Revista Colombiana de Estadística
N^os 23-24, 1991

PROCESOS ESTOCASTICOS CON DOS PARAMETROS I

Myriam Muñoz de Özak
Profesora Asociada
Universidad Nacional

Sergio Fajardo
Profesor Univ. de los Andes
Prof.Asistente Univ. Nacional

Resumen: En estas notas queremos presentar una introducción a la teoría de procesos estocásticos con dos parámetros desde el punto de vista de la teoría general de procesos, sin concentrarnos en propiedades específicas de procesos particulares. Trabajamos con conceptos tanto del análisis estocástico estándar, como del no estántar y damos una idea de cómo utilizar las técnicas hiperfinitas en desarrollos más avanzados.

Introducción.

El estudio de los procesos estocásticos ha sido motivado por la necesidad de modelar la evolución en el tiempo de fenómenos aleatorios. Usualmente se hanutilizado como conjuntos adecuados para representar el tiempo a $\mathbb{R}^+$, $[0,1]$, $\mathbb{N}$ o algunos de sus subconjuntos. El orden natural que tienen estos conjuntos, implica que desde el punto de vista del tiempo, se asume que éste evoluciona en forma lineal. Sin embargo hay varias áreas de investigación; por ejemplo, la explotación petrolera, las telecomunicaciones y la estadística (Korezglioglu, Mazziotto, Szpirglas (1981) y las referencias que allí aparecen) en las cuales esta concepción lineal del tiempo no es la adecuada para modelar y resolver los problemas que se presentan. Este hecho ha obligado a buscar formas diferentes de plantear el papel del tiempo. La forma más natural y apropiada que se ha estudiado es la que permite conjuntos de tiempo del tipo $[0,1]\times[0,1]$. Acá el tiempo no es un orden total sino un orden parcial; esto implica cambios fundamentales en la teoría de los procesos estocásticos. El propósito de este trabajo es el de presentar la parte introductoria del trabajo que hemos venido desarrollando en el seminario "Procesos Estocásticos" que se ha estado reuniendo en el departamento de Matemáticas y Estadística de la Universidad Nacional desde Febrero de 1990. Debemos señalar que el material aquí presentado contiene apenas unos puntos básicos que no pretenden dar una visión completa de este tema.

En la primera sección identificamos las estructuras en las cuales están definidos los procesos que vamos a estudiar, señalando las propiedades que diferencian a estas estructuras de las estructuras adaptadas en un parámetro.

En la segunda introducimos diferentes tipos de martingalas y las relaciones existentes entre ellas, así como algunas de sus caracterizaciones. Al final presentamos el ejemplo básico de proceso estocástico: el movimiento Browniano; allí definimos tanto las σ-álgebras como el proceso en sí, haciendo todas las demostraciones pertinentes.

En la tercera presentamos una familia especial de espacios adaptados con dos parámetros, la cual es una extensión natural al contexto en dos parámetros de una familia de espacios construidos por métodos no estándar; presentamos también una construcción intuitiva del movimiento Browniano en dos parámetros utilizando técnicas no estándar que extienden las originales de Anderson en un parámetro.

Reconocimientos.

Este trabajo fue financiado parcialmente por Colciencias y la Universidad Nacional de Colombia dentro del proyecto de investigación "Procesos Estocásticos con dos Parámetros".

1. Conceptos básicos.

En esta sección vamos a introducir los conceptos fundamentales de la teoría de procesos estocásticos con dos parámetros. Como la teoría que presentamos es una extensión de la conocida en un parámetro, necesariamente tenemos que asumir que el lector tiene un conocimiento básico de ésta; En Albeverio (1986), encontramos una excelente introducción a la probabilidad y a los procesos estocásticos, y la colección (Dellacherie-Meyer (1975)) es una referencia indispensable para todos los interesados en los fundamentos de la teoría general de procesos estocásticos en un parámetro.

En lo que sigue, vamos a trabajar sobre espacios de probabilidad completos $(\Omega,\mathcal{F},P)$, con $\mathcal{F}$ una σ-álgebra sobre Ω y P una probabilidad sobre $\mathcal{F}$. El primer concepto que presentamos es el de espacio adaptado, que es precisamente la clase de estructura sobre la cual se desarrolla la teoría que vamos a estudiar.

DEFINICION 1. Un *espacio adaptado con dos parámetros* es una estructura de la forma $\underline{\Omega} = (\Omega, \mathcal{F}_{(s,t)})_{(s,t)\in[0,1]^2}, P)$ en donde $(\mathcal{F}_{(s,t)})_{(s,t)\in[0,1]^2}$ es una familia de sub-σ-álgebras de $\mathcal{F}$, llamada *filtración en dos parámetros*, que satisface las siguientes condiciones:

F1 - Dadas (s,t) y (s',t') en $[0,1]^2$ tales que $s \leqslant s'$ y $t \leqslant t'$, -denotamos esta relación por $(s,t) \leqslant (s',t')$- entonces $\mathcal{F}_{(s,t)} \subseteq \mathcal{F}_{(s',t')}$.

F2 - $\mathcal{F}_{(0,0)}$ es P-completa.

F3 - Para cada (s,t), $\mathcal{F}_{(s,t)} = \bigcap_{(s',t')\in((s,t),(1,1)]} \mathcal{F}_{(s',t')}$, en donde el intervalo $((s,t),(1,1)]$ denota el conjunto $\{(s',t') : (s,t) \leqslant (s',t') \text{ y } (s',t') \leqslant (1,1)\}$.

Nuestro interés central es estudiar procesos que viven en los espacios que acabamos de introducir; teniendo en cuenta el nuevo conjunto de índices de tiempo, modificamos la definición de proceso estocástico en la forma obvia.

DEFINICION 2. Un *proceso estocástico con dos parámetros* sobre $\underline{\Omega}$ es una función $X: \Omega\times[0,1]^2 \to \mathbb{R}$, medible con respecto a $\mathcal{F}_{(1,1)}\times\ell$, en donde ℓ es la medida de Lebesgue en $[0,1]^2$. Otra forma de mirar un proceso es como una familia de variables aleatorias sobre Ω, con conjunto de índices $[0,1]^2$ y lo denotamos $X = (X_{(s,t)})_{(s,t)\in[0,1]^2}$.

Como señalamos en la introducción, la principal diferencia que aparece en el desarrollo de la teoría de procesos con dos parámetros es la no-linealidad del tiempo. Este hecho hace que el concepto de la información que está contenida en las filtraciones cambie radicalmente, y por lo tanto ha sido necesario imponer ciertas condiciones que permitan desarrollar una teoría adecuada de martingalas en este contexto (ver la discusión en Walsh 1986). La siguiente condición fue introducida por Cairoli y Walsh y se ha convertido, prácticamente, en un axioma de la teoría.

DEFINICION 3. Una 2-filtración $(\mathcal{F}_{(s,t)})_{(s,t)\in[0,1]^2}$, satisface la *condición (F4)* o condición de Cairoli y Walsch si cumple:

Dadas (s,t) y (s',t') con $s \leqslant s'$ y $t \geqslant t'$, entonces $\mathcal{F}_{(s,t)}$ y $\mathcal{F}_{(s',t')}$ son condicionalmente independientes dada $\mathcal{F}_{(s,t')}$.

NOTACION. Dadas parejas (s,t) y (s',t') con $s \leqslant s'$ y $t \geqslant t'$, denotamos esta relación por $(s,t)\Delta(s',t')$. La pareja (s,t') se denota por $(s,t)\wedge(s',t')$.

La definición anterior utiliza el concepto de independencia condicional entre σ-álgebras que es sencillo, pero no muy conocido en la literatura de la probabilidad. Como este concepto es crucial para todo nuestro trabajo, lo presentamos aquí y estudiamos en detalle algunas de sus propiedades. El libro de Loeb (1979) es una buena referencia.

DEFINICION 4. Dadas σ-álgebras $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ y $\mathcal{H}$ en un espacio de probabilidad común, decimos que $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ son condicionalmente independientes dada $\mathcal{H}$, si

Para todos $A \in \mathcal{F}$ y $B \in \mathcal{G}$ se cumple que $P(AB|\mathcal{H}) = P(A|\mathcal{H})P(B|\mathcal{H})$.

La siguiente proposición reune las propiedades más elementales acerca de este concepto, su demostración es sencilla y la dejamos al lector interesado.

PROPOSICION 5. (a) Si $\mathcal{H}$ es la σ-álgebra trivial $\{\emptyset,\Omega\}$, entonces: $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ son condicionalmente independientes dada $\mathcal{H}$ si y solamente si $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ son independientes.

(b) Si $\mathcal{H}$ es la σ-álgebra $\mathcal{P}(\Omega)$ entonces cualquier par de σ-álgebras son condicionalmente independientes dada $\mathcal{H}$.

(c) $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ son condicionalmente independientes dada $\mathcal{H}$ si y solamente si $E(XY|\mathcal{H}) = E(X|\mathcal{H})E(Y|\mathcal{H})$ en donde X y Y son variables aleatorias positivas medibles con respecto a $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$.

(d) $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ son condicionalmente independientes dada $\mathcal{H}$ si y solamente si $E(X|\mathcal{G} \vee \mathcal{H}) = E(X|\mathcal{H})$ en donde X es una variable aleatoria acotada y medible con respecto a $\mathcal{F}$. En donde $\mathcal{G} \vee \mathcal{H}$ es la menor σ-álgebra que contiene a $\mathcal{G}$ y a $\mathcal{H}$.

Como consecuencia inmediata de esta proposición podemos presentar un par de formas equivalentes de la condición F4 que son utilizadas regularmente.

PROPOSICION 6. Las siguientes propiedades son equivalentes:

(a) La condición F4.

(b) Si $(s,t)\Delta(s',t')$ y X una variable aleatoria acotada,

$$E(E(X|\mathcal{F}_{(s,t)})|\mathcal{F}_{(s',t')}) = E(E(X|\mathcal{F}_{(s',t')})|\mathcal{F}_{(s,t)})$$
$$= E(X|\mathcal{F}_{(s,t')})$$

(c) Si $(s,t)\Delta(s',t')$ y X una variable $\mathcal{F}_{(s',t')}$-medible , $E(X|\mathcal{F}_{(s,t)}) = E(X|\mathcal{F}_{(s,t')})$.

Ya hemos introducido un buen número de conceptos nuevos y por lo tanto este es un sitio adecuado para mostrar que realmente existen objetos con las propiedades propuestas. A continuación presentamos los dos ejemplos de filtraciones con dos parámetros más comunes en la literatura. Más adelante veremos otro igualmente importante para este trabajo.

PROPOSICION 7. (a) Sean $(\Omega,(\mathcal{F}_t),P)$ y $(\Gamma,(\mathcal{G}_t),Q)$ dos espacios adaptados que satisfacen las condiciones usuales en un parámetro (i.e. las condiciones F1-F3 con el orden sobre $[0,1]$ en lugar de $[0,1]^2$, (Tomo I de Dellacherie-Meyer (1975)) entonces el espacio adaptado en dos parámetros definido por $(\Omega\times\Gamma,(\mathcal{F}_s\times G_t)_{(s,t)},P\times Q)$ satisface la condición F4. Denotamos por $\mathcal{F}_{(s,t)}$ el producto $\mathcal{F}_s\times G_t$.

(b) Sean $(\mathcal{F}_t)$ y (G_t) dos filtraciones sobre Ω que son independientes y satisfacen las condiciones usuales en un parámetro. Entonces el espacio adaptado en dos parámetros definido por $(\Omega,(\mathcal{F}_s\vee G_t)_{(s,t)},P)$ es adaptado.

Demostración: (a) Nos preocupamos solamente de verificar la condición F4, las otras son de rutina. Utilizamos la caracterización de F4 dada por la condición (c) de la Proposición 6. Denotemos por $z = (s,t)$ y $w = (s',t')$ y supongamos que $z\Delta w$, y sea $v = z\wedge w$. Queremos verificar que dada una variable X $\mathcal{F}_w$-medible, tenemos: $E(X|\mathcal{F}_v) = E(X|\mathcal{F}_z)$.

La demostración se hace con un argumento de clase monótona. El primer paso es el más importante: verificamos la pro piedad para funciones características, por lo tanto podemos suponer que X es de la forma $\chi_{A\times B}$ con $A \in \mathcal{F}_s$ y $B \in \mathcal{G}_t$ y verificamos que

$$E(\chi_{A\times B}|\mathcal{F}_v) = E(\chi_{A\times B}|\mathcal{F}_w)\cdot(*).$$

Observemos que por la definición de esperanza condicional y dado que $\mathcal{F}_v \subseteq \mathcal{F}_w$, las dos variables en (*) son $\mathcal{F}_w$-medibles; por lo tanto, para demostrar su igualdad debemos probar que para todo conjunto de la forma $C\times D$, con $C \in \mathcal{F}_s$, y $D \in \mathcal{F}_t$, se tiene:

$$\int_{C\times D} E(\chi_{A\times B}|\mathcal{F}_v) = \int_{C\times D} E(\chi_{A\times B}|\mathcal{F}_w)\ .$$

La expresión del lado derecho es fácil de calcular: observando que $C\times D \in \mathcal{F}_w$ se obtiene que es igual a $P(AC)Q(BD)$.

Trabajamos ahora el lado izquierdo, utilizando el teorema de Fubini tenemos:

$$\int_{C\times D} E(\chi_{A\times B}|\mathcal{F}_v) = \int_{C\times D} E(\chi_{A\times B}|\mathcal{F}_s\times\mathcal{G}_{t'}) = \int_{AC\times D} E(\chi_{\Omega\times B}|\mathcal{F}_s\times\mathcal{G}_{t'})\,dP\times Q$$

$$= \int_D\int_{AC} E(\chi_{\Omega\times B}|\mathcal{F}_s\times\mathcal{G}_{t'})dPdQ = P(AC)\int_D E(\chi_B|\mathcal{G}_{t'})\,dQ = P(AC)Q(BD).$$

(b) La demostración es un sencillo ejercicio. ▲

Para finalizar esta sección presentamos otra propiedad de las filtraciones que en ocasiones es utilizada en la teoría de procesos con dos parámetros (Korezlioglu y otros (1981), Dalang (1989) y Doob (1967)), y que más adelante miraremos con un poco más de cuidado.

DEFINICION 8. (a) Dos σ-álgebras $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ son CQI (del inglés Conditionally qualitatively independet) de $\mathcal{H}$, si para todos $A \in \mathcal{F}$ y $B \in \mathcal{G}$, se tiene que:

$$\{P(A|\mathcal{H}) > 0\} \cap \{P(B|\mathcal{H}) > 0\} = \{P(AB|\mathcal{H}) > 0\} .$$

(b) Una filtración con dos parámetros $(\mathcal{F}_{(s,t)})$ tiene la propiedad CQI, si para todos z y w, con $z \Delta w$ y $v = z \wedge w$, vale que $\mathcal{F}_z$ y $\mathcal{F}_w$ son CQI de $\mathcal{F}_v$.

Por el momento nos vamos a contentar con dar una forma bastante interesante de este concepto debida a Dalang (1986) y y que puede valer la pena estudiarla en sí misma.

DEFINICION 9. (a) Sea $(Z_i)_{i\in I}$ una familia de variables aleatorias definidas sobre un espacio de probabilidad $(\Omega,\mathcal{F},P)$. La (c.s. única) variable $\hat{Z}$ de Ω en $\mathbb{R}$ que cumple:

(i) $\hat{Z} \leq Z_i$ c.s. para todo $i \in I$, y

(ii) Si X satisface también (i) entonces se tiene $X < \hat{Z}$ c.s.

Se denomina el *ínfimo esencial de la familia* y se escribe $\hat{Z} = \text{essinf } Z_i$.

(b) Sea Y una variable aleatoria sobre Ω y $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$. El *supremo condicional de Y dada $\mathcal{G}$*, denotado por $S(Y|\mathcal{G})$ es el $\text{essinf}\{Z : Z$ es $\mathcal{G}$-medible y $Z \geqslant Y\}$.

Dalang (1986) ha demostrado que este nuevo operador se comporta formalmente como la esperanza condicional y con él ha caracterizado la propiedad CQI, de la siguiente forma:

TEOREMA 10. (Dalang 1989). Una filtración $(\mathcal{F}_{(s,t)})$ satisface

CQI si y solamente si para todos z y w con $z \Delta w$ y $v = z \wedge w$ se tiene que para toda variable X positiva

$$S(S(X|\mathcal{F}_z)|\mathcal{F}_w) = S(S(X|\mathcal{F}_w)|\mathcal{F}_z).$$

2. Martingalas.

Como sabemos, la familia más importante de procesos en el análisis estocástico son las **martingalas**. Debido a la no linealidad del tiempo, de manera natural podemos obtener diferentes tipos de martingalas en dos parámetros. En este capítulo introducimos las más conocidas y presentamos algunos de los resultados más importantes. Sorprendentemente, sólo hasta muy recientemente se han probado resultados que explican las relaciones que existen entre las diferentes nociones de martingala que presentamos en este capítulo. El artículo de Merzbach y Nualart (1985) trae la exposición más completa y actualizada de este tema.

A un espacio adaptado con dos parámetros

$$\underline{\Omega} = (\Omega, (\mathcal{F}_{(s,t)})_{(s,t)\in[0,1]^2}, P)$$

le asociamos las siguientes filtraciones:

Si $(s,t) \in [0,1]^2$

1) $\mathcal{F}^1_{(s,t)} := \bigvee_{0\leq u\leq 1} \mathcal{F}_{(s,u)} = \mathcal{F}_{(s,1)}$

2) $\mathcal{F}^2_{(s,t)} := \bigvee_{0\leq v\leq 1} \mathcal{F}_{(v,t)} = \mathcal{F}_{(1,t)}$

3) $\mathcal{F}^*_{(s,t)} := \mathcal{F}^1_{(s,t)} \vee \mathcal{F}^2_{(s,t)}$.

Es claro que si el espacio adaptado satisface la condición F4, $\mathcal{F}^1_{(s,t)}$ y $\mathcal{F}^2_{(s,t)}$ son condicionalmente independientes dado $\mathcal{F}_{(s,t)}$ para cada $(s,t) \in [0,1]^2$ y además si X es una variable aleatoria,

$$E(E(X|\mathcal{F}^1_{(s,t)})\,|\mathcal{F}^2_{(s,t)}) = E(E(X|\mathcal{F}^2_{(s,t)})\,|\mathcal{F}^1_{(s,t)})$$
$$= E(X|\mathcal{F}_{(s,t)}).$$

Es fácil verificar, que si se cumplen estas últimas identidades, entonces el espacio adaptado satisface F4.

DEFINICION 1: Un proceso estocástico

$$X = (X_{(s,t)})_{(s,t)\in[0,1]^2}$$

sobre $\underline{\Omega}$ es $\mathcal{F}_{(s,t)}$-adaptado si para todo $(s,t) \in [0,1]^2$, $X_{(s,t)}$ es $\mathcal{F}_{(s,t)}$-medible. Esta noción se puede extender también a las filtraciones $\mathcal{F}^1_{(s,t)}$ y $\mathcal{F}^2_{(s,t)}$ definidas anteriormente.

DEFINICION 2. Dados $\underline{\Omega}$ un espacio adaptado con dos parámetros y $M = (M_{(s,t)})_{(s,t)\in[0,1]^2}$ un proceso estocástico sobre $\underline{\Omega}$, cuadrado integrable, es decir $E(M^2_{(s,t)}) < \infty$ para todo $(s,t) \in [0,1]^2$. Definimos:

1) M es una martingala, si M es $\mathcal{F}_{(s,t)}$-adaptada y para todo $(s,t) < (s',t')$ se tiene que

$$E(M_{(s',t')}\,|\mathcal{F}_{(s,t)}) = M_{(s,t)} \quad \text{c.s.}$$

Esta noción es la extensión natural de la definición ya conocida de martingada en un parámetro (Billingsley, 1979).

2) M es una martingala débil si M es $\mathcal{F}_{(s,t)}$ adaptada y para todo rectángulo $R = ((s,t),(s',t')]$ con $s < s'$, $t < t'$.

$$E(M(R) \mid \mathcal{F}_{(s,t)}) = 0$$

en donde $M(R)$ es el incremento de M en R y está definido como $M(R) = M_{(s',t')} - M_{(s',t)} - M_{(s,t')} + M_{(s,t)}$, con esta noción podemos ver claramente la diferencia entre las teorías en uno y dos parámetro. En un parámetro esta noción sería igual a la de martingala pues los incrementos del tiempo son lineales.

3) M es una i-martingala ($i = 1,2$), si M es $\mathcal{F}^1_{(s,t)}$ adaptada y $E(M(R) \mid \mathcal{F}_{(s,t)}) = 0$ para cada rectángulo

$$R = ((s,t),(s',t')],\ s < s',\ t < t'.$$

4) M es una martingala fuerte si es $\mathcal{F}_{(s,t)}$ adaptada, se anula en los ejes y para todo rectángulo $R = ((s,t),(s',t')]$

$$E(M(R) \mid \mathcal{F}^*_{(s,t)}) = 0 \ .$$

Estos conceptos fueron introducidos inicialmente por Cairoli, y Walsh (1975), Zakai introdujo además el siguiente concepto:

5) Una i-martingala tiene incrementos ortogonales en el sentido i, ($i = 1,2$), si para cualquier par de rectángulos $R_1 = ((s_1,t_1),\ (s_2,t_2)]$ y $R_2 = ((s'_1,t'_1),\ (s'_2,t'_2)]$, $s_1 < s_2$, $t_1 < t_2$, $s'_1 < s'_2$, $t'_1 < t'_2$ se tiene

$$E(M(R_1) \cdot M(R_2) \mid \mathcal{F}_{(s,t) \wedge (s'_1,t'_1)}) = 0$$

6) Una martingala tiene incrementos ortogonales si tiene in-

crementos ortogonales en el sentido i, ($i = 1,2$).

A continuación damos algunas relaciones que se han establecido entre las diferentes clases de martingalas.

PROPOSICION 3. Si $\underline{\Omega} = (\Omega, (\mathcal{F}_{(s,t)})_{(s,t)\in[0,1]^2}, P)$ satisface las condiciones (F1)-(F4) y $M = (M_{(s,t)})_{(s,t)\in[0,1]^2})$ es una martingala en $\underline{\Omega}$, entonces M es una i-martingala, para $i = 1,2,$.

Demostración. Supongamos que M es una martingala sobre $\underline{\Omega}$ y sea $R = ((s,t),(s',t')]$ cons $s < s'$, $t < t'$

$$M(R) = M_{(s',s')} - M_{(s',t)} - (M_{(s,t')} - M_{(s,t)})$$

Veamos que $E(M(R)|\mathcal{F}^i_{(s,t)}) = 0$, hagámoslo para $i = 2$,

$$E(M(R)|\mathcal{F}^2_{(s,t)}) = E((M_{(s',t')} - M_{(s',t)})|\mathcal{F}^2_{(s,t)})$$

$$- E((M_{(s,t')} - M_{(s,t)})|\mathcal{F}^2_{(s,t)}).$$

Como $\mathcal{F}^2_{(s,t)} = \mathcal{F}^2_{(s',t)}$ y $M_{(s,t')} - M_{(s,t)}$ es $\mathcal{F}_{(s,t)}$-medible utilizando la proposición 6c) Cap.I obtenemos

$$E((M_{(s,t')} - M_{(s,t)}|\mathcal{F}^2_{(s,t)}) = E((M_{(s,t')} - M_{(s,t)}|\mathcal{F}^2_{(s',t)})$$

$$= E((M_{(s,t')} - M_{(s,t)}|\mathcal{F}_{(s,t)}) = 0$$

Esto último por ser M martingala.

Análogamente, $M_{(s',t')} - M_{(s',t)}$ es $\mathcal{F}_{(s',t')}$-medible, entonces

$$E((M_{(s',t')} - M_{(s',t)}|\mathcal{F}^2_{(s,t)}) = E((M_{(s',t')} - M_{(s',t)}|\mathcal{F}^2_{(s',t)})$$

$$= E((M_{(s',t')} - M_{(s',t)}|\mathcal{F}_{(s',t)}) = 0$$

Por lo tanto $E(M(R)|\mathcal{F}^2_{(s,t)}) = 0$.
Por simetría se obtiene $E(M(R)|F^1_{(s,t)}) = 0$.

NOTA. Sea $(M_{(s,o)})_{s\in[0,1]}$ es una $\mathcal{F}^1_{(s,o)}$ martingala y $(M_{(o,t)})_{t\in[0,1]}$ es una $\mathcal{F}^2_{(o,t)}$ martingala o si M es cero en los ejes como en la definición de martingala dada por Merzbach y Nualart (1985), el recíproco de la proposición también se tiene: en efecto, si M es 1 y 2 martingala, es $\mathcal{F}_{(s,t)}$-adaptado ya que $\mathcal{F}^1_{(s,t)} \cap \mathcal{F}^2_{(s,t)} = \mathcal{F}_{(s,t)}$.

PROPOSICION 4. Sea $\underline{\Omega}$ como en la proposición 3. Si M es una i-martingala para $i = 1,2$, entonces M es una Martingala sobre $\underline{\Omega}$.

Si $(s,t) < (s',t')$, sea $A = ((s,o),(s',t)]$, $\mathcal{F}^1_{(s,t)} = F^1_{(s,o)}$

$$E(M(A)|\mathcal{F}_{(s,t)}) = E(E(((M_{(s',t)} - M_{(s,t)}) - (M_{(s',o)} - M_{(s,o)}))|\mathcal{F}^1_{(s,o)})|\mathcal{F}_{(s,t)}) = 0$$

y

$$E((M_{(s',o)} - M_{(s,o)}|\mathcal{F}_{(s,t)}) = E(E((M_{(s',o)} - M_{(s,o)}|\mathcal{F}^1_{(s,o)})|\mathcal{F}_{(s,t)}) = 0 ,$$

entonces $E((M_{(s',t)} - M_{(s,t)})|\mathcal{F}^1_{(s,t)}) = 0$.

Simultáneamente si $B = ((o,t),(s,t')]$, $E((M_{(s,t')}-M_{(s,t)})|\mathcal{F}_{(s,t)}) = 0$ y así

$$E((M_{(s',t')}-M_{(s,t)})|\mathcal{F}_{(s,t)}) = E((M_{(s',t')}-M_{(s,t)})|\mathcal{F}_{(s,t)})$$

$$- E((M_{(s',t)}-M_{(s,t)})|\mathcal{F}_{(s,t)})-E((M_{(s,t')}-M_{(s,t)})|\mathcal{F}_{(s,t)})$$

$$= E((M_{(s',t')} - M_{(s,t')} - M_{(s',t)} - M_{(s,t)})|\mathcal{F}_{(s,t)})$$

$$= E(E(M(R)|\mathcal{F}^1_{(s,t)})|\mathcal{F}_{(s,t)}) = 0 ,$$

y así M es una martingala.

NOTA: Es fácil ver que toda martingala fuerte es una i-martingala y por la proposición anterior es entonces una martingala.

También es inmediato que toda martingala es una martingala débil.

El siguiente teorema nos da una caracterización para las i-martingalas con incrementos ortogonales en el sentido i, está enunciado más no demostrado en Merzbach y Nualart (1985). A continuación hacemos la demostración.

TEOREMA 5. Sea $M = (M_{(s,t)})_{(s,t)\in[0,1]^2}$ una 1-martingala cuadrado-integrable, que se anula en los ejes, las siguientes condiciones son equivalentes:

a) M es una 1-martingala con incrementos ortogonales en el sentido 1.

b) Para todo $t_1 < t_2$ las martingalas de un parámetro $M(\cdot,t_1)$ y

$M_{(\cdot,t_1)} - M_{(\cdot,t_2)}$ son ortogonales, es decir su producto es una martingala.

c) Para todo $t_1 < t_2$, $<M_{(\cdot,t_2)} - M_{(\cdot,t_1)}, M_{(\cdot,t_1)}> = 0$.

La notación $<X,Y>$ significa que $(<X_{(s,t)},Y_{(s,t)}>)_{(s,t)\in[0,1]^2}$ es un proceso B que es la diferencia de dos procesos crecientes y B es tal que $XY-B$ es una martingala débil (martingala en caso de un parámetro).

d) Para cualquier rectángulo $R = ((s,t),(s',t')]$, con $s < s'$ $t < t'$

$$E(M^2(R)|\mathcal{F}^1_{(s,t)}) = E(M(R)^2|\mathcal{F}^1_{(s,t)}) .$$

$$M^2(R) = M^2_{(s',t')} - M^2_{(s,t')} - M^2_{(s',t)} + M^2_{(s,t)} .$$

$$M(R)^2 = (M_{(s',t')} - M_{(s,t')} - M_{(s',t)} + M_{(s,t)})^2 .$$

Se tiene una proposición análoga para $i = 2$.

Demostración: a) $\Longrightarrow$ b) Sea $s_1 < s_2$, debemos demostrar que

$$E((M_{(s_2,t_2)} - M_{(s_2,t_1)})M_{(s_2,t_1)} - (M_{(s_1,t_2)} - M_{(s_1,t_1)})M_{(s_1,t_1)} \,|\mathcal{F}^1_{(s_1,t)}) = 0.$$

Sean $R_1 = ((s_1,0), (s_2,t_2)]$ y $R_2 = ((s_1,t_1), (s_2,t_2)]$.

Por hipótesis $E(M(R_1)M(R_2)|\mathcal{F}^1_{(s_1,t)}) = 0$

$$E((M_{(s_2,t_2)} - M_{(s_2,t_1)})|\mathcal{F}^1_{(s_1,t)}) = 0$$

y

$$E((M_{(s_2,t_2)} - M_{(s_1,t_2)})|\mathcal{F}^1_{(s_1,t)}) = 0$$

$$E((M_{(s_2,t_1)} - M_{(s_1,t_1)})|\mathcal{F}^1_{(s_1,t)}) = 0$$

y

$$E((M_{(s_1,t_2)} - M_{(s_1,t_1)}|\mathcal{F}^1_{(s_1,t)}) = 0$$

$$0 = E(M(R_1)M(R_2)|\mathcal{F}^1_{(s_1,t)}) = E((M_{(s_2,t_1)}$$

$$- M_{(s_1,t_1)})(M_{(s_2,t_2)} - M_{(s_1,t_2)} - M_{(s_2,t_1)}$$

$$+ M_{(s_1,t_1)})|\mathcal{F}^1_{(s_1,t)})$$

$$= E(M_{(s_2,t_1)}(M_{(s_2,t_2)} - M_{(s_2,t_1)})|\mathcal{F}^1_{(s_1,t\ )}$$

$$+ E(M_{(s_1,t_1)}(M_{(s_1,t_2)} - M_{(s_1,t_1)})|\mathcal{F}^1_{(s_1,t)}$$

$$- E(M_{(s_2,t_1)}(M_{(s_1,t_2)} - M_{(s_1,t_1)})|\mathcal{F}^1_{(s_1,t)})$$

$$- E(M_{(s_1,t_1)}(M_{(s_1,t_2)} - M_{(s_1,t_1)})|\mathcal{F}^1_{(s_1,t)})$$

$$= E(M_{(s_2,t_1)}(M_{(s_2,t_2)} - M_{(s_2,t_1)})|\mathcal{F}^1_{(s_1,t)})$$

$$+ M_{(s_1,t_1)}(M_{(s_1,t_2)} - M_{(s_1,t_1)})$$

$$- (M_{(s_1,t_2)} - M_{(s_1,t_1)})E(M_{(s_2,t_1)})|\mathcal{F}^1_{(s_1,t)})$$

$$- M_{(s_1,t_1)}E(M_{(s_2,t_2)} - M_{(s_2,t_1)}|\mathcal{F}_{(s_1,t)})$$

$$= E(M_{(s_2,t_1)}(M_{(s_1,t_2)} - M_{(s_2,t_1)})|\mathcal{F}^1_{(s_1,t)})$$

$$+ M_{(s_1,t_1)}(M_{(s_1,t_2)} - M_{(s_1,t_1)})$$

$$- (M_{(s_1,t_2)} - M_{(s_1,t_1)})M_{(s_1,t_1)} -$$

$$- M_{(s_1,t_1)}(M_{(s_1,t_2)} - M_{(s_1,t_1)}) = 0,$$

es decir $M_{(s\ ,t_1)}(M_{(s\ ,\ t_2)}-M_{(s\ ,\ t_1)})$ es una martingala respecto de $\mathcal{F}^1_{(s,t)}= \mathcal{F}^1_{(s_1,1)}$.

b) $\Longrightarrow$ c) es inmediato por la unicidad en la definición del operador $<\cdot,\cdot>$.

c) $\Longrightarrow$ b) Es igualmente obvio.

b) $\Longrightarrow$ d) Sea $R = ((s_1,t_1),(s_2,t_2)]$, dividimos el rectángulo $((0,0),(s_2,t_2)]$ en cuatro rectángulos disyuntos:

$$A = ((0,0),(s,t)],\ R,\ B \text{ y } C\ .$$

Se puede observar que

$$M^2(R) = M(R)(M(R)+2M(A)M(R)+2M(R)M(B)+2M(C)M(R)+2M(C)M(B).$$

Como M es cero en los ejes

$$E(M^2(R)|\mathcal{F}^1_{(s_1,t_1)}) = E(M(R)^2|\mathcal{F}^1_{(s_1,t_1)})$$

$$+ 2M_{(s_1,t_1)}E(M(R)|\mathcal{F}^1_{(s_1,t_1)})$$

$$+ 2(M_{(s_1,t_2)}-M_{(s_1,t_1)})E(M(R)|\mathcal{F}^1_{(s_1,t_1)})$$

$$+ 2E((M_{(s_2,t_1)}-M_{(s_1,t_1)})M(R)|\mathcal{F}^1_{(s_1,t_1)})$$

$$+ 2E(M_{(s_1,t_2)}-M_{(s_1,t_1)})(M_{(s_2,t_1)}-M_{(s_1,t_1)})|\mathcal{F}^1_{(s_1,t_1)})$$

$$= E(M(R)^2|\mathcal{F}^1_{(s_1,t_1)})$$

$$+ 2E(M_{(s_2,t_1)}(M_{(s_2,t_2)}-M_{(s_2,t_1)}|\mathcal{F}^1_{(s_1,t_1)})$$

$$- 2E(M_{(s_1,t_2)}-M_{(s_1,t_1)})M_{(s_2,t_1)}|\mathcal{F}^1_{(s_1,t_1)})$$

$$- 2M_{(s_1,t_1)}E(M(R)|\mathcal{F}^1_{(s_1,t_1)})$$

$$+ 2E((M_{(s_1,t_2)}-M_{(s_1,t_1)})M_{(s_2,t_1)}|\mathcal{F}^1_{(s_1,t_1)})$$

$$- 2(M_{(s_1,t_2)}-M_{(s_1,t_1)})M_{(s_1,t_1)} = E(M(R)^2|\mathcal{F}^1_{(s_1,t_1)}).$$

$$2E(M_{(s_2,t_1)}(M_{(s_2,t_2)}-M_{(s_2,t_1)})|\mathcal{F}^1_{(s_1,t_1)})$$

y

$$2(M_{(s_1,t_2)}-M_{(s_1,t_1)})M_{(s_1,t_1)}$$

se cancelan por hipótesis de b).

d) $\Longrightarrow$ a) Sean R_1 y R_2 rectángulos vecinos disyuntos definidos así: $R_1 = ((s_1,t_1),(s_2,t_2)]$, $R_2 = ((s_1,t_2),(s_2,t_3)]$

$$(M(R_1 \cup R_2))^2 = (M(R_1)+M(R_2))^2$$

$$= M(R_1)^2 + M(R_2)^2 + 2M(R_1)M(R_2),$$

por hipótesis

$$E((M(R_1 \cup R_2))^2|\mathcal{F}^1_{(s_1,t_1)}) = E(M^2(R_1 \cup R_2)|\mathcal{F}^1_{(s_1,t_1)})$$

$$= E((M(R_1)^2 + M(R_2)^2 + 2M(R_1)M(R_2))|\mathcal{F}^1_{(s_1,t_1)})$$

$$= E(M^2(R_1) + M^2(R_2) + 2M(R_1)M(R_2)|\mathcal{F}^1_{(s_1,t_1)})$$

entonces,

$$E(M(R_1)M(R_2)|\mathcal{F}^1_{(s_1,t_1)}) = 0$$

pues

$$M^2(R_1 \cup R_2) = M^2(R_1) + M^2(R_2).$$

Si

$$R_1 = ((s_1,t_1),(s_2,t_2)],\ R_2 = ((s_2,t_1),(s_3,t_2)]$$

$$E(M(R_1)M(R_2)|\mathcal{F}^1_{(s_1,t_1)}) = 0$$

en forma análoga al caso anterior.

Ahora, si los rectángulos son

$$R_1 = ((s_1,t_1),(s_2,t_2)],\quad R_2 = ((s_2,t_2),(s_3,t_3)]$$

$$E(M(R_1)M(R_2)|\mathcal{F}^1_{(s_1,t_1)}) = E(E(M(R_1)M(R_2)|\mathcal{F}^1_{(s_2,t_2)})|\mathcal{F}_{(s_1,t_1)})$$

$$E(M(R_1)E(M(R_2)|\mathcal{F}^1_{(s_2,t_2)})|\mathcal{F}^1_{(s_1,t_1)}) = 0$$

por ser M 1-martingala.

Si $R_1 = ((s_1,t_1),(s_2,t_2)]$, $R_2 = ((s_1',t_1'),(s_2',t_2')]$ rectángulos disyuntos arbitrarios en $[0,1]^2$, se puede observar que

$$E(M(R_1)M(R_2)|\mathcal{F}^1_{(s_1,t_1)\ (s_1',t_1')}) = 0$$

utilizando un número finito de veces los dos casos anteriores.

COROLARIO 6. Toda M martingala fuerte cuadrado integrable, es una martingala con incrementos ortogonales.

Demostración. Como una martingala fuerte es un 1-martingala con $i = 1,2$, basta verificar que

$$E(M^2(R)|\mathcal{F}^1_{(s_1,t_1)}) = E(M(R)^2|\mathcal{F}^1_{(s_1,t_1)})$$

para $R = ((s,t),(s_1,t_1)]$ en $s < s_1$, $t < t_1$.

Utilizando la misma igualdad que en el teorema 4, **b** $\Rightarrow$ **d**, y el hecho de que si $(s',t') \in ((0,0),(s_1,t_1)] - ((s,t),(s_1,t_1)]$, entonces $M_{(s',t')}$ es $\mathcal{F}^*(s,t)$-medible, se puede ver fácilmente que $E(M^2(R)|\mathcal{F}^1_{(s_1,t_1)}) = E(M(R)^2 \mid \mathcal{F}^1_{(s_1,t_1)})$.

A continuación daremos un ejemplo de un proceso estocástico con dos parámetros en donde la filtración cumple las condiciones **F1-F4** y el proceso es una martingala fuerte.

Ejemplo: Movimiento Browniano en dos parámetros.

Este ejemplo lo encontramos desarrollado en Meyer(1985) y en Walsh (1986) aunque en Meyer (1985) de una forma diferente además de interesante.

Sea (Ω,F,P) un espacio de probabilidad P-completo, un movimiento browniano en dos parámetros es un proceso estocástico $W(s,t)$, $(s,t) \in [0,1]^2$, tal que:

1) $W(s,o) = W(o,t) = 0$

2) Para rectángulos disyuntos $R_1 = ((s_1,t_1),(s_2,t_2)]$, $R_2 = ((s_1',t_1'), (s_2',t_2')]$, $W(R_1)$ y $W(R_2)$ son independientes.

3) La variable aleatoria $W((s,t),(s+u,t+v))$, $(u,v) > 0$ tiene distribución normal con parámetros (o,uv).

Para demostrar la existencia de un tal proceso se construye una familia W de variables aleatorias $\{W_A : A \in B(\mathbb{R}^2)$, ($A$ es un conjunto de Borel de $\mathbb{R}^2$) con medida de Lebesgue $|A| < \infty\}$: que satisfaga

i) W_A tiene distribución normal $N(0,|A|)$

ii) Si A y B son disyuntos, las variables W_A y W_B son independientes y se cumple $W_{A\cup B} = W_A + W_B$.

ii) $W_{A_n} \to 0$ en probabilidad si $A_n \downarrow \Phi$

A esta familia se le conoce con el nombre de **Ruido Blanco**. En efecto, se toma un proceso de Gauss con índices en los conjuntos de Borel de medida Lebesgue finita, para que satisfaga i) y ii), este debe ser un proceso de Gauss con media cero y función de covarianza C dada por

$$C(W_A, W_B) = C(A,B) = E(W_A \cdot W_B) = |A \cap B|.$$

Por el teorema general de Gauss demostrado en Doob (1967), si C es positiva definida, existe un proceso de Gauss con covarianza C y media cero.

Veamos que C es positiva definida. En efecto, sean A_1 y A_2 conjuntos de Borel en $\mathbb{R}^2$ de medida de Lebesgue finita y sean a_1 y a_2 números reales, entonces

$$\sum_{i=j} a_i a_j C(A_i, A_j) = \sum_{i=j} a_i a_j \int \chi_{A_i}(x)\chi_{A_j}(x)\,dx$$

$$= \int \Big(\sum_i a_i \chi_{A_i}(x)\Big)^2 dx \geqslant 0 ,$$

donde

$$\chi_{A_i}(x) = \begin{cases} 1 , & x \in A_i \\ 0 , & x \notin A_i \end{cases} .$$

Como C es positiva definida, existe un espacio de probabili dad $(\Omega,\mathcal{F},P)$ y un proceso de Gauss en él, con media cero y $\{W_A\}$ que satisface i) y W_A y W_B son independientes cuando $A \cap B = \Phi$. Además si A y B son disyuntos se tiene:

$$E((W_A + W_B - W(A \cup B))^2)$$

$$= E(W_A^2 + W_B^2 + W_{A\cup B}^2 + 2W_A W_B - 2W_A W_{A\cup B} - 2W_B W_{A\cup B}$$

$$= |A| + |B| + |A \cup B| - 2|A| - 2|B| = 0$$

dado que $E(W_A W_B) = |A \cap B| = 0$, por lo tanto $W_A + W_B = W_{A\cup B}$, obteniendo ii).

Por la aditividad de W, $W_\Phi = 0$ y así $E(W_{A_n} - W_\Phi) = |A_n| \to 0$ si $A_n \downarrow \Phi$, por lo tanto $W_{A_n} \to 0$ en L^1 y así $W_{A_n} \to 0$ en probabilidad obteniendo iii), y concluyendo además que si $A_n \downarrow A$, entonces $W_{A_n} \downarrow W_A$ en probabilidad.

Definimos ahora un proceso estocástico

$$\{W_{(s,t)}\}_{(s,t)\in[0,1]^2} \quad \text{como} \quad W_{(s,t)} = W_{((o,o),(s,t)]}\ .$$

Este es un proceso Gaussiano con media cero y

$$E(W_{(s_1,t_1)} \cdot W_{(s_2,t_2)}) = |((0,0),(s_1,t_1)] \cap ((0,0),(s_2,t_2)]|$$

$$= (s_1 \wedge s_2)(t_1 \wedge t_2).$$

Ahora pretendemos definir la filtración respecto de la cual éste proceso es de Wiener con dos parámetros. Para $A \subseteq \mathbb{R}^2_+$ de medida finita y $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$, $\mathcal{F}_A = \sigma(W_B : B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2), B \subseteq A) \vee N$, donde N es la colección de conjuntos de medida cero. Notemos que si $A \cap B = \Phi$, $\mathcal{F}_A$ y $\mathcal{F}_B$ son independientes.

Sea ahora $(s,t) \in [0,1]^2$,

$$\mathcal{F}_{(s,t)} = \mathcal{F}_{((0,0),(s,t)]} \; .$$

Demostraremos que el proceso con esta filtración es adaptado, pero antes necesitamos el siguiente resultado:

TEOREMA 7. Sea $\{\mathcal{D}_1\}$ una sucesión decreciente de conjuntos de Borel de medida finita, tales que $\bigcap \mathcal{D}_j = \Phi$, entonces $\bigcap_j \mathcal{F}_{\mathcal{D}_j}$ es trivial, e.d. si $B \in \bigcap_j \mathcal{F}_{\mathcal{D}_j}$, $P(B) = 0$, ó, $P(B) = 1$.

Demostración. Si $A \subseteq \mathbb{R}_+^2$ y $|A| < \infty$, entonces $|A-\mathcal{D}_j| \uparrow |A|$ y por lo tanto $W_A = \lim_{j\to\infty} W_{A-\mathcal{D}_j}$, como $(A-\mathcal{D}_j) \cap \mathcal{D}_j = \Phi$, $W_{A-\mathcal{D}_j}$ es independiente de $\mathcal{F}_{\mathcal{D}_j}$ y por lo tanto de $\bigcap_{j\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_{\mathcal{D}_j}$. Sea $B \in \bigcap_{j\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_{\mathcal{D}_j}$, B es independiente de W_A, para todo $A \subseteq \mathbb{R}_+^2$ con $|A| < \infty$, luego es independiente de $\mathcal{F}$, en consecuencia $P(B)=0$ ó $P(B) = 1$, lo que implica que $\bigcap_{j\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_{\mathcal{D}_j}$ es trivial.

PROPOSICION 8. La filtración $(\mathcal{F}_{(s,t)})_{(s,t)\in[0,1]^2}$ satisface las condiciones (F1)-(F4).

Demostración. De la definición de la filtración se obtiene enseguida que es completa y creciente, faltaría verificar (F3) y (F4).

Para demostrar (F3), sea $z \in [0,1]^2$ y sea $\{z_j\}$ una sucesión decreciente en $[0,1]^2$ que converge a z,

$$\mathcal{F}_z \subseteq \bigcap_{z<s} F_s \subseteq \bigcap_{j\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_{z_j}$$

en forma natural, pero debemos mostrar la igualdad entre estas σ-álgebras, para ello es suficiente demostrar que para todo $A \in \mathcal{F}$

$$P(A|\mathcal{F}_z) = P(A|\bigcap_{j\in N} \mathcal{F}_{z_j}).$$

Como la familia de conjuntos $A = B\cap C$ con $B \in \mathcal{F}_z$ y $C \in \mathcal{F}_{[0,1]^2-((o,o),z]}$ generan a $\mathcal{F}$, es suficiente demostrar que la igualdad se cumple para conjuntos A de esta forma.

Igualmente podemos expresar a $\mathcal{F}_{z_j} = \mathcal{F}_{D_j}$ con

$$D_j = ((0,0),z_j] - ((0,0),z].$$

Por definición $\mathcal{F}_z$ es independiente de $\mathcal{F}_{D_j}$ y por lo tanto

$$P(A|\mathcal{F}_{z_j}) = P(B\cap C|\mathcal{F}_{z_j}) = \chi_B\, P(C|\mathcal{F}_{z_j}) = \chi_B\, P(C|\mathcal{F}_{D_j}),$$

por la escogencia de los z_j, $\bigcap_{j\in N} D_j = \Phi$ y

$$\lim_{j\to\infty} P(A|\mathcal{F}_{z_j}) = P(A|\bigcap_{j\in N} \mathcal{F}_{z_j}).$$

Por otro lado

$$\lim_{j\to\infty} P(A|\mathcal{F}_{z_j}) = \lim_{j\to\infty} \chi_B\, P(C|\mathcal{F}_{D_j}) = \chi_B P(C) = P(A|\mathcal{F}_z)$$

obteniendo $P(A|\mathcal{F}_z) = P(A|\bigcap_{j\in N} \mathcal{F}_{z_j})$.

Veamos ahora que se verifica (F4). Sean (s,t) y (s',t') con $s \leq s'$ y $t > t'$.

$$((0,0),(s,t)] = ((0,0),(s,t')] \cup A$$

$$((0,0),(s',t')] = ((0,0),(s,t')] \cup B$$

con $((0,0),(s,t')]$, A y B rectángulos semiabiertos disyuntos en $[0,1]^2$.

$$\mathcal{F}_{(s,t)} = \mathcal{F}_{(s,t')} \vee \mathcal{F}_A$$

$$\mathcal{F}_{(s',t')} = \mathcal{F}_{(s,t')} \vee \mathcal{F}_B$$

por construcción $\mathcal{F}_{(s,t')}$, $\mathcal{F}_A$ y $\mathcal{F}_B$ son independientes entre sí.

Si $H \in \mathcal{F}_{(s,t)}$ y $G \in \mathcal{F}_{(s',t')}$

$$H = H_1 \cap H_2, \quad H_1 \in \mathcal{F}_{(s,t')}, \ H_2 \in \mathcal{F}_A$$

$$G = G_1 \cap G_2, \quad G_1 \in \mathcal{F}_{(s,t')}, \ G_2 \in \mathcal{F}_B$$

$$\begin{aligned}
P(H \cap G \mid \mathcal{F}_{(s,t')}) &= P((H_1 \cap G_1) \cap (H_2 \cap G_2) \mid \mathcal{F}_{(s,t')}) \\
&= \chi_{H_1 \cap G_1} P((H_2 \cap G_2) \mid \mathcal{F}_{(s,t')}) \\
&= \chi_{H_1} \chi_{H_1} \, E(\chi_{H_2} \chi_{G_2} \mid \mathcal{F}_{(s,t')}) \\
&= \chi_{H_1} \chi_{G_1} \, E(\chi_{H_2} \mid \mathcal{F}_{(s,t')}) \, E(\chi_{G_2} \mid \mathcal{F}_{(s,t')}) \\
&= P(H \mid \mathcal{F}_{(s,t')}) \, P(G \mid \mathcal{F}_{(s,t')}).
\end{aligned}$$

Así obtenemos finalmente F4.

PROPOSICION 9. $\{W_{(s,t)}\}_{(s,t) \in [0,1]^2}$ es una martingala fuerte respecto de $\{\mathcal{F}_{(s,t)}\}_{(s,t) \in [0,1]^2}$

Demostracion. Por definición de $\{\mathcal{F}_{(s,t)}\}$, $\{W_{(s,t)}\}$ es $\mathcal{F}_{(s,t)}$-adaptada.

Sea $R = ((s,t),(s',t')]$.

$$W(R) = (W_{(s',t')} - W_{(s',t)}) - (W_{(s,t')} - W_{(s,t)})$$

$$= W_{((o,t),(s',t')]} - W_{((o,t),(s,t')}$$

$$= W_{((s,t),(s',t')]} = W_R$$

$((0,0),(s,t)] \cap ((s,t),(s',t')] = \Phi$, entonces W_R es independiente de $\mathcal{F}_{(s,t)}$, como

$$\mathcal{F}^1_{(s,t)} = \mathcal{F}_{((o,o),(s,1)]}, \mathcal{F}^2_{(s,t)} = \mathcal{F}_{((o,o)(1,t)]},$$

W_R es independiente de $\mathcal{F}^1_{(s,t)}$ y $\mathcal{F}^2_{(s,t)}$ y por consiguiente de $F^*_{(s,t)}$, obteniendo finalmente

$$E(W(R)|\mathcal{F}^*_{(s,t)}) = E(W_R|\mathcal{F}^*_{(s,t)}) = E(W_R) = 0$$

y $\{W_{(s,t)}\}_{(s,t)\in[o,1]^2}$ es por lo tanto martingala fuerte.

3. Espacios adaptados hiperfinitos con dos parámetros.

Nuestro propósito en esta sección es presentar una familia especial de espacios adaptados con dos parámetros que nos servirá para desarrollar en ellos los conceptos de la teoría general de procesos estocásticos con dos parámetros. Los espacios que vamos a construir son la extensión natural al contexto de dos parámetros de una familia de espacios que fueron construidos usando métodos no-estándar (por ejemplo

Fajardo (1989), Keisler (1988), Albeverio y otros (1986) y que se han convertido en la mejor ilustración de cómo ideas y técnicas desarrolladas en el análisis no-estándar pueden ser utilizadas en el tratamiento de temas perfectamente "estándar" (la terminología es terrible!). En lo que sigue asumiremos que el lector tiene un conocimiento básico de análisis no-estándar, al nivel por ejemplo de Fajardo (1989). Primero recogemos los conceptos más simples e introducimos la notación adecuada. Los únicos trabajos escritos en este tema y que utilizan análisis no-estándar son Dalang (1989) y Manevitz y otros (1981), allí aparecen las siguientes definiciones.

DEFINICION 1. Sea $N \in {}^*\mathbb{N}-\mathbb{N}$ de la forma $N = H!$

(i) La línea discreta hiperfinita de tiempo es $T = \{0, 1/N, 2/N, \ldots, 1-1/N, 1\}$. Observen que dada la forma de N, se tiene que todos los racionales en el intervalo $[0,1]$ están contenidos en T. En dos parámetros utilizamos como conjunto de tiempo a T^2. Las cardinalidades hiperfinitas de T y T^2 son respectivamente $N+1$ y $(N+1)^2$. El orden que definimos sobre T^2 es natural.

(ii) Vamos a fijar como universo hiperfinito al conjunto $\Omega = \{-1, 1\}^{T^2} = \{\omega : T^2 \to \{-1,1\} \,/\, \omega$ es interna$\}$. La cardinalidad hiperfinita de Ω es $2^{(N+1)^2}$

(iii) Dado un punto $v \in T^2$, definimos sobre Ω la siguiente relación de equivalencia interna: dados ω y ω' en Ω, $\omega \approx_v \omega'$ si para todo $u \leq v$ se tiene $\omega(u) = \omega'(u)$. Es decir, hasta el instante v, las funciones ω y ω' son indistinguibles.

(iv) Usando la relación anterior, definimos $A_v = \{A \subseteq \Omega : A$ es interno y cerrado bajo $\approx_v\}$. Esta es un álgebra interna y la estructura $\hat{\underline{\Omega}} = (\Omega, (A_\nu)_{\nu \in T^2}, P)$, en donde P es la probabilidad contadora interna, es el objeto matemático interno que vamos a utilizar para modelar la evolución en el tiempo de la información y los procesos estocásticos que estudiamos en este trabajo. Observemos que para $\nu = (1,1)$, A_ν es el conjunto (interno) de todos los subconjuntos internos de Ω.

(v) A partir de la filtración interna que acabamos de definir podemos construir un espacio adaptado estándar $\underline{\Omega} = (\Omega, (\mathcal{F}_r)_{r \in [0,1]^2}, P)$ en donde $(\mathcal{F}_r)$ es una filtración estándar sobre Ω, obtenida a partir de la interna de manera análoga a como se hace en el caso de un parámetro (Albeverio y otros 1986). Así: Dado $(s,t) \in [0,1]^2$, sea

$$\mathcal{F}_{(s,t)} = (\bigcap {}^{o}{}_{\nu > (s,t)} \sigma(A_\nu)) \vee N.$$

N es la familia de conjuntos P-nulos.

Tenemos ahora dos espacios para trabajar: el interno y el estándar; como es usual en las aplicaciones del análisis no-estándar, vamos a sociarle a cada concepto de la teoría que se está estudiando, en este caso los procesos en dos parámetros, un concepto interno que nos permite traducir, por medio de "levantamientos", al contexto hiperfinito, en donde podemos hacer uso de las técnicas no-estándar, los problemas que queremos resolver. La primera pregunta que nos tenemos que hacer es: qué propiedad tiene el espacio $\underline{\Omega}$ que acabamos de definir? Acá está la respuesta dada por Dalang.

TEOREMA 2. (Dalang 1989): $\underline{\Omega}$ satisface las condiciones (F1)-(F4).

La demostración de este resultado, es una consecuencia inmediata de las partes (c) y (d) de la siguiente proposición.

PROPOSICION 3: (a) Sea $r \in [0,1]^2$. Si x es una variable $\mathcal{F}_r$-medible, entonces existen un $v \in T^2$ con ${}^\circ v = r$ y una variable interna X A_v-medible, tales que ${}^\circ X = x$. Recordemos que a este X se le denomina levantamiento de x.

(b) Si X es un levantamiento acotado de una variable acotada x entonces para cada $r \in [0,1]^2$ existe $v \in T^2$ con $u \not\approx r$, tal que para todo $u \geq v$, $u \not\approx r$, $E(X|A_u)$ es un levantamiento de $E(x|\mathcal{F}_r)$.

(c) La filtración (A_v) satisface la versión interna de la condición **F4**, denotada $\hat{\mathbf{F4}}$: para todos u,v y $w \in T^2$, si $u \Delta v$, $w = u \wedge v$, $B \in A_u$, $C \in A_v$ entonces $P(B \cap C|A_w) = P(B|A_w)P(C|A_w)$.

(d) Si (A_v) satisface **F4** entonces $(\mathcal{F}_r)$ satisface **F4**.

Demostración. Las partes (a) y (b) son sencillas y se demuestran de manera idéntica al caso de un parámetro (por ejemplo Hoover-Perkins 1983). La parte (d) es trivial. Demostramos la condición (c). Tenemos que verificar que para todos $u = (u_1,u_2)$, $v = (v_1,v_2)$ y $r = (r_1,r_2)$ en T^2, si $u \Delta v$, $r = u \wedge v$ $B \in A_u$, $C \in A_v$ entonces $P(B \cap C|A_r) = P(B|A_r)P(C|A_r)$.

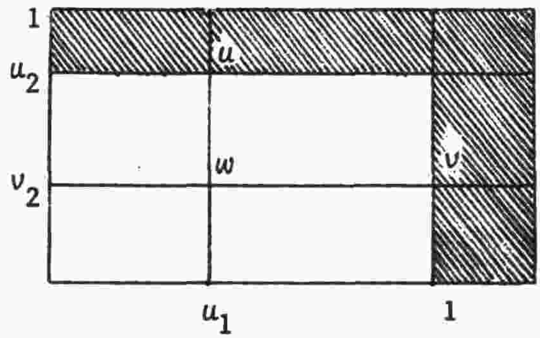
De la definición de la filtración interna (A_z), es suficiente demostrar la anterior propiedad para conjuntos B y C de la forma $[\omega]_u$ y $[\omega]_v$ respectivamente. Por lo tanto, el problema se reduce a verificar lo siguiente:

(1) Dados ω, ω', $\omega'' \in \Omega$, $P([\omega']_u \cap [\omega'']_v | [\omega]_r) = P([\omega']_u | [\omega]_r) P([\omega'']_v | [\omega]_r)$.

Por la definición de probabilidad condicional en el contexto hiperfinito con P la probabilidad contadora interna y observando que ambos lados de la igualdad son cero si no se tiene $\omega' \approx_{\mathit{h}}\omega \approx_{\mathit{h}}\omega''$, (1) se convierte en:

(2) $|[\omega']_u \cap [\omega'']_v| = |[\omega']_u||[\omega'']_v|/|[\omega]_{\mathit{h}}|$. Recuerden que para un conjunto interno A, $|A|$ denota su cardinalidad-tamaño-hiperfinita.

Verificar esta última igualdad es un sencillo ejercicio de conteo hiperfinito. Desarrollamos el lado izquierdo. Una gráfica nos permite visualizar perfectamente lo que pretendemos:



Si $\omega^* \in [\omega']_u \cap [\omega'']_v$, entonces por ser un punto en la región sombreada su valor está determinado por ω' o por ω''. Entonces, $|[\omega']_u \cap [\omega'']_v|$ está dado por el número de puntos de la región no sombreada, el cual es: $1 - u_1u_2 - v_1v_2 + u_1v_2$. Así:

$$|[\omega']_u \cap [\omega'']_v| = 2^{(N+1)^2(1-u_1u_2-v_1v_2+u_1v_2)}.$$

El lado derecho se calcula de manera similar y obtenemos (2). ▲

Ya tenemos a disposición un nuevo espacio adaptado en dos parámetros. Para qué sirve? Qué propiedad tiene?. Nuestro objetivo a largo plazo es responder estos interrogantes. Por el momento, en este primer trabajo nos vamos a limitar a explorar los conceptos básicos de la teoría en el contexto de estos espacios. Los artículos de Meyer (1981), Walsh (1983) y Merzbach y Nualart (1985), sirven de referencia para los conceptos que vamos a desarrollar. Como es usual, empezamos con el proceso estocástico que, en todos los parámetros, históricamente ha sido más estudiado: el movimiento browniano.

El movimiento browniano.

Sea $T_o = \{(o,k/N),(k/N,o),\ k = 1,2,\dots,N\}$, $N \in {}^*\mathbb{N}-\mathbb{N}$, $N = H!$. Sea $\Omega = \{-1,1\}^{T^2-T_0}$ y sea P la probabilidad contadora interna en $\underline{\Omega}$.

La caminata aleatoria interna $B:\Omega\times T^2 \to {}^*\mathbb{R}$ está definida por: $B(W,s,t) = 0$ si $(s,t) \in T_o$ y

$$B(W,s+1/N,\ t+1/N) = B(w,s,t+1/N) + B(W,s+1/N,t) - B(W,s,t) + 1/N\ W(s+1/N,\ t+1/N)$$

es decir que

$$B(w,s.t) = \sum_{(s',t')\leqslant(s,t)} 1/N\, W(s',t').$$

Denotamos por $B_{(w,s,t)}$ al incremento de B en (s,t) y es

$$\begin{aligned} B_{(w,s,t)} &= B(W,s+1/N,\ t+1/N) - B(w,s,t+1/N) - B(W,s+1/N,t) \\ &\quad + B(W,s,t) \\ &= 1/N\ W(s+1/N,\ t+1/N). \end{aligned}$$

Por lo que $B(w,s,t)$ tiene media cero y varianza $1/N^2$. B puede extenderse linealmente a una función definida para todo

$$(s,t) \in [0,1]^2 \text{ como } B(w,s,r) = B(w, \frac{[SN]}{N}, \frac{[tN]}{N}).$$

Sea ahora $b(w,s,t) := {}^\circ B(w,s,t)$. Obtenemos resultados análogos a los de Anderson.

TEOREMA 4. $b(w,s,t)$ es un movimiento Browniano en dos parámetros, esto es:

a) Para todo $(s,t) \in [0,1]^2$, $b(w,s,t)$ tiene distribución con media cero y varianza st.

b) b tiene incrementos independientes.

c) b es continuo como función de (s,t) para casi todo w.

Demostración. **a)** Para una sucesión real $\{s_n\}$, $s_n \to 1$, $n \to \infty$ si y sólo si ${}^\circ S_H = 1$ para $H \in {}^*\mathbb{N}-\mathbb{N}$. Siguiendo el teorema del límite central, como los $w(s,t)$ son independientes con distribución idéntica, para $(s,t) \in T^2$ y a real,

$$P\{B(w,s,t) \leqslant a\} \approx \Phi(a/\sqrt{st}), \text{ donde } \Phi(a) = \int_{-\infty}^{a} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2/2} dx$$

es la distribución normal $N(0,1)$.

Puesto que

$$B(w,s,t) = \sum_{(s',t') \leqslant ([Ns]/N, [Nt]/N)} 1/N\, W(s',t')$$

$$= \frac{1}{\sqrt{[Ns][Nt]}} \sum_{(s',t') \leqslant ([Ns]/N, [Nt]/N)} \sqrt{([Ns]/N)([Nt]/N)}\; W(s',t')$$

entonces

$$P\{B(w,s,t) \leqslant \alpha\} = P\{\frac{1}{\sqrt{[Ns][Nt]}} \sum_{(s',t') \leqslant ([Ns]/N,\, [Nt]/N)} W(s',t')$$

$$\leqslant \frac{\alpha}{\sqrt{([Ns]/N)([Nt]/N)}}\} \approx {}^{*}\Phi(\frac{\alpha}{\sqrt{([Ns]/N)([Nt]/N)}}) \approx \Phi\,(\frac{\alpha}{\sqrt{st}})$$

Como Φ es continua, $b(w,s,t)$ tiene distribución normal $N(o,st)$.

b) Por construcción claramente B tiene incrementos independientes, lo que implica que b también.

c) Para verificar que $b(w,\cdot,\cdot)$ es continua para casi todo w, se demostrará que para todo $(s,t) \in T^2$, $B(w,\cdot,\cdot)$ es casi seguramente S-continua en $(r,s) \times (r,t)$.

Definimos el conjunto interno $\Omega_{m,n}$, $m,n \in \mathbb{N}$ como

$$\Omega_{m,n} = \bigcup_{i,j=0}^{n} \{w: \max_{(s,t)\in[i/N,(i+1)/N]\times[j/N,(j+1)/N]} B_{(w,s,t)}$$

$$- \min_{(s,t)\in[i/N,(i+1)/N]\times[j/N,(j+1)/N]} B_{(w,s,t)} > \frac{1}{m}\}$$

entonces $B(w,\cdot,\cdot)$ es S-continua en ${}^{*}[0,1]^2$ si $w \in \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{k=1}^{\infty} \Omega_{m,n}$.

Sin embargo, usando argumentos de conteo y propiedades de simetría de B,

$$P(\Omega_{m,n}) \leqslant n^2 P\{\max_{(s,t)\in(0,2/N)^2} B(w,s,t) - \min_{(s,t)\in(0,R/N)^2} \cdot$$

$$\cdot B(w,s,t) > \frac{1}{m}\}$$

$$\leqslant n^2 P\{\max_{(s,t)\in(0,2/N)^2} |B(w,s,t)| > \frac{1}{2m}\} \leqslant$$

$$\leq 2n^2 P\{\max_{(s,t)\in(0,2/N)^2} |B(w,s,t)| > \frac{1}{2n}\}$$

$$\leq 8n^2 P\{B(w,2/n,\ 2/m) > \frac{1}{2m}\}$$

(ya que para al menos la mitad de los w con $\max B(w,s,t) > \frac{1}{2m}$, $B(w,\ 2/n,2/m) > \frac{1}{2m}$)

$$\approx 8n^2(1 - \Phi(\frac{1}{2m} - \frac{1}{\sqrt{(2/n)^2}}) = 8n^2(1 - \Phi(\frac{n}{4m})\ )$$

De esto último se obtiene que $P(\Omega_{m,n}) \to 0$ si $n \to \infty$ y por la σ-aditividad de P, $B(w,\cdot,\cdot)$ es caso siempre S-continua, entonces $b(w,\cdot,\cdot)$ es casi siempre continua.

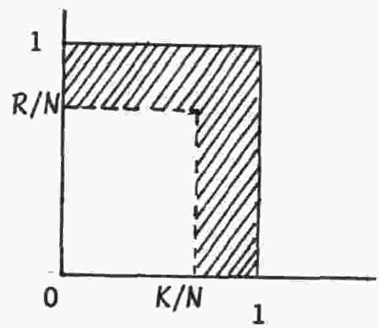
Después de la construcción del movimiento browniano, queremos empezar a estudiar las diferentes clases de martingalas que introdujimos en el capítulo anterior desde el punto de vista hiperfinito. Este es un tema que exige argumentos más complicados de análisis no-estándar y análisis estocástico y lo trataremos en otro trabajo. Como ya señalamos, en la teoría con dos parámetros necesitamos considerar varias filtraciones al mismo tiempo. Tenemos por lo tanto que asociarle a cada una de éstas, una filtración interna que juegue su papel en el espacio adaptado interno que tenemos.

DEFINICION 5. Sea (A_z) la filtración usual. Entonces,

a) Si $z = (z_1,z_2)$ entonces la filtración (A_z^1) está definida por $A_z^1 = A_{(z_1,1)}$. De manera análoga se define (A_z^2).

b) Si $z = (z_1,z_2)$ entonces la filtración (A_z^*) está definida por $A_z^* = A_{(z_1,1)} \vee A_{(1,z_2)}$ en donde esta última expresión representa la menor $*$-álgebra que contiene a las $*$-álgebras $A_{(z_1,1)}$ y $A_{(1,z_2)}$.

Recordamos que las *-álgebras $A_{(z_1,1)}$ y $A_{(1,z_2)}$ son atómicas, podemos ver que A_z^* también es atómica, con átomos de la forma $[\omega]_{z^*} = [\omega]_{(z_1,1)} \cap [\omega]_{(1,z_2)}$. Su cardinalidad interna $|[\omega]_{z^*}|$ se puede calcular fácilmente y es igual a $(N-K)(N-R)$ en donde K y R están explicados en la siguiente figura, que nos ayuda a visualizar lo que queremos:



PROPOSICION 6. Sea $(\mathcal{F}_r)$ la filtración estándar asociada a (A_z). Si $r = (r_1, r_2)$, entonces

(a) $\mathcal{F}_r^1 = \mathcal{F}_{(r_1,1)} \cap \circ_{\nu>(r_1,1)} \sigma(A_z) \vee N$, y la igualdad análoga para $\mathcal{F}_r^2$.

(b) $\mathcal{F}_r^* = \cap \circ_{\nu>(r_1,1)} \sigma(A_z^*) \vee N$.

Demostración. La presentaremos en un trabajo posterior.

*

BIBLIOGRAFIA

Albeverio, S., Fenstad, J., Hoegh-Krohn, R. y Lindstrom, T., (1986) "Nonstandar Analysis and Mathematical Physics". Academic Press.

Anderson, R., (1976) "A nonstandar representation of Brownian Motion and Ito integration". Israel Journal of Mathematics 25.

Billingsley, P. (1979) "Probability and measure". John Wiley & Sons.

Cairoli, R. y Walsh, J. (1975) "Stochastic integrals in the plane", Acta Math. 134.

Dalang, R. (1989) "Optimal stopping of 2-parameter processes on nonstandard probability spaces", TAMS, Vol. 313.

Dalang, R., (1986) "On infinite Perfect graphs and Randomized stopping points on the plane", Tech. Rep. 701. School of OR/IE Cornell University.

Dellacherie, C. y Meyer, P.A. (1975) "Probabilities and potential", Tomos I, II y III. North Holland.

Doob, J.L. (1967) "Stochastic Processes", John Wiley & Sons.

Fajardo, S. (1989) "Introducción al análisis no estándar y sus aplicaciones en la probabilidad", Fondo Editorial Acta Científica Venezolana y la Regional Latinoamericana de la Sociedad Bernoulli.

Gikhman, I. (1982) "Two parameter Martingales", Rusian Math. Surveys, 37.

Iribarren Ileana y Urbina Wilfredo, (1991) "Central Limit Theorem for S-Martingales. Preprint. Universidad Central de Venezuela. Caracas.

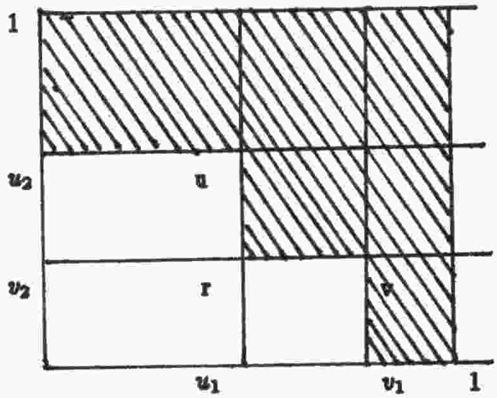
Fé de Erratas

Artículo Procesos Estocásticos con dos Parámetros I

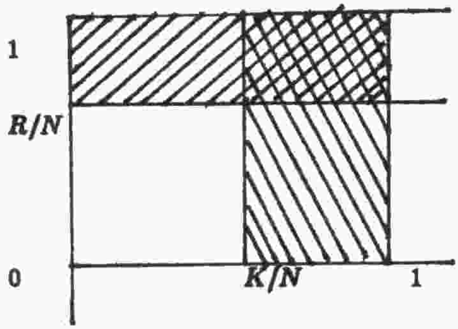
Pág. Reng.	Dice	Debe decir
80 . +2	independet	independent
82 . +5	$E(E(X \mid \mathfrak{F}^1_{(s,t)} \mid \mathfrak{F}^2_{(s,t)})$	$E(E(X \mid \mathfrak{F}^1_{(s,t)}) \mid \mathfrak{F}^2_{(s,t)})$
83 .+10	$\mathfrak{F}^1_{(s,t)}$	$\mathfrak{F}^i_{(s,t)}$
83 .+11	$E(M(R) \mid \mathfrak{F}_{(s,t)})$	$E(M(R) \mid \mathfrak{F}^i_{(s,t)})$
83 .−11	$\mathfrak{F}_{(s,t)}$	$\mathfrak{F}^*_{(s,t)}$
83 . −2	$\mathfrak{F}_{(s,t)\wedge(s_1',t_1')}$	$\mathfrak{F}^i_{(s_1,t_1)\wedge(s_1',t_1')}$
84 . −5	$E((M_{(s,t')} - M_{(s,t)} \mid \mathfrak{F}^2_{(s',t)})$	$E((M_{(s,t')} - M_{(s,t)}) \mid \mathfrak{F}^2_{(s',t)})$
84 . −4	$E((M_{(s,t')} - M_{(s,t)} \mid \mathfrak{F}_{(s,t)})$	$E((M_{(s,t')} - M_{(s,t)}) \mid \mathfrak{F}_{(s,t)})$
85 . +1	$E((M_{(s',t')} - M_{(s',t)} \mid \mathfrak{F}^2_{(s,t)})$	$E((M_{(s',t')} - M_{(s',t)}) \mid \mathfrak{F}^2_{(s,t)})$
85 . +1	$E((M_{(s',t')} - M_{(s',t)} \mid \mathfrak{F}^2_{(s',t)})$	$E((M_{(s',t')} - M_{(s',t)}) \mid \mathfrak{F}^2_{(s',t)})$
85 . +2	$E((M_{(s',t')} - M_{(s',t)} \mid \mathfrak{F}_{(s',t)})$	$E((M_{(s',t')} - M_{(s',t)}) \mid \mathfrak{F}_{(s',t)})$
85 . −3	$E((M_{(s',0)} - M_{(s,0)} \mid \mathfrak{F}_{(s,t)})$	$E((M_{(s',0)} - M_{(s,0)}) \mid \mathfrak{F}_{(s,t)})$
85 . −3	$E((M_{(s',0)} - M_{(s,0)} \mid \mathfrak{F}^1_{(s,0)} \mid \mathfrak{F}_{(s,t)})$	$E((M_{(s',0)} - M_{(s,0)}) \mid \mathfrak{F}^1_{(s,0)} \mid \mathfrak{F}_{(s,t)})$
88 . +5	$E((M_{(s_1,t_2)} - M_{(s_1,t_1)} \mid \mathfrak{F}^1_{(s_1,t)})$	$E((M_{(s_1,t_2)} - M_{(s_1,t_1)}) \mid \mathfrak{F}^1_{(s_1,t)})$
88 . +9	$E(M_{(s_2,t_1)}(M_{(s_2,t_2)} - M_{(s_2,t_1)}) \mid \mathfrak{F}^1_{(s_1,t)}$	$E(M_{(s_2,t_1)}(M_{(s_2,t_2)} - M_{(s_2,t_1)}) \mid \mathfrak{F}^1_{(s_1,t)})$
88 .+10	$E(M_{(s_1,t_1)}(M_{(s_1,t_2)} - M_{(s_1,t_1)}) \mid \mathfrak{F}^1_{(s_1,t)}$	$E(M_{(s_1,t_1)}(M_{(s_1,t_2)} - M_{(s_1,t_1)}) \mid \mathfrak{F}^1_{(s_1,t)})$
88 . −5	$(M_{(s_1,t_2)} - M_{(s_1,t_1)})E(M_{(s_2,t_1)}) \mid \mathfrak{F}^1_{(s_1,t)})$	$(M_{(s_1,t_2)} - M_{(s_1,t_1)})E(M_{(s_2,t_1)} \mid \mathfrak{F}^1_{(s_1,t)})$
89 . −1	$2E(M_{(s_2,t_1)}(M_{(s_2,t_2)} - M_{(s_2,t_1)} \mid \mathfrak{F}^1_{(s_1,t_1)})$	$2E(M_{(s_2,t_1)}(M_{(s_2,t_2)} - M_{(s_2,t_1)}) \mid \mathfrak{F}^1_{(s_1,t_1)})$
90 . +1	$2E(M_{(s_1,t_2)} - M_{(s_1,t_1)})M_{(s_2,t_1)} \mid \mathfrak{F}^1_{(s_1,t_1)})$	$2E((M_{(s_1,t_2)} - M_{(s_1,t_1)})M_{(s_2,t_1)} \mid \mathfrak{F}^1_{(s_1,t_1)})$
90 . +5	$2E(M_{(s_2,t_2)}(M_{(s_2,t_2)} - M_{(s_2,t_1)} \mid \mathfrak{F}^1_{(s_1,t_1)})$	$2E(M_{(s_2,t_2)}(M_{(s_2,t_2)} - M_{(s_2,t_1)}) \mid \mathfrak{F}^1_{(s_1,t_1)})$
91 . +7	$E(E(MR_1)M(R_2) \mid \mathfrak{F}^1_{(s_2,t_2)}) \mid \mathfrak{F}_{(s_1,t_1)})$	$E(E(MR_1)M(R_2) \mid \mathfrak{F}^1_{(s_2,t_2)}) \mid \mathfrak{F}^1_{(s_1,t_1)})$
91 . −7	$E(M(R_1)M(R_2) \mid \mathfrak{F}^1_{(s_1,t_1)\quad(s_1',t_1')})$	$E(M(R_1)M(R_2) \mid \mathfrak{F}^1_{(s_1,t_1)\wedge(s_1',t_1')})$
95 . +5	$\{D_1\}$	$\{D_j\}$
95 . +8	$\lvert A - D_j \rvert \downarrow \lvert A \rvert$	$\lvert A - D_j \rvert \uparrow \lvert A \rvert$
98 . +3	$W_{((0,t),(s',t')]} - W_{((0,t),(s,t')}$	$W_{((0,t),(s',t')]} - W_{((0,t),(s,t')]}$
101. +7	$u \approx r$	$v \approx r$
101.+13	$F4$	$\hat{F}4$
101. −3	$P([w']_v \cap [w'']_v \Vert [w]_r$	$P([w']_v \cap [w'']_v \Vert [w]_r)$
102. −6	no sombreada	sombreada
103.+10	$T_o = \{(0,k/n).(k/n,0),$	$T_o = \{(0,k/n),(k/n,0),$
103. −4	$B_{(w,s,t)}$	$\nabla B_{(w,s,t)}$
103. −3	$B_{(w,s,t)}$	$\nabla B_{(w,s,t)}$
105. +1	entonces	entonces para α real
105. −6	$w \in \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcap_{k=1}^{\infty} \Omega_{m,n}$	$w \notin \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} \Omega_{m,n}$
105. −3	$\max_{(s,t)\in(0,2/N)^2}$	$\max_{(s,t)\in[0,2/N]^2}$
105. −3	$\min_{(s,t)\in(0,R/N)^2}$	$\min_{(s,t)\in[0,2/N]^2}$

Pág.	Reng.	Dice	Debe decir
105.	-1	$\max_{(s,t)\in(0,2/N)^2}$	$\max_{(s,t)\in[0,2/N]^2}$
106.	$+1$	$\max_{(s,t)\in(0,2/N)^2}\lvert B(w,s,t)\rvert > 1/2n$	$\max_{(s,t)\in[0,2/N]^2}\lvert B(w,s,t)\rvert > 1/2m$
106.	$+7$	caso	casi
107.	-4	$\mathfrak{F}_r^1 = \mathfrak{F}_{(r_1,1)} \bigcap_{s>(r_1,1)} \sigma(A_s) \vee N$	$\mathfrak{F}_r^1 = \mathfrak{F}_{(r_1,1)} = \bigcap_{s>(r_1,1)} \sigma(A_s) \vee N$
107.	-2	$\mathfrak{F}_r^* = \bigcap_{s>(r_1,1)} \sigma(A_s^*) \vee N$	$\mathfrak{F}_r^* = \bigcap_{s>(r_1,r_2)} \sigma(A_s^*) \vee N$

La gráfica en la página 102 debe ser la siguiente:



La gráfica en la página 107 debe ser la siguiente:



Keisler, H.J. (1988) "Infinitesimals in probability", en "Non-standar analysis and its applications", editado por N. Cutland. Cambridge University Press. LMSGT 10.

Korezlioglu, H. Mazziotto. G. v Szpirglas, J. Editores de (1981) "Processus Aleatoires a deux Indices". LNM 863.

Loeb, P.A. (1979) "An introduction to nonstandard analysis and hyperfinite probability theory. Probabilistic analysis and related topics", Vol. 2, edited by A. Barucha Reid Academic Press, New York.

Manevitz, L. y Merzbach, E. "Multiparameter stochastic processes via nonstandard analysis". Preprint.

Merzbach, E. y Nualart, D. (1985) "Different kinds of two parameter martingales", Israel Journal of Math. Vol. 52, 3.

Meyer, P.A. (1981) "Theorie élémentaire des processus a deux indices", LNM 863.

Naulart, D. (1983) "Different types de martingales a deux indices", LNM 986.

Walsh, J. (1986) Martingales with a multidimentional parameter and stochastic integrals in the plane. LNM. 1215.

Zakai, M., (1981) "Some classes of two parameter martingales", Ann. Probability 9.

*