Revista Colombiana de Estadística
Nº 25 - 26, págs. 53 - 61

APROXIMACIÓN DEL MOVIMIENTO BROWNIANO DE RAMIFICACIÓN EL ESPACIO B[0, 1]

Liliana Blanco C.

Resumen

Es bien conocido el método presentado por Billingsley [1] para obtener una aproximación del *movimiento Browniano* mediante procesos más simples. En la construcción juega un papel fundamental el espacio C[0, 1] de las funciones continuas de valor real definidas sobre el intervalo [0, 1] junto con la métrica del sup.

Para poder imitar el método allí presentado con el fin de obtener una aproximación del *movimiento Browniano de ramificación* es indispensable construir un espacio métrico apropiado que "reemplace" al espacio C[0, 1]. Dicho espacio lo hemos llamado espacio B[0, 1] y su construcción se describe en el presente artículo.

1. Introducción

El movimiento Browniano es un proceso estocástico $(X_t)_{t\in[0,\infty)}$ que permite describir el movimiento de una partícula en un vaso de agua, causado por choques moleculares.

Este fenómeno físico fue observado por primera vez por el botánico inglés Brown en el año 1827. La primera descripción matemática de dicho fenómeno fue hecha por Einstein en el año 1905. Wiener fue quien presentó por primera vez una formulación matemática completa de dicha teoría en el año de 1918.

Se tiene que X_t representa una coordenada de la posición de la partícula en el tiempo t, es decir $(X_t)_{t\in[0,\infty)}$ es un proceso estocástico cuyo conjunto de estados S es el conjunto $\mathbb{R}$ de números reales.

Las realizaciones del movimiento Browniano son ejemplos de funciones continuas en todo punto y diferenciables en ninguno.

Es bien conocido el hecho de que el movimiento Browniano se puede aproximar mediante procesos más simples (ver por ejemplo Billingsley (1968)).

El método presentado por Billingsley es el siguiente:

Se considera el espacio C[0, 1] de todas las funciones continuas reales definidas sobre el intervalo [0, 1] junto con la métrica del "Sup", esto es si f, g $\in$ C[0, 1] entonces

$$d(f, g) := \sup_{0<t<1} \left| f(t) - g(t) \right|.$$

A partir de una sucesión dada $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots$ de variables aleatorias independientes e igualmente distribuidas se construye una sucesión $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de medidas de probabilidad sobre C[0, 1] que satisface la condición de "tightness", esto es, para todo $\varepsilon > 0$ existe un K_ε compacto tal que $P_n(K_\varepsilon) > 1 - \varepsilon$ para todo n, y cuyas distribuciones finito-dimensionales convergen débilmente hacia las del movimiento Browniano. De ahí se deduce (ver por ejemplo Billingsley (1968) Teorema 8.1 p. 84) que la sucesión $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge débilmente hacia la medida Wiener.

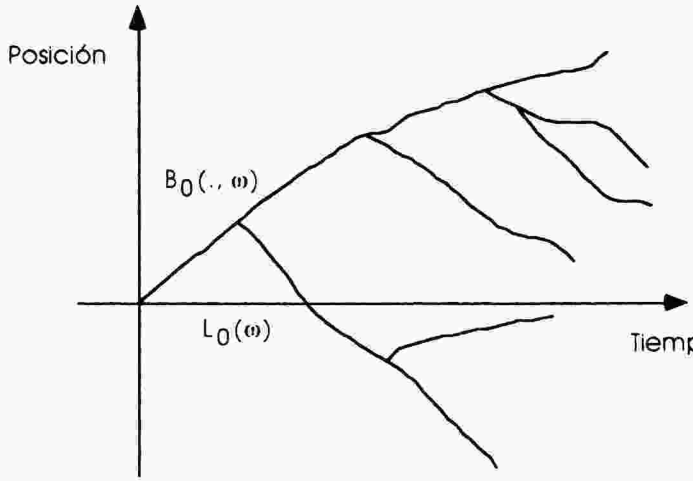
Nosotros nos proponemos imitar el método presentado anteriormente para dar una aproximación del movimiento Browniano de ramificación mediante procesos más simples.

El movimiento Browniano de ramificación es un proceso estocástico que se desarrolla de la siguiente forma:

Una partícula en el tiempo t = 0 en posición x = 0 se mueve según un movimiento Browniano estándar $(B_0(t))_{t\in[0,\infty)}$ hasta un punto $L_0 \in (0, \infty)$ que no depende del movimiento y que se distribuye según la distribución exponencial de parámetro 1, es decir $L_0 \overset{d}{=} \mathrm{Exp}(1)$. En L_0 la partícula se divide en un número aleatorio de partículas (sus "hijos") según una distribución dada p =

$(p_0, p_1, \ldots)$ donde $p_n := P$ ("n hijos") y con $p_0 + p_1 = 0$ Los descendientes dan origen a procesos independientes del mismo tipo.

Geométricamente tenemos que una realización del proceso Browniano de ramificación tiene la siguiente forma:



Para poder imitar el método presentado en Billingsley para el caso del movimiento Browniano construiremos primero que todo un espacio métrico que ha de desempeñar el papel del espacio $(C[0, 1], d)$, luego definiremos una sucesión de medidas de probabilidad sobre ese espacio que satisfaga la condición de "tightness" y cuyas distribuciones finito-dimensionales converjan débilmente a las del movimiento Browniano de ramificación, por último veremos que de esta forma se garantiza la convergencia débil de la sucesión y que con ello se obtiene una aproximación del movimiento Browniano de ramificación, lo cual era nuestro objetivo.

El primer paso es entonces construir el espacio métrico apropiado sobre el cual vamos a trabajar. Este espacio lo denotaremos por $B[0, 1]$ y a sus elementos los llamaremos árboles continuos.

2. Construcción del espacio B[0, 1]

Como aclaramos en la introducción nos proponemos construir un espacio métrico que "reemplace" al espacio métrico (C[0, 1], d). Para nuestra construcción requerimos del concepto de distancia de Hausdorff. Esta distancia define, en particular, una métrica sobre el conjunto de los subconjuntos finitos de un espacio métrico.

2.1 La distancia de Hausdorff

2.1.1. Definición

Sea $(S, \mathbf{d})$ un espacio métrico y sean $A, B \subset S$. Definimos:

$$\mathbf{e}(A, B) := \operatorname{Sup}\{\mathbf{d}(x, B) : x \in A\}$$

donde

$$\mathbf{d}(x, B) := \inf\{\mathbf{d}(x, y) : y \in B\}.$$

La *distancia de Hausdorff entre A y B* está dada por:

$$\mathbf{h}(A, B) := \max(\mathbf{e}(A, B), \mathbf{e}(B, A)).$$

En particular se tiene que si A y B son conjuntos finitos, digamos $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ y $B = \{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$ entonces

$$\mathbf{h}(A, B) = \max\left(\max_{1 \le i \le n} \min_{1 \le j \le m} \mathbf{d}(x_i, y_j), \max_{1 \le j \le m} \min_{1 \le i \le n} \mathbf{d}(x_i, y_j) \right).$$

2.1.2. Propiedades de la distancia de Hausdorff

a) $\mathbf{h}(A, B) = 0$ si y sólo si $\overline{A} = \overline{B}$ donde $\overline{A}$ denota la adherencia del conjunto A.

b) $\mathbf{h}(A, B) \le \mathbf{h}(A, C) + \mathbf{h}(C, B)$.

En particular se tiene que $(\mathcal{P}(S), \mathbf{h})$ donde $\mathcal{P}(S) := \{A \subset S : A \text{ es cerrado en } S\}$ es un espacio métrico. Es más si $(S, \mathbf{d})$ es un espacio métrico completo entonces ($\mathcal{P}$(S), **h**) también lo es (ver por ejemplo C. Castaing. & M. Valadier (1977)).

Para la definición del espacio métrico B[0, 1] requerimos de un espacio métrico especial que denotaremos por $\mathbb{F}$ y el cual definiremos a continuación.

2.2 El espacio métrico $\mathbb{F}$

2.2.1. Definición

Sea $\mathbb{I} := \{0\} \cup \{i : i = \langle i_1 \, i_2 \ldots i_k \rangle ; \; k, i_1, i_2, \ldots, i_k \in \mathbb{N} \}$, es decir $i \in \mathbb{I}$ si y sólo si $i = 0$ o i es una sucesión finita de números naturales.

El conjunto $\mathbb{I}$ se llama *conjunto de todos los individuos.* Con $\langle 0 \rangle$ se denota al individuo inicial, su i-ésimo hijo se denota con $\langle i \rangle$, el j-ésimo hijo de su i-ésimo hijo se denota por $\langle ij \rangle$. En general, $\langle i_1 \, i_2 \ldots i_k \rangle$ denota el k-ésimo hijo del individuo $\langle i_1 \, i_2 \ldots i_{k-1} \rangle$.

2.2.2. Definición

$$\mathbb{F} := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{n\} \times \left(\mathbb{I} \times \mathbb{R}\right)^n,$$

es decir, un elemento de $\mathbb{F}$ es un número natural n junto con una lista de individuos a cada uno de los cuales se les ha asignado una posición en $\mathbb{R}$.

Definimos además la distancia ρ entre los elementos V y W de $\mathbb{F}$ como sigue:

2.2.3. Definición

Sean $V = (n, ((i_1, \beta_1), \ldots, (i_n, \beta_n)))$ y $W = (m, ((\upsilon_1, \gamma_1), \ldots, (\upsilon_m, \gamma_m)))$ elementos de $\mathbb{F}$. definimos

$$\rho(V, W) := \mathbf{h}\left(\{\beta_1, \ldots, \beta_n\}, \{\gamma_1, \ldots, \gamma_m\}\right),$$

siendo **h** la distancia de Hausdorff sobre $\{A \subset \mathbb{R} : \# A < \infty\}$.

2.2.4. Observación

Elementos V, W $\in \mathbb{F}$ con $\rho(V, W) = 0$ serán consideramos a partir de ahora como iguales.

2.3 El espacio métrico B[0, 1]

2.3.1. Definición

Un árbol continuo es una función

$$\begin{array}{rcl} b:[0,1] & \rightarrow & \mathbb{F} \\ t & \mapsto & \mathbf{b}[t] := \left(b(t), \left(\left(i_1(t), \beta_1(t)\right), \ldots, \left(i_{b(t)}(t), \beta_{b(t)}(t)\right)\right)\right) \end{array}$$

con la siguiente interpretación:

$b(t)$:= número de individuos presentes en el tiempo t,

$i_n(t)$:= "identificación" del n-ésimo individuo presente en el tiempo t, n = 1, ..., b(t),

$\beta_n(t)$:= posición del n-ésimo individuo presente en el tiempo t, n = 1, ..., b(t), y con las siguientes características:

1. $b[0] = (1, (\langle 0 \rangle, 0))$,
2. b(t) es una función no decreciente continua a derecha,
3. $b(1) < \infty$,
4. Los individuos se mueven según una función continua hasta el momento en que mueren, luego son reemplazados por un número aleatorio $k \geq 1$ de individuos (sus hijos), los cuales inician movimientos del mismo tipo a partir del punto donde se encontraba el padre al momento de morir.

Un árbol continuo puede considerarse como un conjunto finito de C[0, 1]. En efecto, sea **b** un árbol continuo y $\mathbb{A}$ el conjunto de todos sus individuos finales, ésto es individuos que están vivos en el tiempo t = 1.

Sea $i \in \mathbb{A}$ fijo. Nosotros seguimos el movimiento de ese individuo hasta el momento de su nacimiento, luego seguimos el movimiento de su padre hasta el momento del nacimiento de éste, etc. Nosotros repetimos este proceso hasta llegar a $t = 0$. La i-ésima rama del árbol **b** es la función continua que podemos construir al unir los fragmentos de funciones continuas que describen los movimientos del individuo y de sus antepasados. Es decir, un árbol continuo **b** puede verse como un conjunto finito de funciones de $C[0, 1]$ con $f(0) = 0$ para toda $f \in \mathbf{b}$. Las funciones $f \in \mathbf{b}$ tienen índices i adecuados.

Por lo tanto un árbol continuo b puede considerarse o bien como una función sobre$[0, 1]$ con valores en el espacio métrico $\mathbb{F}$ o bien como un conjunto finito de funciones de $C[0, 1]$.

La primera formulación facilita la interpretación gráfica de los árboles continuos. La segunda será con la que trabajaremos más frecuentemente.

2.3.2. Definición

$B[0, 1]$ designa el conjunto de todos los árboles continuos.

Ahora queremos dotar al conjunto $B[0, 1]$ de una métrica con la cual resulte ser un espacio métrico separable.

2.3.3. Definición

Sean $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in B[0, 1]$. Supongamos:

$$\mathbf{a} = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \text{ y } \mathbf{b} = \{b_1, b_2, \ldots, b_m\},$$

donde

$$a_i := \text{i-ésima rama del árbol } \mathbf{a},\ i = 1, 2, \ldots, n$$

$$b_j := \text{j-ésima rama del árbol } \mathbf{b},\ j = 1, 2, \ldots, m.$$

Definimos la *distancia* Δ *entre* **a** *y* **b** como sigue

$$\Delta(\mathbf{a}, \mathbf{b}) := \mathbf{h}(\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}, \{b_1, b_2, \ldots, b_m\}),$$

siendo **h** la distancia de Hausdorff sobre $\{A \subset C\,[0, 1] : \#A < \infty\}$.

Vamos a demostrar a continuación que el espacio métrico $(B\,[0, 1], \Delta)$ es separable.

2.3.4. Teorema

$(B\,[0, 1], \Delta)$ es separable.

Demostración:

Sabemos que el espacio $(C\,[0, 1], d)$ es separable. Sea $\mathbf{A}$ un subconjunto denso y numerable de $C\,[0, 1]$.

Consideremos el conjunto $\mathbf{B}_0$ de todos los árboles cuyas ramas son elementos de $\mathbf{A}$. Puesto que $\mathbf{A}$ es numerable y puesto que existen solamente una cantidad numerable de posibles formas de escoger conjuntos finitos de individuos finales entonces existen sólo un número numerable de posibles formas de escoger "ramas" del conjunto $\mathbf{A}$, esto es $\mathbf{B}_0$ es numerable.

Sea $\mathbf{a} \in B\,[0, 1]$ y $\varepsilon > 0$ fijos. Queremos demostrar que existe un $\mathbf{b} \in \mathbf{B}_0$ con $\Delta(\mathbf{a}, \mathbf{b}) < \varepsilon$. Supongamos que $\mathbb{A}$ designa el conjunto de todos los individuos finales del árbol **a**, Sea $i \in \mathbb{A}$ y a_i la rama correspondiente entonces existe una función $f_i \in \mathbf{A}$ tal que $d(a_i, f_i) < \varepsilon$.

Consideremos el árbol $\mathbf{b} \in B\,[0, 1]$ con:

1. Los individuos finales de **b** son los mismos individuos finales de **a**,
2. Cada rama a_i del árbol **a** será reemplazada por la correspondiente función $f_i \in \mathbf{A}$.

Es claro que

$\mathbf{b} \in \mathbf{B}_0$ y que $\Delta(\mathbf{a}, \mathbf{b}) < \varepsilon$, pues

$$\max_i \min_j d(a_i, f_j) < \max_i d(a_i, f_i) < \varepsilon \quad y$$

$$\max_j \min_i d(a_i, f_j) < \max_j d(a_j, f_j) < \varepsilon \quad \blacksquare$$

Es importante aclarar que los conceptos de compacidad relativa y de "tightness" de una familia Π de medidas de probabilidad sobre un espacio métrico **S** no son en general equivalentes. Se tiene que si Π satisface la condición de "tightness" entonces es relativamente compacta. Si **S** es separable y completo y Π es relativamente compacta, entonces Π satisface la condición de "tightness".

Bibliografía

Billingsley, P., (1968), *Convergence of probability measures*, Wiley, New York

Blanco, L., (1991), *Approximation der "Branching -Brownian- Motion"*, Tesis de doctorado, Mainz (Alemania).

Castaing, C. and Valadier, M., (1977), *Convex Analysis and measurable multifunctions*, Springer-Verlag, Berlín.

Feller, W., (1971), *An Introduction to probability and its applications*, Vol. 2, Wiley, New York.