

# EFICIENCIA DE LAS ALETAS con sección transversal no uniforme

RANGEL JARA HERMES A.  
Ingeniero Químico, M.Sc.I.Q.  
Profesor asociado, U.N.

## RESUMEN

El cálculo matemático exacto del perfil de temperatura y por ende de la eficiencia de la aleta con sección transversal no uniforme implica la solución de una ecuación diferencial de Bessel modificada. En este artículo se presenta e implementa una alternativa de cálculo de las funciones de Bessel modificadas de primera y segunda clase que resultan de resolver la ecuación diferencial y que permite la valoración de la eficiencia de la aleta. Se utilizan cuadraturas de Gauss y de Laguerre para la integración numérica de las funciones modificadas de Bessel de cualquier orden. Esta alternativa puede considerarse como una forma más elaborada y precisa, con respecto a las propuestas convencionales para la solución del problema.

## INTRODUCCION

Las aletas se usan para aumentar la superficie efectiva de transferencia de calor entre una superficie y el fluido que la rodea. Se justifica la utilización de las aletas o superficies extendidas cuando se da la presencia de un coeficiente de película relativamente bajo o existe un fluido que controla la transferencia de calor.<sup>8,9,11,12</sup>

Existe una gran variedad de formas geométricas.<sup>4,7,8</sup> En la Figura 1 se muestran dos tipos de aletas, con sección transversal no uniforme, bastante utilizadas: aleta triangular recta y aleta anular de espesor uniforme.

La solución de la ecuación diferencial para el caso de aletas con sección transversal uniforme y considerando las condiciones reales de frontera es relativamente sencilla<sup>2,8,9,10</sup>. Harper y Brown<sup>3</sup> utilizaron una longitud corregida de la aleta,  $L_c$ , para extender la solución obtenida en una aleta con extremo aislado, para ser utilizada en una aleta finita con convección en el extremo y el error que resulta de esta aproximación es menor del 1%, con algunas limitaciones. Estas soluciones aproximadas se extienden a geometrías con

sección transversal no uniforme y son presentadas en forma de gráficas, con la indicación respectiva para la evaluación de los parámetros geométricos.

En la alternativa de cálculo propuesta se presenta la ecuación diferencial respectiva originada en un balance de energía y la forma de evaluar las funciones modificadas de Bessel, con las condiciones reales de frontera del problema físico. En nota bibliográfica 5 se incluye una tabla bastante precisa de las funciones de Bessel, la cual sirve para validar la técnica numérica propuesta para la integración de las funciones modificadas de Bessel. Se utilizaron cuadraturas Gaussianas y de Laguerre de diez y seis puntos, que garantizan una alta precisión en el cálculo<sup>1,6</sup>.

## EFICIENCIA DE LAS ALETAS

La ecuación diferencial de la aleta originada en un balance de energía, cuando el estado es estable y el flujo de calor es unidimensional,<sup>10</sup> es:

$$\frac{d}{dx} \left[ A(x) \frac{dT}{dx} \right] - \frac{hc}{k} [T - T_\infty] \frac{da(x)}{dx} = 0 \quad (1)$$

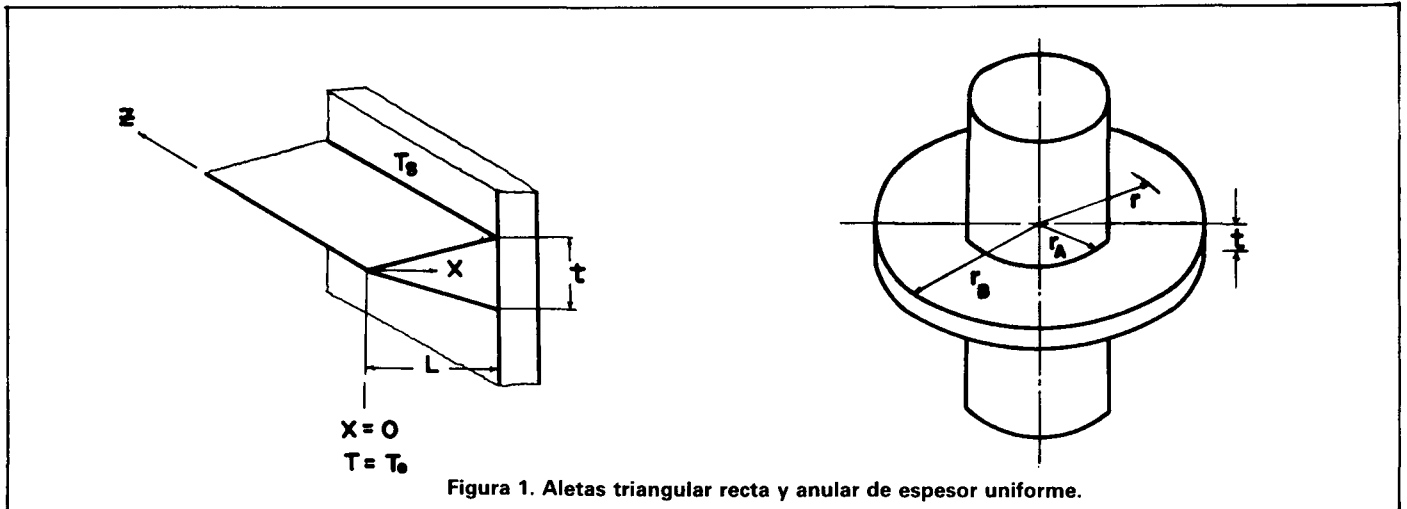


Figura 1. Aletas triangular recta y anular de espesor uniforme.

donde,

$A(x)$ , área de la sección transversal de la aleta en  $x$

$a(x)$ , área lateral de la aleta en  $x$

$h_c$ , coeficiente de película

$k$ , conductividad térmica

$T$ , temperatura en la aleta

$T_\infty$ , temperatura del fluido

$x$ , dirección del cambio en la temperatura

$A(x)$  y  $a(x)$  se deben expresar matemáticamente en función de  $x$ .

Se supone que la temperatura en cualquier sección transversal de la aleta es uniforme, lo que implica un análisis unidimensional de la temperatura. Esto conlleva, para las aletas de interés práctico, un error menor del 1%.<sup>3</sup>

Para el caso de la aleta triangular recta resulta

$$\frac{d^2T}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dT}{dx} - \frac{(2hcL/kt)}{x} (T - T_\infty) = 0 \quad (2)$$

donde,

$L$ , longitud de la aleta

$t$ , espesor de la aleta en la base.

La ecuación 2 es una ecuación diferencial modificada de Bessel<sup>13</sup> y la solución es:

$$(T - T_\infty) = C_1 I_0(mx^{1/2}) + C_2 K_0(mx^{1/2}) \quad (3)$$

donde,

$$m = (8hcL/kt)^{1/2}$$

$I_0$ , función de Bessel modificada de primera clase y orden cero

$K_0$ , función de Bessel modificada de segunda clase y orden cero

$C_1$  y  $C_2$ , constantes de integración.

De la Figura 1 y para  $x = 0$

$$(T_0 - T_\infty) = C_1 I_0(0) + C_2 K_0(0)$$

De (6)  $K_0(0) = \infty$  y como  $T$  tiene un valor finito, por lo tanto  $C_2 = 0$ .

En  $x = L$   $T = T_s$  (temperatura en la base de la aleta)

$$(T_s - T_\infty) = C_1 I_0(mL^{1/2})$$

$$C_1 = \frac{(T_s - T_\infty)}{I_0(mL^{1/2})}$$

Al reemplazar lo anterior en la ecuación 3 resulta

$$\frac{(T - T_\infty)}{(T_s - T_\infty)} = \frac{I_0(mx^{1/2})}{I_0(mL^{1/2})} \quad (4)$$

El calor real transferido por la aleta al fluido puede calcularse, en términos conductivos, valorando  $dT/dx$  en  $x = L$ .

$$(dT/dx)_{x=L} = \frac{m}{2L^{1/2}} \frac{I_1(mL^{1/2})}{I_0(mL^{1/2})} (T_s - T_\infty)$$

$$Q_r = z(2hcL)^{1/2} (T_s - T_\infty) \frac{I_1(mL^{1/2})}{I_0(mL^{1/2})} \quad (5)$$

Donde  $z$  es la profundidad de la aleta y  $Q_r$  el calor real.

La eficiencia,  $\epsilon$ , de la aleta se define como:

$$\epsilon = \frac{(\text{calor real transferido})}{(\text{calor teórico transferido})} \quad (6)$$

El calor teórico es el transferido si el área total de la aleta estuviera a la temperatura de la base. Por lo tanto

$$Q_t = 2hcL(T_s - T_\infty) \quad (7)$$

$$\text{donde } LL = [L^2 + (t/2)^2]^{1/2}$$

Al reemplazar en la ecuación 6 las ecuaciones 5 y 7 resulta la siguiente expresión para la eficiencia de la aleta triangular:

$$\epsilon = \frac{(2hcL)^{1/2}}{2hcLL} \frac{I_1(mL^{1/2})}{I_0(mL^{1/2})} \quad (8)$$

La ecuación diferencial para la aleta anular con espesor uniforme es

$$\frac{d^2T}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT}{dr} - (2hc/kb) (T - T_\infty) = 0 \quad (9)$$

donde,

b, espesor de la aleta

r, posición radial.

La solución de la **ecuación diferencial 9** según (13) es

$$(T - T_\infty) = C_1 I_0(mr) + C_2 K_0(mr) \quad u1 \quad (10)$$

donde  $m = (2hc/kb)^{1/2}$

Los valores de  $C_1$  y  $C_2$  se determinan a partir de las condiciones de frontera, así:

En  $r = r_A$   $T = T_A$

$$(T_A - T_\infty) = C_1 I_0(mr_A) + C_2 K_0(mr_A) \quad (11)$$

Para  $r = r_B$  se tiene

$$-k(dT/dr) = hc(T_B - T_\infty)$$

$$-k(mC_1 I_1(mr_B) - mC_2 K_1(mr_B)) = hc(C_1 I_0(mr_B) + C_2 K_0(mr_B)) \quad (12)$$

Al solucionar el sistema de **ecuaciones 11 y 12** se obtiene

$$C_1 = \frac{(T_A - T_\infty)}{(I_0(mr_A) + a_2 K_0(mr_A))} \quad (13)$$

$$C_2 = a_2 C_1 \quad (14)$$

donde

$$a_1 = (hc/km)$$

$$a_2 = \frac{a_1 I_0(mr_B) + I_1(mr_B)}{(K_1(mr_B) - a_1 K_0(mr_B))}$$

El calor real transferido por la aleta al fluido puede calcularse conductivamente, valorando  $dT/dr$  en  $r = r_A$ , y se obtiene

$$Q_r = -2\pi b r_A m (C_1 I_1(mr_A) - C_2 K_1(mr_A))$$

El calor teórico transferido por la aleta es

$$Q_t = (2\pi hc (r_B^2 - r_A^2) + 2\pi h c b r_B) (T_A - T_B)$$

Finalmente, la expresión para la eficiencia de la aleta resulta:

$$\epsilon = \frac{-2\pi k r_A b m (C_1 I_1(mr_A) - C_2 K_1(mr_A))}{2\pi hc (r_B^2 - r_A^2) + 2\pi h c b r_B (T_A - T_B)} \quad (15)$$

### Cálculo numérico de las funciones modificadas de Bessel

La función de Bessel modificada de primera clase y orden  $v$  entero es,

$$I_v(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^{x \cos t} \cos vt \, dt \quad (16)$$

El cálculo de  $I_v(x)$  se efectuó por medio de una cuadratura de Gauss de diez y seis puntos<sup>1,6</sup>. Los valores de

las abscisas y las funciones de peso son leídas en el procedimiento **Procedure datos**, como parte de la estructura del programa de computación.

La función de Bessel modificada de segunda clase y orden  $v$  entero es,

$$K_v(x) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \exp(vt - x \cosh vt) (1 + e^{-2vt}) dt \quad (17)$$

La valoración numérica de  $K_v(x)$  se realizó mediante una cuadratura Gauss-Laguerre. Para una mayor precisión se dividió el intervalo de integración en dos. Inicialmente utiliza una cuadratura Gaussiana hasta un valor relativamente alto y luego se cambia a una cuadratura de Laguerre<sup>1</sup>.

### Resultados y conclusiones

El programa fue contrastado para dos situaciones a nivel bibliográfico. En el libro de Kreith<sup>9</sup> se calcula para una aleta triangular, con la siguiente información:

$$\begin{aligned} hc &= 15 \text{ Btu/hrft}^2\text{°F} & t &= 1 \text{ pulg.} \\ L &= 4 \text{ pulg.} & T_s &= 1100\text{°F} \\ k &= 15 \text{ Btu/hrft}^2\text{°F} & t_\infty &= 100\text{°F} \end{aligned}$$

El calor real transferido por unidad de profundidad es de 5050 Btu/hrft. Mediante el programa elaborado los resultados obtenidos fueron:  $Q_r = 5069.60$  Btu/hrft y una eficiencia  $\epsilon = 0.5030$ .

Para una aleta radial con espesor uniforme en el libro de Pitts y Sissom<sup>9</sup>, con los siguientes datos

$$\begin{aligned} r_A &= 1 \text{ pulg.} & k &= 93 \text{ Btu/hr.ft}^2\text{°F} \\ r_B &= 2 \text{ pulg.} & T_A &= 330\text{°F} \\ b &= 0.009 \text{ pulg.} & T_\infty &= 80\text{°F} \\ hc &= 1.5 \text{ Btu/hr.ft}^2\text{°F} \end{aligned}$$

el libro suministra un valor para la eficiencia de la aleta de  $\epsilon \approx 0.94$  y textualmente anota la dificultad para la obtención de valores exactos de las funciones de Bessel modificadas y además la condición de frontera en  $r = r_B$  se considera como un extremo aislado. Mediante el programa se obtiene un valor de la eficiencia  $\epsilon = 0.9653$ .

A manera de una gran conclusión puede anotarse que el programa de computación elaborado es validado satisfactoriamente y asegura un cálculo para la eficiencia de las aletas con sección transversal no uniforme en una forma más exacta y expedita.

El programa elaborado puede utilizarse como un módulo numérico muy práctico y prueba de ello son las **Figuras 2 y 3** originadas en una corrida mediante un cambio iterativo de un parámetro geométrico o una propiedad térmica. En el **anexo** se presenta el listado del programa.

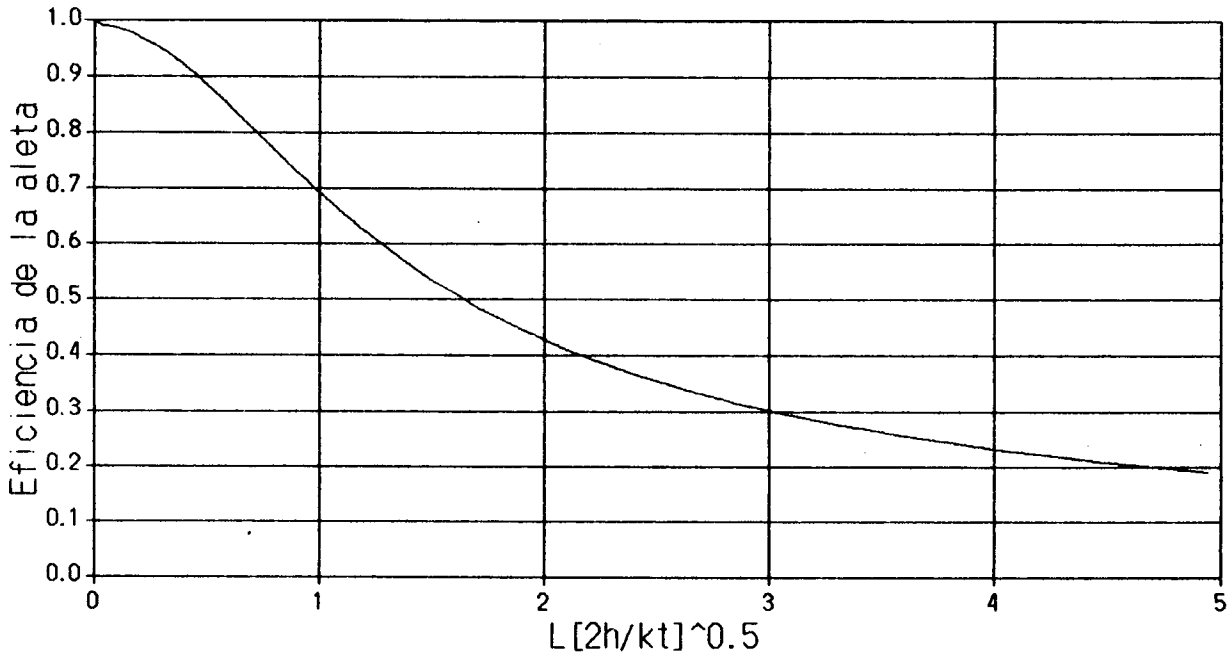


Figura 2 Eficiencia de aletas triangulares

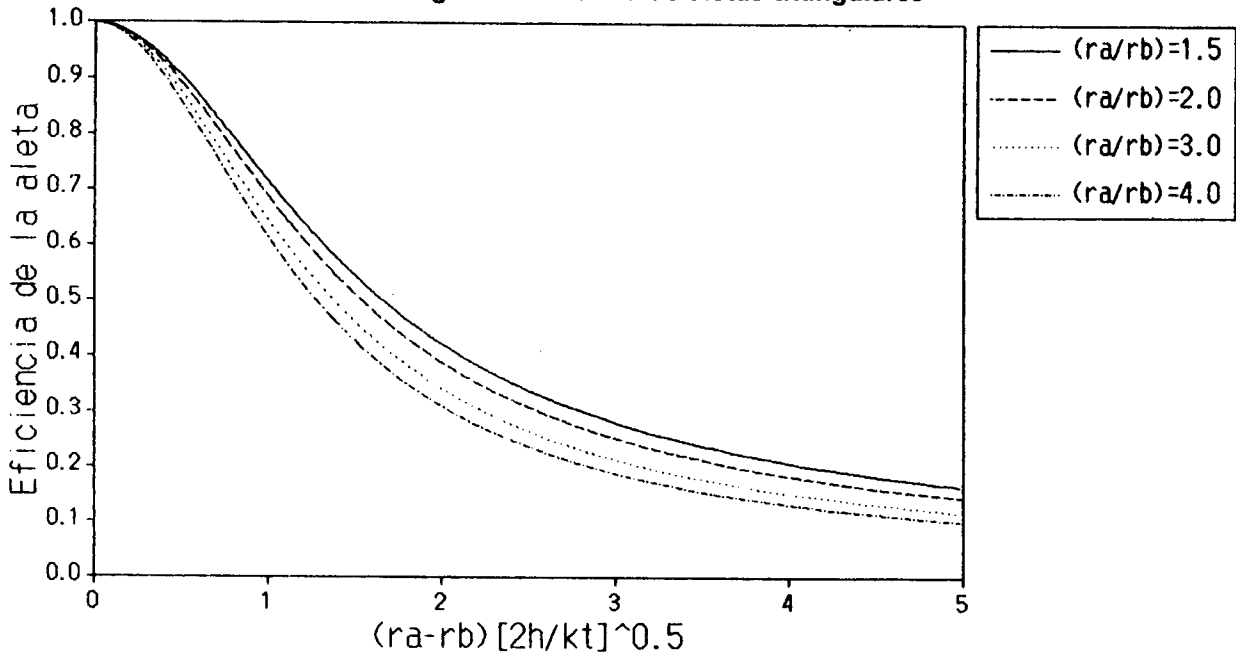


Figura 3 Eficiencia de aletas radiales

BIBLIOGRAFIA

1. Carnahan, B., Luther, H.A. Cálculo numérico. Métodos, aplicaciones. Ed. Rueda. Madrid, 1979.
2. Gardner, K.A. Efficiency of extended surfaces, Trans. ASME, 67, 621-631, 1945.
3. Harper, W.P., Brown, D. R. Mathematical equations for heat conduction in the fins of air-cooled engines, NACA Rep. 158, 1922.
4. Holman, J.P. Transferencia de calor. McGraw-Hill book Co. Compañía Editorial Continental S.A., Segunda edición, 1980.
5. Jahnke, E., Emde, F., Losch, F. Tables of Higher Functions. 6th ed., McGraw-Hill, 1960.
6. Jenson, V.G., Jeffreys, G.V. Métodos matemáticos aplicados en Ingeniería Química. Ed. Alhambra. Madrid. Primera edición, 1969.
7. Karlekar, B.V., Desmond, R.M. Transferencia de calor. Nueva Editorial Interamericana S.A., 1985.
8. Kreith, F. Principles of heat transfer. Harper Internat. Edition, fourth ed., 1986.
9. Pitts, D.R., Sissom, L.E. Heat transfer. McGraw-Hill Latinoam. S.A., 1977.
10. Ozisik, N.M. Transferencia de calor. McGraw-Hill Latinoam. S.A., 1985.
11. Welty, J.R. Transferencia de calor aplicada a la Ingeniería. John Wiley & Sons. Editorial Limusa, 1981.
12. Welty, J.R., Wilson, R.E., Wicks, C.E. Fundamentals of momentum, heat and mass transfer. Wiley International Ed., 1969.
13. Wylie, R.C. Advanced engineering mathematics. McGraw-Hill Book Co., 1975.

## Anexo

```

REM "-----"
PRINT " Este programa calcula la eficiencia de aletas anular de espesor "
PRINT " uniforme y triangular recta. Las funciones de Bessel modificadas "
PRINT " de primera y segunda clase de cualquier orden se calculan mediante "
PRINT " cuadraturas de Gauss y Gauss-Laguerre, respectivamente. "
PRINT " Opciones: "
PRINT "     Opción 1 = Aleta anular de espesor uniforme "
PRINT "     Opción 2 = Aleta triangular recta "
REM "-----"
DEFN f(x)=EXP(x^9*COS(x))*COS(n0*x)
DEFN g(x)=(1+EXP(-s2*x))*EXP(n0*x-x^8*(EXP(x)+EXP(-x)))
DIM u(16),w(16),v(16),z(16),ii(5),kk(5),iii(5),kkk(5)
GOSUB datos
INPUT "opción=";opcion%
IF opcion%=2 THEN
  GOTO triangular
ENDIF
REM " -----cálculo eficiencia aleta radial-----"
INPUT "hc=";hc
INPUT "ra=";ra
INPUT "rb=";rb
INPUT "b=";bb
INPUT "k=";kk
INPUT "ta=";ta
INPUT "to=";to
m1=(2*hc/(kk*bb))^0.5
n0=0
x9=m1*ra
GOSUB funi
ii(0)=q
GOSUB funk
kk(0)=q
n0=1
x9=m1*rb
GOSUB funi
ii(1)=q
GOSUB funk
kk(1)=q
n0=0
GOSUB funi
iii(0)=q
GOSUB funk
kkk(0)=q
n0=1
x9=m1*ra
GOSUB funi
iii(1)=q
GOSUB funk
kkk(1)=q
REM "Evaluación de constantes"
a1=(hc/(kk*m1))
a2=(ii(1)+a1*iii(0))/(kk(1)-a1*kkk(0))
tta=ta-to
c1=tta/(ii(0)+a2*kk(0))
c2=a2*c1
REM "cálculo de eficiencia"

```

```

qt=(2*hc*(ta-to)*PI*(rb^2-ra^2))+hc*2*PI*rb*bb*(ta-to)
qr=-kk*2*PI*ra*bb*nl*(c1*iii(1)-c2*kkk(1))
nn=qr/qt
PRINT "eficiencia=";nn
END
REM "-----cálculo eficiencia aleta triangular-----"
triangular:
INPUT "hc=";hc
INPUT "L=";l1
INPUT "t=";t
INPUT "k=";kk
INPUT "ta=";ta
INPUT "to=";to
b1=1
l1=((l1^2+(t/2)^2))^0.5
m2=(8*hc*l1/(kk*t))^0.5
n0=0
x9=m2*(l1^0.5)
GOSUB funi
ii(0)=q
n0=1
GOSUB funi
ii(1)=q
REM "-cálculo de eficiencia-"
qt=2*hc*l1*b1*(ta-to)
qr=b1*((2*hc*kk*t)^0.5)*(ta-to)*ii(1)/ii(0)
nn=qr/qt
PRINT "eficiencia=";nn
REM "-----cálculo de función In-----"
PROCEDURE funi
a=0
b=PI
s9=(1/PI)
REM "Cuadratura Gaussiana de 16 puntos"
h=b-a
h2=h/2
k=0
n=1
q=0
a0=a-h2
FOR j=1 TO n
x0=h*j
FOR i=1 TO 16
x=h2*u(i)
x1=a0+x0+x
x2=a0+x0-x
q=q+w(i)*(FN f(x1)+FN f(x2))
NEXT i
NEXT j
q=q*h2
q=q*s9
RETURN
REM "-----cálculo de función Kn-----"

```

PROCEDURE funk

```

a=0
b0=8
x8=x9/2
s2=n0+n0
s9=0.5
b=b0
l=1
k=0
n=1
h=b
h2=h/2
q=0
a0=-h2
FOR j=1 TO n
x0=h*j
FOR i=1 TO 16
x=h2*u(i)
x1=a0+x0+x
x2=a0+x0-x
q=q+w(i)*(FN g(x1)+FN g(x2))
NEXT i
NEXT j
q=q*h2
REM "-----Cuadratura Laguerre-----"
FOR i=1 TO 15
x=b+v(i)
q=q+z(i)*FN g(x)
NEXT i
q=q*s9
RETURN

```

PROCEDURE datos

```

FOR i=1 TO 16
READ u(i),w(i),v(i),z(i)
NEXT i
DATA .04830766568773832,.09654008851472780,.093307812017,.239578170311
DATA .14447196158279649,.09563872007927486,.492691740302,.560100842793
DATA .23928736225213707,.09384439908080457,1.215595412071,.887008262919
DATA .33186860228212765,.09117387869576388,2.269949526204,1.22366440215
DATA .42135127613063535,.08765209300440381,3.667622721751,1.57444872163
DATA .50689990893222939,.08331192422694676,5.425336627414,1.94475197653
DATA .58771575724076233,.07819389578707031,7.565916226613,2.34150205664
DATA .66304426693021520,.07234579410884851,10.120228568019,2.77404192683
DATA .73218211874028968,.06582222277636185,13.130282482176,3.25564334640
DATA .79448379596794241,.05868409347853555,16.654407708330,3.80631171423
DATA .84936761373256997,.05099805926237618,20.776478899449,4.45847775384
DATA .89632115576605212,.04283589802222668,25.623894226729,5.27001778443
DATA .93490607593773969,.03427386291302143,31.407519169754,6.35956346973
DATA .96476225558750643,.02539206530926206,38.530683306486,8.03178763212
DATA .98561151154526834,.01627439473090567,48.026085572686,11.5277721009
DATA .99726386184948156,.00701861000947010,0,0

```

RETURN