H\Sigma = \Sigma H\Sigma$

- $(H\Gamma+\tfrac{1}{2}K)'\Sigma = (H\Gamma+\tfrac{1}{2}K)'\Sigma H\Sigma$

- $(\Gamma'H\Gamma+\Gamma'K+C)^* = (H\Gamma'+\tfrac{1}{2}K)'\Sigma(H\Gamma'+\tfrac{1}{2}K)$

con $Q^* = \tfrac{1}{2}(Q+Q')$

Teorema 14. Sea $Y' \sim N(\Gamma', \Sigma \otimes V)$ V-singular, Σ-singular, la función característica de $Y'HY$ es:

$$\phi(\Theta) = \prod_{\alpha=1}^{r} |I-2i\lambda_\alpha \Theta V|^{-\frac{1}{2}}$$

$$e^{-2\sum_{\alpha=1}^{r} L'_\alpha H\Gamma\Theta V(I-2i\lambda_\alpha\Theta V)^{-1}\Theta\Gamma' H L_\alpha + i\,tr\,\Theta\Gamma' H\Gamma}$$

donde los $q = rang(\Sigma H\Sigma)$, L $p\times r$, $LL' = \Sigma$, $L'HL = D_\lambda$ diagonal, $r = rang\Sigma$.

Si los q valores propios no nulos de $H\Sigma$ son iguales a δ y si $\Gamma'H\Sigma H\Sigma H\Gamma = \delta\Gamma'H\Sigma H\Gamma$ entonces:

$$\frac{1}{\delta}(Y'HY-\Gamma'(H-\frac{HVH}{\delta})\Gamma) \sim W(V,q,\frac{1}{\delta}\Gamma'HVH\Gamma) \quad V\text{-singular}$$

Otros teoremas se pueden obtener intercambiando Y por Y' y V por Σ. A manera de resumen presentamos la tabla 1 y la tabla 2.

Nuestro interés ahora es obtener la fórmula de covarianza entre las formas cuadráticas mixtas y las formas lineales mixtas.

Definición 2.

Se define el producto anti-simétrico de Kronecker de las matrices A y B por: (la entrada $ijkl$ es la entrada kl del bloque ij)

$$(A\ddot{\otimes}B)_{ijkl} = a_{ik}b_{jl} = (A\otimes B)_{ijkl}$$

La fórma cuadrática centrada la escribimos así:

$$YAY'-\Gamma A\Gamma'-\Sigma tr(AV)$$

$$= (Y-\Gamma)A(Y-\Gamma)'+\Gamma A(Y-\Gamma)'+(Y-\Gamma)A\Gamma'-\Sigma tr(AV)$$

$$= \sum_{\alpha\beta}(a_{\alpha\beta}\mathring{y}_{\alpha}\mathring{y}'_{\beta}+\delta_{\alpha\beta}\nu_{\alpha}\mathring{y}'_{\beta}+\delta_{\alpha\beta}\mathring{y}_{\alpha}\nu'_{\beta}-\delta_{\alpha\beta}(AV)_{\alpha\beta}\Sigma)$$

$$Y'KY-\Gamma'K\Gamma-Vtr(\Sigma K) = (Y-\Gamma)'K(Y-\Gamma)+\Gamma'K(Y-\Gamma)+$$

$$(Y-\Gamma)'K\Gamma-Vtr(\Sigma K)$$

$$= \sum_{st}(K_{st}\mathring{y}^{s}\mathring{y}^{t'}+\delta_{st}\lambda_{s}\mathring{y}^{t'}+\delta_{st}\mathring{y}^{s}\lambda_{t}'-\delta_{st}(\Sigma K)_{st}V)$$

donde

$$\nu = (\nu_1,\ldots,\nu_n) = \Gamma A, \quad \mathring{y} = y_{\alpha}-\mu_{\alpha},$$

$$\lambda = (\lambda_1,\ldots,\lambda_p) = \Gamma'K, \quad \mathring{y}^{s} = y^{s}-\pi_{s}.$$

Definimos:

$$\Sigma = (\sigma^1,\ldots,\sigma^p) \text{ y } \sigma= \begin{bmatrix}\sigma^1\\ \vdots\\ \sigma^p\end{bmatrix},$$

$$V = (v_1,\ldots,v_n) \text{ y } \rho= \begin{bmatrix}v_1\\ \vdots\\ v_n\end{bmatrix}.$$

La forma lineal centrada $Y'K$ es:

$$(Y-\Gamma)'K = \sum_{s} (h_{1s}\mathring{y}^{s},\ldots,k_{qs}\mathring{y}^{s})$$

La entrada $ijkl$ de la covarianza es:

$$\sum_{\alpha\beta s} E(\delta_{\alpha\beta}y_{i\beta}k_{js}\nu_{k\alpha}y_{sl}+\delta_{\alpha\beta}\nu_{i\beta}k_{js}y_{k\alpha}y_{sl})$$

$$= (\Gamma AV)_{kl}(K\Sigma)_{ji}+(\Gamma AV)_{il}(K\Sigma)_{jk}$$

i.e. $\quad cov(YAY',Y'K) = \Sigma K'\otimes\Gamma AV+\Gamma AV\otimes\Sigma K'$

Dado que los términos de orden 1 y de orden 3 se anulan, la entrada $ijk\ell$ de la covarianza entre YAY' y $Y'KY$ es:

$$\sum_{\alpha\beta s t} E(a_{\alpha\beta}k_{st}y_{i\beta}y_{sj}y_{k\alpha}y_{t\ell}+\delta_{\alpha\beta}\delta_{st}y_{i\beta}y_{sj}\nu_{k\alpha}\lambda_{t\ell}$$

$$+\delta_{\alpha\beta}\delta_{st}\nu_{i\beta}y_{sj}y_{k\alpha}\lambda_{t\ell}+\delta_{\alpha\beta}\delta_{st}y_{i\beta}\lambda_{sj}\nu_{k\alpha}y_{t\ell}+$$

$$\delta_{\alpha\beta}\delta_{st}\nu_{i\beta}\lambda_{sj}y_{k\alpha}y_{t\ell}-a_{\alpha\beta}(K\Sigma)_{st}\delta_{st}y_{i\beta}y_{k\alpha}\nu_{j\ell}-$$

$$(AV)_{\alpha\beta}\delta_{\alpha\beta}k_{st}y_{sj}\sigma_{ki}y_{t\ell}+(AV)_{\alpha\beta}\delta_{\alpha\beta}(\Sigma K)_{st}\delta_{st}\sigma_{ik}\nu_{j\ell})$$

$$= (VAV)_{\ell j}(\Sigma K\Sigma)_{ik}+tr(AV)tr(\Sigma k)\sigma_{ik}\nu_{j\ell}$$

$$+(VAV)_{j\ell}(\Sigma K\Sigma)_{ik}+(\Gamma AV)_{kj}(\Sigma K\Gamma)_{i\ell}+(VA\Gamma)_{ji}(\Sigma K\Gamma)_{k\ell}$$

$$+(\Gamma AV)_{k\ell}(\Sigma K\Gamma)_{ij}+(\Gamma AV)_{i\ell}(\Sigma K\Gamma)_{kj}$$

$$-tr(AV)tr(\Sigma K)\sigma_{ik}\nu_{j\ell}-tr(AV)tr(\Sigma K)\sigma_{ik}\nu_{j\ell}$$

$$+tr(AV)tr(\Sigma K)\sigma_{ik}\nu_{j\ell}$$

Así tenemos que:

$$cov(YAY',Y'KY) = 2(\Sigma K\Sigma)\ddot{\otimes}VAV+(\Sigma K\Gamma)\otimes\Gamma AV$$

$$+(\Sigma K\Gamma)\dot{\otimes}\Gamma AV+\Gamma AV\otimes\Sigma K\Gamma+\Gamma AV\dot{\otimes}\Sigma K\Gamma$$

Es necesario recordar que en nuestro contexto:

$$- E(\mathring{y}_{i\alpha}\mathring{y}_{j\beta}\mathring{y}_{k\gamma}\mathring{y}_{\ell\delta}) = \nu_{\alpha\beta}\sigma_{ij}\nu_{\gamma\delta}\sigma_{k\ell}+\nu_{\alpha\gamma}\sigma_{ik}\nu_{\beta\delta}\sigma_{j\ell}$$

$$+\nu_{\alpha\gamma}\sigma_{i\ell}\nu_{\beta\gamma}\sigma_{jk}$$

$$- E(\mathring{y}_{i\alpha}\mathring{y}_{j\beta}) = \nu_{\alpha\beta}\sigma_{ij}$$

A manera de resumen tenemos los siguientes resultados:

$$cov(YAY',Y'K) = \Sigma K'\otimes\Gamma AV+\Gamma AV\dot{\otimes}\Sigma K'$$

$$cov(Y'HY,YB) = VB'\otimes\Gamma'H\Sigma+\Gamma'H\Sigma\dot{\otimes}VB'$$

$$cov(YAY',Y'KY) = 2(\Sigma K\Sigma)\ddot{\otimes}VAV+(\Sigma K\Gamma)\otimes\Gamma AV+ (\Sigma K\Gamma)\dot{\otimes}\Gamma AV+\Gamma AV\otimes\Sigma K\Gamma+\Gamma AV\dot{\otimes}\Sigma K\Gamma$$

$$cov(Y'HY,YAY') = 2(VAV)\ddot{\otimes}\Sigma H\Sigma+(VA\Gamma')\otimes\Gamma'H\Sigma+ (VA\Gamma')\dot{\otimes}\Gamma'H\Sigma+\Gamma'H\Sigma\otimes VA\Gamma'+ \Gamma'H\Sigma\dot{\otimes}VA\Gamma'$$

Para la verificación de las fórmulas al intercambiar los miembros de la covarianza, es necesario tomar en cuenta que:

$cov(T,Q)' = cov(Q,T)$ y que:

$$(A\otimes B)' = A'\otimes B' \quad (A\dot{\otimes}B)' = B'\dot{\otimes}A' \quad (A\ddot{\otimes}B)' = B\ddot{\otimes}A$$

En efecto:

$$(A\otimes B)'_{ijk\ell} = a_{ji}b_{\ell k} = a'_{ij}b'_{k\ell} = (A'\otimes B')_{ijk\ell}$$

i.e. $(A\otimes B)' = A'\otimes B'$

$$(A\dot{\otimes}B)'_{ijk\ell} = (A\dot{\otimes}B)_{ji\ell k} = a_{jk}b_{\ell i} = b'_{i\ell}a'_{kj}$$

$$= (B'\dot{\otimes}A')_{ijk\ell} \text{ i.e. } (A\dot{\otimes}B)' = B'\dot{\otimes}A'$$

$$(A\ddot{\otimes}B)'_{ijk\ell} = (A\ddot{\otimes}B)_{ji\ell k} = a_{j\ell}b_{ik} = (B\ddot{\otimes}A)_{ijk\ell}$$

i.e. $(A\ddot{\otimes}B)' = B\ddot{\otimes}A$

donde $S'_{ijk\ell}$ es la entrada $ijk\ell$ de la transpuesta, por lo que es igual a $S_{ji\ell k}$. Se verifica igualmente que:

$$cov(KYAY'K',B'Y'HYB) = 2(K\Sigma H\Sigma K)\otimes(B'VAVB)+$$

$$(K\Sigma H\Gamma'B)\otimes(K\Gamma AVB)+(K\Sigma H\Gamma'B)\dot{\otimes}(K\Gamma AVB)+$$

$$K\Gamma AVB\otimes K\Sigma H\Gamma'B+K\Gamma AVB\dot{\otimes}K\Sigma H\Gamma'B.$$

$$cov(KYAY'K',BY'H) = K'\Sigma H'\otimes\Gamma AVB+\Gamma AVB\dot{\otimes}K\Sigma H'$$

Estos cálculos se pueden efectuar de una manera más rápida y simple, tomando en cuenta los siguientes resultados (ver (3)).

Consideremos:

$$Vec(X) = [X] = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_p \end{pmatrix} np\times 1 \text{ donde } X= (X_1,\ldots,X_p)n\times p$$

Se denota $\mathring{X}$ la matriz centrada de X.

1) $Vec(AXC) = C'\otimes A[X]$.

Observemos que si $Var(X) = V\otimes\Sigma$ se tiene que:

$$cov(XB,XA) = E(B'\otimes I[\mathring{X}][\mathring{X}]'A\otimes I)$$

$$= B'\otimes I\ V\otimes\Sigma\ A\otimes I = B'VA\otimes\Sigma.$$

$$cov(KXA,HXB) = A'\otimes K\ E([\mathring{X}][\mathring{X}]')B\otimes H$$

$$= A'\otimes K\ V\otimes\Sigma\ B\otimes H' = A'VB\otimes K\Sigma H'$$

$$cov(HXB,AX'K) = B'\otimes H'\ E([\mathring{X}][\mathring{X}]')K\otimes A'$$

$$= B'\otimes HV\dot{\otimes}\Sigma K\otimes A' = B'VA\dot{\otimes}H\Sigma K.$$

2) $AYK\ddot{\otimes}BZH = A\otimes K'\ Y\ddot{\otimes}Z\ B'\otimes H$

$$E(\mathring{X}\otimes\mathring{X}) = V\ddot{\otimes}\Sigma \quad E(\mathring{X}'\otimes\mathring{X}') = \Sigma\ddot{\otimes}V$$

$$E(\mathring{X}'\ddot{\otimes}\mathring{X}') = V\otimes\Sigma\ E(\mathring{X}\ddot{\otimes}\mathring{X}) = \Sigma\otimes V$$

En general $cov(AYK,BZH) = A\times K'cov(Y,Z)B'\otimes H$.

3) $[A][B]' = A'\ddot{\otimes}B'$ i.e. $cov(X,Z) = E(X'\ddot{\otimes}Z') -$

$$E(X')\ddot{\otimes}E(Z')$$

$$cov(X,X) = E(\mathring{X}'\ddot{\otimes}\mathring{X}') = V\otimes\Sigma$$

$$cov(KXA,HXB) = A'\otimes K\ V\otimes\Sigma\ B\otimes H' = A'VB\otimes K\Sigma H'.$$

4) Si x, y, z, q son vectores:

$$[xy'][zq']' = yq'\otimes xz' = xy'\ddot{\otimes}zq'$$

Consideremos ahora las formas cuadráticas XAX' y XBX' que se escriben (con A y B simétricas):

$$[XAX'] = X\otimes X[A], \quad [XBX'] = X\otimes X[B]$$

por lo que:

$$cov(XAX', XBX') = E(X\otimes X[A][B]X'\otimes X') - tr(AV)\Sigma\ddot{\otimes}tr(BV)\Sigma.$$

Pero:

$$E(X\otimes X\ A\ddot{\otimes}B\ X'\otimes X'') = E(XAX'\ddot{\otimes}XBX')$$

$$= \sum_{\alpha\beta s t} a_{\alpha\beta} b_{st} E(X_\alpha X_\beta'\ddot{\otimes}X_s X_t')$$

$$= \sum_{\alpha\beta s t} a_{\alpha\beta} b_{st} cov(X_\alpha X_\beta', X_t X_s')$$

$$= \sum_{\alpha\beta s t} a_{\alpha\beta} b_{st} E(X_\beta X_s'\otimes X_\alpha X_t') \quad \text{i.e.}$$

$$cov(XAX', XBX) = \sum_{\alpha\beta s t} a_{\alpha\beta} b_{st} (v_{\beta s} v_{\alpha t}\Sigma\dot{\otimes}\Sigma + v_{t\beta} v_{\alpha s}\Sigma\dot{\otimes}\Sigma + v_{\alpha\beta} v_{st}\Sigma\ddot{\otimes}\Sigma) - tr(AV)tr(BV)\Sigma\ddot{\otimes}\Sigma =$$

$$= tr(AVBV)\Sigma\otimes\Sigma + tr(AVBV)\Sigma\dot{\otimes}\Sigma.$$

<u>Corolario</u>. En general si X es una matriz aleatoria:

$$cov(XAX',XBX') = E(XAX'\ddot{\otimes}XBX') - E(XAX')\ddot{\otimes}E(XBX').$$

5) Sea $X \sim N(\Gamma, V\otimes\Sigma)$ y sea $Y = X-\Gamma$, entonces:

$$cov(XAX',XBX') = E((XAX'-\Gamma A\Gamma'-\Sigma tr(AV))'\ddot{\otimes}$$

$$(XBX'-\Gamma B\Gamma'-\Sigma tr(AV))')$$

$$= E(YAY'\ddot{\otimes}YBY') - tr(BV)E(YAY')\ddot{\otimes}\Sigma + E(\Gamma AY'\ddot{\otimes}\Gamma BY')$$

$$+E(\Gamma AY'\ddot{\otimes}YB\Gamma') + E(YA\Gamma'\ddot{\otimes}YB\Gamma') + tr(AV)tr(BV)\Sigma\otimes\Sigma -$$

$$tr(AV)\Sigma\ddot{\otimes}E(YBY') + E(YA\Gamma'\ddot{\otimes}\Gamma BY') =$$

$$= tr(AVBV)(\Sigma\otimes\Sigma + \Sigma\dot{\otimes}\Sigma) + \Gamma AVB\Gamma'\otimes\Sigma + \Sigma\otimes\Gamma AVB\Gamma' +$$

$$\Gamma AVB\Gamma'\dot{\otimes}\Sigma + \Sigma\dot{\otimes}\Gamma AVB\Gamma'.$$

<u>Conclusión</u>. En este artículo se han obtenido resultados muy importantes en cuanto a la distribución de las formas cuadráticas en el caso más general en que Σ y V son singulares. Se establece la simetría entre las formas cuadráticas YAY' y $Y'HY$. También se da la definición de covarianza entre matrices aleatorias,

introduciendo el producto de Kronecker asimétrico.

* *

TABLA 1

$Y \sim N(\Gamma, V \otimes \Sigma)$ Σ-singular V-singular

$YAY' \sim W(\Sigma, tr(AV), \Gamma A \Gamma')$ Σ-singular sii $VAVAV = VAV$ $\quad \Gamma AV = \Gamma AVAV$ $\Gamma AVA\Gamma' = \Gamma A\Gamma'$	$Y'HY \sim W(V, tr(\Sigma H), \Gamma' H \Gamma)$ V-singular sii $\Sigma H \Sigma H \Sigma = \Sigma H \Sigma$ $\quad \Gamma' H \Sigma H \Sigma = \Gamma' H \Sigma$ $\Gamma' H \Sigma H \Gamma = \Gamma' H \Gamma$
YAY' y YBY' son independientes sii $VAVBV = 0$ $\quad \Gamma AVB\Gamma' = 0$ $\Gamma BVAV = \Gamma AVBV = 0$	$Y'HY$ y $Y'KY$ son independientes sii $\Sigma H \Sigma K \Sigma = 0$ $\quad \Gamma' H \Sigma H \Gamma = 0$ $\Gamma' H \Sigma K \Gamma = \Gamma' K \Sigma H \Sigma = 0$
YB y YAY' son independientes sii $B'VAV = 0$ $\quad B'VA\Gamma' = 0$	$Y'K$ y $Y'HY$ son independientes sii $K'\Sigma H \Sigma = 0$ $\quad K'\Sigma H \Gamma = 0$
$(YAY' + YB + C)^* \sim$ $W(\Sigma, tr(AV), (A\Gamma' + \frac{1}{2}B)'V(A\Gamma' + \frac{1}{2}B))$ Σ-singular sii $VAVAV = VAV$ $(A\Gamma' + \frac{1}{2}B)'V = (A\Gamma' + \frac{1}{2}B)'VAV$ $(\Gamma A\Gamma' + \Gamma B + C)^* = (A\Gamma' + \frac{1}{2}B)'V(A\Gamma' + \frac{1}{2}B)$	$(Y'HY + Y'K + L)^* \sim$ $W(V, tr(\Sigma H), (H\Gamma + \frac{1}{2}K)'\Sigma(H\Gamma + \frac{1}{2}K))$ V-singular sii $\Sigma H \Sigma H \Sigma = \Sigma H \Sigma$ $(H\Gamma + \frac{1}{2}K)'\Sigma = (H\Gamma + \frac{1}{2}K)'\Sigma H \Sigma$ $(\Gamma' H \Gamma + \Gamma' K + C)^* = (H\Gamma + \frac{1}{2}K)'\Sigma(H\Gamma + \frac{1}{2}K)'$

TABLA 2

$\mathrm{cov}(YB, YA)=B'VA\otimes\Sigma$	$\mathrm{cov}(Y'H, Y'K)=H'\Sigma K\otimes V$
$\mathrm{cov}(YA, YB)=A'VB\dot{\otimes}\Sigma$	$\mathrm{cov}(Y'K, Y'H)=K'\Sigma H\otimes V$
$\mathrm{Var}(Y)=V\otimes\Sigma$	$\mathrm{Var}(Y')=\Sigma\otimes V$
$E(YAY')=\Gamma A\Gamma'+\Sigma\mathrm{tr}(AV)$	$E(Y'HY)=\Gamma'H\Gamma+V\mathrm{tr}(H\Sigma)$
$\mathrm{cov}(YAY', YB)=\Gamma AVB\otimes\Sigma+\Sigma\dot{\otimes}\Gamma AVB$	$\mathrm{cov}(Y'HY, Y'K)=\Gamma'H\Sigma K\otimes V+V\dot{\otimes}\Gamma'H\Sigma K$
$\mathrm{cov}(YB, YAY')=B'VA\Gamma'\otimes\Sigma+B'VA\Gamma'\dot{\otimes}\Sigma$	$\mathrm{cov}(Y'K, Y'HY)=K'\Sigma H\Gamma\otimes V+K'\Sigma H\Gamma\dot{\otimes}V$
$\mathrm{cov}(YAY', YBY')=\mathrm{tr}(AVBV)(\Sigma\otimes\Sigma+\Sigma\dot{\otimes}\Sigma)\ +$	$\mathrm{cov}(Y'HY, Y'KY)=\mathrm{tr}(H\Sigma K\Sigma)(V\otimes V+V\dot{\otimes}V)+$
$\Sigma\otimes\Gamma AVB\Gamma'+\Sigma\dot{\otimes}\Gamma AVB\Gamma'+$	$V\otimes\Gamma'H\Sigma K\Gamma+\Gamma'H\Sigma K\Gamma\otimes V+$
$\Gamma AVB\Gamma'\otimes\Sigma+\Gamma AVB\Gamma'\dot{\otimes}\Sigma$	$V\dot{\otimes}\Gamma'H\Sigma K\Gamma+\Gamma'H\Sigma K\Gamma\dot{\otimes}V$
$\mathrm{cov}(YB, AY')=B'VA'\dot{\otimes}\Sigma$	$\mathrm{cov}(KY, Y'H)=V\dot{\otimes}K\Sigma H$
$\mathrm{cov}(AY', YB)=\Sigma\dot{\otimes}AVB$	$\mathrm{cov}(KY, Y'H)=V\dot{\otimes}K\Sigma H$
$\mathrm{cov}(Y', Y) = \Sigma\dot{\otimes}V$	$\mathrm{cov}(Y, Y') = V\dot{\otimes}\Sigma$
$\mathrm{cov}(AY'K, HYB)=K'\Sigma H'\dot{\otimes}AVB$	$\mathrm{cov}(HYB, AY'K)=B'VA'\dot{\otimes}H\Sigma K$
$\mathrm{cov}(KYA, HYB)=A'VB\otimes K\Sigma H'$	$\mathrm{cov}(AY'K, BY'H)=H'\Sigma K'\otimes A'VB$

BIBLIOGRAFIA

Anderson, T.W., (1958) *An intoduction to multivariate statistical analysis.* J. Wiley N.Y.

Poltronieri J. "Sobre la distribución de las formas cuadráticas" (por aparecer).

Poltronieri J. "Algunas propiedades matriciales útiles en estadística" (por aparecer)

Searle, S.R., (1971) *Linear models.* J. Wiley N.Y.