

Solución de redes hidráulicas mediante la aplicación del modelo de balance de nodos y el método de linealización de ecuaciones

Paulo César Narváez Rincón*, Jorge Armando Granados**, Héctor Barrera***,

RESUMEN

El dimensionamiento de redes de distribución de fluidos es un problema común a diferentes áreas de la ingeniería, como la química y la civil, presente en el diseño de acueductos, sistemas de distribución de gas domiciliario, redes contra incendio y plantas de transformación química. Este trabajo presenta un modelo para su simulación, mediante la aplicación del balance de nodos y la teoría de linealización de ecuaciones. Permite dimensionar una red compleja, en la que pueden estar presentes accesorios, bombas, válvulas de control, boquillas de aspersión y equipos de proceso. Es aplicable a redes abiertas, cerradas o combinaciones de las dos.

INTRODUCCIÓN

El análisis de redes hidráulicas es un problema de gran importancia en ingeniería, que puede realizarse en estado estable o inestable, dependiendo del objetivo que se persiga. Si el fin es dimensionar la red, el análisis en estado estable es el más adecuado, pues permite determinar la capacidad del sistema para cumplir las necesidades de diseño, presiones y flujos, indefinidamente [14].

Hay dos leyes físicas que rigen el comportamiento de las redes de distribución de fluidos:

- La suma algebraica de los flujos en cualquier punto dentro de la red es cero.
- La suma algebraica de las pérdidas de energía alrededor de un circuito es cero.

Estas dos leyes deben cumplirse independientemente del tipo de análisis. Para restringir el modelo al estado estable, es necesario que la suma algebraica de los flujos que entran y salen de la red sea cero.

Existen tres tipos de modelos que describen el proceso: el primero plantea y resuelve el balance de energía en cada lazo, suponiendo el cumplimiento del balance de masa, y se conoce

como *modelo de balance de lazos o sistema de ecuaciones ΔQ* ; el segundo plantea y resuelve el balance de materia en los nodos, supone el cumplimiento del balance de energía, y recibe el nombre de *modelo de balance de nodos o sistema de ecuaciones H* ; finalmente, si se plantean y resuelven simultáneamente los dos tipos de ecuaciones se tiene el *sistema de ecuaciones Q* .

Los métodos de solución de estos modelos han ido evolucionando en forma paralela con el desarrollo de los computadores. Los primeros métodos, dirigidos al cálculo manual de los sistemas de ecuaciones, fueron planteados por Hardy Cross en 1934 [14] y resuelven tanto el *balance de lazos* como el de *nodos*. De estos métodos, el de mayor uso es el de *balance de lazos*, porque para redes pequeñas, generalmente, el número de lazos es menor al número de nodos con energía desconocida, y por tanto, el esfuerzo de cálculo es menor, además de presentar menos problemas de convergencia. Los dos métodos requieren una suposición inicial: de energías, para el *balance de nodos*, y de flujos, para el *balance de lazos*, que deben cumplir el balance de energía y masa, respectivamente. Las ecuaciones se resuelven una por una, lo que incrementa el número de iteraciones.

En 1963, Lam y colaboradores [8], aplican por primera vez el método de Newton para la solución de este tipo de problemas, y desde ese momento se ha investigado ampliamente en el mejoramiento de las características de convergencia de este método, dependientes en un alto porcentaje de la diferencia entre la suposición inicial y la solución, al igual que en el método de Hardy Cross que es una simplificación de éste. Nuevamente, el modelo más usado es el de *balance de lazos*, por su eficiencia computacional y mejor convergencia.

En 1972, Wood y colaboradores [17] presentaron un método de solución que aplica la teoría de linealización de ecuaciones al *modelo Q* , desarrollado para redes compuestas

* Magister en ingeniería química, Universidad Nacional de Colombia.

** Magister en ingeniería civil. Profesor del Departamento de Ingeniería Civil de la Universidad Nacional de Colombia.

*** Ingeniero Químico. Profesor del Departamento de Ingeniería Química de la Universidad Nacional de Colombia.

exclusivamente por tramos de tubería y sin la inclusión de nodos con energía conocida, obteniendo una sorprendente disminución en el número de iteraciones. Posteriormente, el método fue extendido a redes que incluyen bombas y tanques de almacenamiento, logrando mantener las características de convergencia del método original.

Este trabajo analiza la aplicación del método de linealización al *balance de nodos*, presentada por primera vez por Isaacs y colaboradores en 1980 [5] para redes monótonas, y que ahora se extiende para que pueda aplicarse a redes que contienen bombas, equipos de proceso y válvulas de control, boquillas de aspersión y accesorios.

I. DESARROLLO DEL MODELO Y DEL MÉTODO DE SOLUCIÓN

A. SISTEMA DE ECUACIONES

El modelo de *balance de nodos* plantea y resuelve simultáneamente la ecuación de balance de masa para cada uno de los nodos de energía desconocida de la red, con lo cual se obtiene un sistema de n_2 ecuaciones con m incógnitas, que corresponden a los caudales por cada elemento (se habla de caudales y no de flujos másicos, ya que una de las restricciones del modelo que se plantea, la isothermicidad, lo permite). En los nodos de energía desconocida deben conocerse los flujos externos o cargas, con el fin de no violar los grados de libertad del sistema. Matemáticamente la ecuación de continuidad se expresa como:

$$\sum_{j \in i} Q_{ij} + L_i = 0 \quad (1)$$

Donde Q_{ij} representa el caudal por el elemento limitado por los nodos i y j , y L_i el flujo externo en el nodo i . Se considera que los flujos que entran en el nodo son negativos y los que salen positivos.

Si se aplica la ecuación de energía mecánica entre los extremos de un elemento, se obtiene una expresión, la ecuación general de flujo, para calcular el caudal en función de las energías desconocidas. Esta ecuación, cuya forma general se muestra en la ecuación (2), se reemplaza en la ecuación 1 para obtener el sistema de ecuaciones $n_2 \times n_2$ que debe resolverse.

$$Q_{ij} = a \times (H_i - H_j)^b \quad (2)$$

Donde a y b son constantes que dependen de la ecuación que se use para el cálculo de las pérdidas por fricción, y H_{ij} es la energía piezométrica en un punto de la red.

B. ECUACIÓN GENERAL DE FLUJO

La ecuación general de flujo es una ecuación que representa matemáticamente la funcionalidad existente entre el caudal y la energía en un elemento, y es el resultado de plantear la ecuación de Bernoulli entre los dos extremos de éste. El elemento que se considera para la deducción de la ecuación contiene cualquier número finito de accesorios del tipo disponible comercialmente, bombas, equipos de proceso, válvulas de control y boquillas de aspersión.

Las pérdidas por fricción se calculan mediante la ecuación de Darcy Weisbach, que no tiene restricciones respecto al tipo de fluido, material y rugosidad de la tubería, y temperatura de operación.

$$H_i - H_j = \frac{8 \times f \times L}{\pi^2 \times g \times D^5} \times Q^2 \quad (3)$$

El factor de fricción de Darcy se calcula haciendo uso de la ecuación de Chen [3], válida para el régimen laminar, turbulento y de transición, y con la ventaja, si se compara con la ecuación de Colebrook, de ser explícita.

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left[\frac{\epsilon}{3,7065D} - \frac{5,0452}{Re} \log \left(\frac{1}{2,8257} \left(\frac{\epsilon}{D} \right)^{1,1098} + \frac{5,8506}{Re^{0,8981}} \right) \right] \quad (4)$$

Las pérdidas menores se calculan por el método de *dos constantes* [4], que tiene en cuenta la variación de este tipo de pérdidas con el régimen de flujo y el diámetro del accesorio, mediante las constantes K_1 y K_∞ , factores para los accesorios operando a números de Reynolds de 1 e infinito, respectivamente.

$$K = \frac{K_1}{N_{Re}} + K_\infty \times \left(1 + \frac{1}{D} \right) \quad (5)$$

Esta variación se desprecia cuando se aplica el modelo de una constante o el de longitud equivalente.

Para introducir las bombas centrífugas en el modelo es necesario conocer tres o más puntos de su curva característica. Se ajusta un polinomio de segundo orden y se hace el cambio de variable, propuesto por Jeppson y colaboradores [6], con lo cual se logra una convergencia acelerada en el cálculo de los flujos en cada elemento de la red. A continuación se presenta el polinomio y el cambio de variable propuesto:

$$H_b = AQ^2 + BQ + H_0 \quad (6)$$

$$G = Q + \frac{B}{2A} \tag{7}$$

Donde H_b es la cabeza dinámica de la bomba y G es una variable que se crea para realizar el cambio propuesto.

Al remplazar la ecuación (7) en la (6), se obtiene la ecuación que representa el comportamiento de una bomba centrífuga:

$$H_b = AG^2 + H_0^* \tag{8}$$

Donde :

$$H_0^* = H_0 - \frac{B^2}{4A} \tag{9}$$

Para las bombas de desplazamiento positivo, sólo es necesario conocer el valor de la constante H_0 .

Para introducir una válvula de control en el modelo, no se tiene en cuenta el comportamiento dinámico del sistema, ya que implicaría el conocimiento del esquema de control del mismo, es decir, conocer la ganancia de cada una de los elementos del lazo y del sistema por controlar, lo cual está fuera del alcance de este trabajo. Se considera, entonces, un elemento que opone una resistencia que depende del porcentaje de desplazamiento del vástago y que está representada matemáticamente por el coeficiente de dimensionamiento de la válvula, C_v .

Con esta consideración es necesario introducirle el coeficiente C_v , al porcentaje de apertura con que se desee operar la válvula y analizar así las diferencias en el comportamiento del sistema, para concluir acerca de la conveniencia o no de usar determinado tipo de válvula (característica y tamaño) dentro de la red. La ecuación de flujo para la válvula incluye una constante S que permite el uso del coeficiente C_v , tabulado en GPM/psi^{0.5}, en la expresión para el sistema métrico:

$$H_v = S \times \frac{Q^2}{C_v^2} \tag{10}$$

Esta misma ecuación permite simular el comportamiento de las boquillas de aspersión, con la diferencia de que la información disponible para las boquillas de aspersión relaciona directamente el flujo con la presión y no el coeficiente C_v con el desplazamiento del vástago.

Las pérdidas de energía en equipos de proceso, como intercambiadores de calor, filtros, separadores, torres, etcétera, se consideran independientes del flujo, y se introducen como una constante h_e .

Teniendo en cuenta lo anterior, la ecuación general de flujo es:

$$H_i - H_j + AG^2 + H_0^* = \left[\frac{8}{\pi^2 g D^4} \left(\frac{fL}{D} + \sum K_{acc} \right) + \frac{S}{C_v^2} \right] Q^2 + h_e \tag{11}$$

C. MÉTODO DE SOLUCIÓN

El método de solución propuesto para el sistema de ecuaciones es el método de linealización, que mediante la reorganización de los términos transforma la ecuación (11), en una ecuación lineal, que al remplazarse en el sistema que resulta al plantear el balance de lazos de la red, ecuación (1), genera un sistema de ecuaciones lineales que puede resolverse por cualquiera de los métodos disponibles para tal fin. En este caso, teniendo en cuenta que la matriz que resulta siempre tiene valores diferentes de cero en la diagonal, se elige el método de Gauss-Jordan.

La ecuación linealizada es:

$$Q = \frac{H_i - H_j + A|G^{k-1}|G + (h_e - H_0^*)}{\frac{8|Q^{k-1}|}{\pi^2 g D^4} \left(\frac{fL}{D} + K \right) + \frac{S|Q^{k-1}|}{C_v^2}} \tag{12}$$

II. PRUEBA DEL MODELO Y DEL MÉTODO DE SOLUCIÓN

El modelo y el método propuestos fueron probados para la red que se muestra en la figura 1, que se resolvió haciendo uso de la hoja de cálculo Excel y de un programa desarrollado en BORLAND C++.

Los datos para cada uno de los elementos se presentan en el cuadro 1. En el cuadro2 se muestran tres puntos de la curva característica de cada una de las bombas.

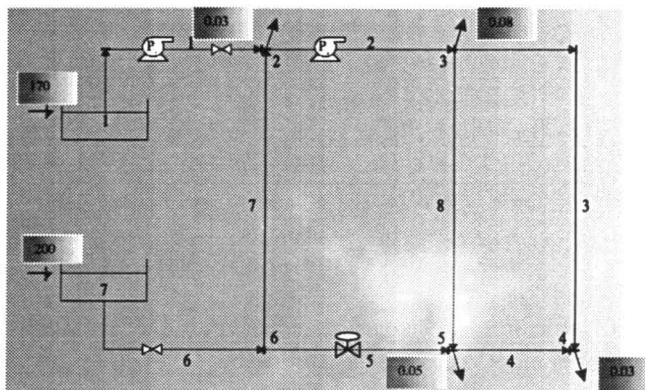


Figura 1. Red para la prueba del modelo de balance de nodos aplicando el método lineal. Los flujos externos están en m³/s y las energías en los tanques en mca.

Cuadro 1. Datos para los elementos de la red mostrada en la figura 1.

Elemento	Longitud (m)	Diámetro (m)	Accesorios y/o bombas	Rugosidad (m*10 ⁶)
1	300	0,25	Globo y bomba 1	2,1
2	500	0,20	bomba 2	2,1
3	600	0,20	-	2,1
4	500	0,20	-	2,1
5	500	0,20	Válvula de control	2,1
6	300	0,25	Globo	2,1
7	300	0,20	-	2,1
8	300	0,20	-	2,1

Cuadro 2. Datos de las curvas características de las bombas

Bomba	Q(m ³ /s)	H _b (m)	Q(m ³ /s)	H _b (m)	Q(m ³ /s)	H _b (m)
1	0,025	12	0,040	10,5	0,055	8
2	0,050	4	0,050	3,8	0,12	3,5

Donde H_b es la cabeza dinámica de la bomba. El fluido que se va a manejar es agua con una densidad de 1.000 kg/m³ y una viscosidad de 1*10⁻³ kg/(m*s). En las figuras 2 y 3 se presentan las características de las bombas y los polinomios correspondientes. Los polinomios que ajustan los puntos de las curvas características de las bombas se obtuvieron aplicando el método de mínimos cuadrados.

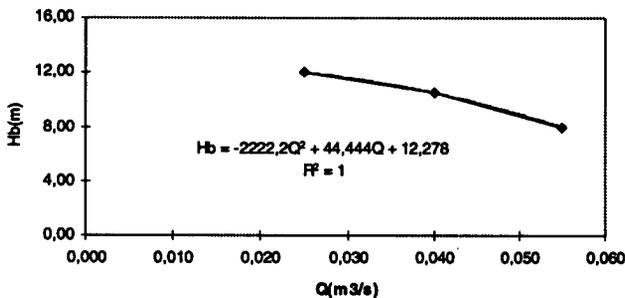


Figura 2. Curva Característica de la Bomba 1

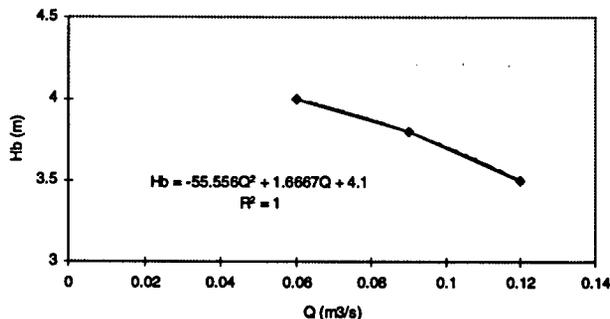


Figura 3. Curva Característica de la Bomba 2

El siguiente es el sistema de ecuaciones que resulta de plantear el modelo de balance de nodos:

$$\begin{array}{rccccccc}
 \text{Nodo 2} & -Q_1 & +Q_2 & & & -Q_7 & & =-0,03 \\
 \text{Nodo 3} & & -Q_2 & +Q_3 & & & & +Q_8 =-0,08 \\
 \text{Nodo 4} & & & -Q_3 & -Q_4 & & & =-0,03 \\
 \text{Nodo 5} & & & & -Q_4 & -Q_5 & & -Q_6 =-0,05 \\
 \text{Nodo 6} & & & & & -Q_5 & -Q_6 & +Q_7 =0
 \end{array} \quad (13)$$

El número de ecuaciones que debe plantearse para aplicar el modelo Q es mayor a éste, ya que, además de las anteriores, requiere el planteamiento de las siguientes ecuaciones de balance de lazo:

$$\begin{array}{rccccccc}
 \text{Lazo 1} & a_1 Q_1^b & & & -a_6 Q_6^b & -a_7 Q_7^b & & =-30 \\
 \text{Lazo 2} & & a_2 Q_2^b & & & -a_7 Q_7^b & +a_8 Q_8^b & =0 \\
 \text{Lazo 3} & & & a_3 Q_3^b & -a_4 Q_4^b & & & -a_5 Q_5^b =0
 \end{array} \quad (14)$$

El modelo de balance de lazos resuelve este sistema, ecuación (14), pero para que pueda resolverse se reemplaza el caudal por:

$$Q = Q^0 + \Delta Q \quad (15)$$

En general, si una red está compuesta por n nodos, n con energía desconocida y n_1 con energía conocida, l lazos² y m elementos de tubería, que pueden contener bombas, válvulas de control, accesorios y equipos, se cumple que:

$$m = (n_1 - 1) + n_2 + l \quad (16)$$

De la ecuación (16) y del conjunto de ecuaciones que se plantea en cada modelo, puede observarse que el modelo Q, donde las incógnitas del sistema son los flujos en cada elemento, resuelve m ecuaciones simultáneas; el balance de lazos, cuyas variables desconocidas explícitas son hipotéticas, sin significado físico y llamadas flujos de lazo, resuelve $(n_1 - 1) + l$ ecuaciones simultáneas; el balance de nodos, que calcula directamente el valor de la energía en cada nodo, resuelve n_2 ecuaciones simultáneas. No existe una diferencia clara respecto al número de ecuaciones que deben resolverse entre los modelos de balance de nodos y de lazos [15], pero claramente, el número de ecuaciones del modelo Q es mayor que en los otros dos. Por otra parte, mientras el balance de nodos y el modelo Q resuelven directamente las variables de interés, energías y flujos, el balance de lazos trabaja sobre una variable hipotética que no tiene significado físico y que debe transformarse en las variables de interés, lo que implica un trabajo adicional significativo de programación.

También, la descripción topológica de la red es mucho más sencilla en el balance de nodos, porque no es necesario un algoritmo que identifique lazos y elementos comunes a estos y cree los seudolazos requeridos para tener en cuenta los nodos de energía conocida en los modelos de balance de lazos y ecuaciones Q.

Para resolver el modelo se reemplaza en el sistema de ecuaciones (13), el caudal de cada uno de los elementos por la expresión de la ecuación (12), generando un nuevo sistema lineal de ecuaciones. Dada la necesidad de conocer el factor de fricción, que es una función del caudal, se hace necesaria una suposición inicial. Para este modelo, puede asignarse un valor de uno tanto al caudal, como a la variable G.

Esto constituye una ventaja clara respecto a los demás métodos de solución, ya que los métodos de Hardy Cross y de Newton, aplicados al balance de lazos o de nodos, al trabajar con sistemas no lineales, requieren una suposición inicial que debe cumplir la ecuación de continuidad en cada nodo o la ecuación de conservación de la energía alrededor de cada lazo, respectivamente, y que además debe ser cercana a la solución final para asegurar la convergencia del método.

Por este mismo hecho, el método de linealización presenta ventajas respecto al método de Newton, ya que se elimina la necesidad de calcular las derivadas parciales que conforman el jacobiano, lo que implica simplificar las labores de cálculo y programación, con lo que se produce una reducción del tiempo necesario para resolver el problema.

Las energías calculadas en la primera iteración se utilizan para establecer los nuevos caudales, con los que se determina el factor de fricción, para luego resolver el nuevo sistema de ecuaciones y obtener un nuevo conjunto de energías.

Con el fin de mejorar la convergencia del método y disminuir el número de iteraciones necesarias para obtener la solución del problema, el caudal que se calcula en cada iteración se promedia de la siguiente forma:

$$Q_{prom}^{k+1} = \frac{Q^k + Q^{k-1}}{2} \quad (17)$$

A continuación se presentan los resultados obtenidos al aplicar el método al modelo. En el anexo se muestran los cálculos necesarios para la solución del problema, iteración por iteración, en el orden en que deben realizarse de acuerdo con el modelo propuesto.

Cuadro 3. Resultados obtenidos para la red de prueba, aplicando el método lineal para balance de nodos

Elemento	Caudal (m ³ /s)	Nodo	Energía (mca)
1	0,0651	2	172,385
2	0,1034	3	158,478
3	0,0371	4	155,220
4	0,0429	5	158,748
5	0,1066	6	177,331
6	0,1749	Otras	
7	0,0684	Iteraciones	
8	-0,0137	5	
		Criterio de convergencia	
		$2,38 \times 10^{-5}$	

El criterio de convergencia que se usó para decidir que ya se había llegado a la solución fue:

$$\left| \frac{Q^k - Q^{k-1}}{Q^k} \right| \leq 0,000025 \quad (18)$$

En 1981, Wood y colaboradores [16] realizaron un trabajo en el que comparan los diferentes métodos, concluyendo que los mejores, en su orden, son: el modelo Q que aplica la teoría

de linealización y el balance de lazos que se combina con el método de Newton. El método de linealización converge en todos los casos en seis iteraciones y, a diferencia del método de Newton, no requiere suposición inicial. Esta conclusión es ratificada por Altman y colaboradores en 1995 [1].

El criterio definido en la ecuación (18) se considera uno de los más exigentes para este tipo de problemas, y es 200 veces menor al que usó Wood en su trabajo de valoración de los diferentes métodos. La figura 4 muestra el comportamiento del valor de la energía en cada iteración y permite ver la bondad del método en este aspecto.

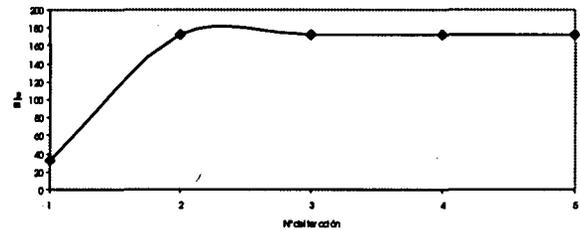


Figura 4. Comportamiento de la Energía en el nodo 2 en función de la iteración

De acuerdo con los resultados aquí registrados, y las pruebas realizadas por el autor con otras redes [11], permiten creer con gran certeza que las ventajas expuestas por Wood [16,17] para el método de linealización aplicado al modelo Q se conservan en éste, con la ventaja de tener un menor número de ecuaciones y una topología más simple, que no requiere la identificación de los lazos y/o seudolazos de la red. El lector podrá comprobar que se cumple la ecuación de balance de masa en los nodos y de energía alrededor de los lazos y seudolazos de la red.

CONCLUSIONES

De acuerdo con el resultado anterior, y con los informados por el autor en la referencia 11, el método de linealización de ecuaciones aplicado al balance de nodos es una herramienta poderosa para el análisis de redes hidráulicas, ya que a diferencia del método de Newton para balance de lazos, no requiere un estimativo inicial de flujos que cumpla el balance de materia, elimina el cálculo y la solución del jacobiano, la convergencia no depende de la diferencia de esta suposición respecto a la solución final y trabaja directamente con las variables reales. Comparándolo con el método de linealización de ecuaciones aplicado al modelo Q, su topología es más simple, pues no requiere el planteamiento simultáneo de los balances de nodos y de lazos, lo cual aplica también para el balance de lazos, y, por tanto, no es necesaria su identificación. Además, conserva las ventajas de este método en lo referente a la rápida convergencia.

NOMENCLATURA

A : constante del término cuadrático de la ecuación característica de la bomba.

B : constante del término lineal de la ecuación característica de la bomba.

C_v : coeficiente de dimensionamiento de las válvulas de control.

D : diámetro interno de las tuberías.

f : factor de fricción de Darcy.

G : variable para remplazar el caudal en la ecuación característica de la bomba.

H : energía piezométrica.

H_b : cabeza dinámica de la bomba.

H_o : término independiente en la ecuación característica de la bomba.

H_o' : término independiente en la ecuación característica de la bomba.

H_v : pérdidas de energía en una válvula de control.

K : constante de pérdidas menores.

K₁ : constante de pérdidas menores a Reynolds 1.

K_∞ : constante de pérdidas menores a Reynolds infinito.

L : longitud o flujo externo en los nodos de la red.

Q : flujo volumétrico.

S : constante para conversión de unidades en la ecuación de dimensionamiento de las válvulas de control.

a : constante de la ecuación general de flujo, que reúne todos los parámetros.

b : exponente de la ecuación general de flujo

i, j : identificador de nodos o elementos.

k : número de la iteración.

10. LOVETT, O. P. "Control valves". *Chemical Engineering / Deskbook Issue*, October 11, 1971, pp. 129-133.
11. NARVÁEZ, P.C. *Prototipo de software para el dimensionamiento de redes de flujo a presión*. Tesis de maestría en ingeniería química, Universidad Nacional de Colombia, Santa Fe de Bogotá. 1998.
12. NIÑO, S. *Instrumentación y control de procesos*. I Congreso de la Asociación Colombiana de Automática, Cali. 1994.
13. OSIADACZ, A. J., *Simulation and Analysis of Gas Network*. Gulf Publishing Company, Houston, Texas. 1987.
14. SCHROEDER, D. "Steady state assumption: what it means and how it works". *Pipe Line Industry*, March 1992, pp. 79-84.
15. WALSKI, T., et al. *Water Distribution Systems: Simulation and Sizing*. Lewis Publishers, Chelsea, 1990.
16. WOOD, D. J., et al. "Reliability of algorithms for pipe network analysis". *Journal of the Hydraulics Division*. Vol 107, No. HY 10, October 1981, pp.1145-1161.
17. _____ "Hydraulic network analysis using linear theory". *Journal of the Hydraulics Division*. Vol. 98, No. HY 7, July 1972, pp. 1157-1170.

BIBLIOGRAFÍA

1. ALTMAN, T., et al. "Solving flow constrained networks: inverse problem". *Journal of the Hydraulic Engineering*. Vol. 121, No. HY 5, May 1995, pp. 427-431.
2. BERGHOUT, B. "Network linear programming as pipe network hydraulic analysis tool". *Journal of Hydraulic Engineering*. Vol. 123, No. HY 6, June 1997, pp. 549-558.
3. CHEN, N.I. "An explicit equation for friction factor in pipe". *Industrial Engineering and Chemical Fundamentals*. Vol. 18, No. 3, 1979, pp. 296-297.
4. HOOPER, W., "The two K method predicted head loss in pipe fittings". *Chemical Engineering*. August 24, 1981, pp. 96-100.
5. ISAACS, L., et al. "Linear theory methods for pipe network analysis". *Journal of the Hydraulics Division*. Vol. 106, No. HY 7, July 1980, pp. 1191-1201.
6. JEPSON, R. W., et al. "Pumps and reservoirs in networks by linear theory". *Journal of the Hydraulics Division*. Vol. 101, No. HY 3, March 1975, pp. 576-580.
7. _____, et al. "Pressure reducing valve in pipe network analyses". *Journal of the Hydraulics Division*. Vol. 102, No. HY 7, July 1976, pp. 987-1001.
8. LAM, C., et al. "Computer analysis of water distribution systems: part 1- formulation of equations". *Journal of the Hydraulics Division*. Vol. 98, HY 2, February 1972, pp. 335-344.
9. _____ "Computer analysis of water distribution systems: part 2- formulation of equations". *Journal of the Hydraulics Division*. Vol. 98, HY 3, March 1972, pp. 447-460.

Anexo 1

A continuación se presenta la solución del problema planteado en el artículo mostrando las variables en el orden en que fueron calculadas, e iteración por iteración. El número de Reynolds es necesario para calcular el factor de fricción, requerido para calcular el valor de los términos que acompañan a las energías piezométricas y las variables G, dentro del sistema de ecuaciones mostrado en la ecuación 13. Las energías calculadas son el resultado de la solución de este sistema, y con ellas se calculan los nuevos caudales, usando la ecuación 12. A partir de la segunda iteración se usa el caudal promedio para calcular el número de Reynolds y el factor de fricción. Nótese que a partir de esa iteración se verifica el valor del criterio de convergencia, calculado por medio de la ecuación 18.

Cálculo inicial

Elemento	Caudal inicial (m ³ /s)	Número de Reynolds	Factor de fricción	Nodos	Energía calculada (m)	Elemento	Caudal calculado (m ³ /s)
1	1	5092958	0,0095	1	170,000	1	0,0594
2	1	6366198	0,0094	2	32,585	2	0,0917
3	1	6366198	0,0094	3	-79,031	3	0,0314
4	1	6366198	0,0094	4	-124,873	4	0,0486
5	1	6366198	0,0094	5	-65,817	5	0,1183
6	1	5092958	0,0095	6	78,017	6	0,1806
7	1	6366198	0,0094	7	200,000	7	0,0623
8	1	6366198	0,0086	G ₁	0,049	8	-0,0197
G ₁ inicial	1	G ₂ inicial		G ₂	0,077	Sumatoria	0,5725

Iteración 1

Elemento	Caudal (m ³ /s)	Número de Reynolds	Factor de fricción	Nodos	Energía calculada (m)	Elemento	Caudal calculado (m ³ /s)	Caudal promedio (m ³ /s)	G promedio (m ³ /s)
1	0,0594	302550	0,0145	1	170,000	1	0,0705	0,0650	0,0550
2	0,0917	583709	0,0130	2	172,491	2	0,1133	0,1025	0,0875
3	0,0314	200046	0,0157	3	158,752	3	0,0421	0,0367	
4	0,0486	309250	0,0145	4	155,525	4	0,0379	0,0433	
5	0,1183	753193	0,0124	5	158,981	5	0,0967	0,1075	
6	0,1806	919760	0,0120	6	177,373	6	0,1695	0,1750	
7	0,0623	396507	0,0139	7	200,000	7	0,0728	0,0676	
8	-0,0197	125633	0,0172	G ₁	0,061	8	-0,0087	-0,0142	
G ₁	0,0550	G ₂	0,0875	G ₂	0,098	Sumatorias	0,5941	0,5833	

Iteración 2

Elemento	Caudal (m ³ /s)	Número de Reynolds	Factor de fricción	Nodos	Energía calculada (m)	Elemento	Caudal calculado (m ³ /s)	Caudal promedio (m ³ /s)	G promedio (m ³ /s)	Criterio de convergencia
1	0,0650	330811	0,0143	1	170,000	1	0,0652	0,0651	0,0551	4,14x10 ⁻³
2	0,1025	652635	0,0127	2	172,386	2	0,1042	0,1033	0,0883	
3	0,0367	233914	0,0153	3	158,480	3	0,0374	0,0371		
4	0,0433	275382	0,0148	4	155,222	4	0,0426	0,0429		
5	0,1075	684266	0,0126	5	158,749	5	0,1058	0,1067		
6	0,1750	891499	0,0121	6	177,331	6	0,1748	0,1749		
7	0,0676	430107	0,0137	7	200,000	7	0,0690	0,0683		
8	-0,0142	90574	0,0184	G ₁	0,055	8	-0,0133	-0,0137		
G ₁	0,0551	G ₂	0,0883	G ₂	0,089	Sumatorias	0,5858	0,5845		

Iteración 3

Elemento	Caudal (m ³ /s)	Número de Reynolds	Factor de fricción	Nodos	Energía calculada (m)	Elemento	Caudal calculado (m ³ /s)	Caudal promedio (m ³ /s)	G promedio (m ³ /s)	Criterio de convergencia
1	0,0651	331362	0,0143	1	170,000	1	0,0651	0,0651	0,0551	3,52x10 ⁻⁴
2	0,1033	657926	0,0127	2	172,385	2	0,1035	0,1034	0,0884	
3	0,0371	236094	0,0153	3	158,478	3	0,0371	0,0371		
4	0,0429	273202	0,0148	4	155,220	4	0,0429	0,0429		
5	0,1067	678976	0,0127	5	158,748	5	0,1065	0,1066		
6	0,1749	890948	0,0121	6	177,331	6	0,1749	0,1749		
7	0,0683	434709	0,0137	7	200,000	7	0,0684	0,0683		
8	-0,0137	87464	0,0185	G ₁	0,055	8	-0,0137	-0,0137		
G ₁	0,0551	G ₂	0,0884	G ₂	0,088	Sumatorias	0,5848	0,5846		

Iteración 4

Elemento	Caudal (m ³ /s)	Número de Reynolds	Factor de fricción	Nodos	Energía calculada (m)	Elemento	Caudal calculado (m ³ /s)	Caudal promedio (m ³ /s)	G promedio (m ³ /s)	Criterio de convergencia
1	0,0651	331379	0,0143	1	170,000	1	0,0651	0,0651	0,0551	2,92x10 ⁻⁵
2	0,1034	658357	0,0127	2	172,385	2	0,1034	0,1034	0,0884	
3	0,0371	236281	0,0153	3	158,478	3	0,0371	0,0371		
4	0,0429	273015	0,0148	4	155,220	4	0,0429	0,0429		
5	0,1066	678544	0,0127	5	158,748	5	0,1066	0,1066		
6	0,1749	890931	0,0121	6	177,331	6	0,1749	0,1749		
7	0,0683	435120	0,0137	7	200,000	7	0,0684	0,0684		
8	-0,0137	87220	0,0185	G ₁	0,055	8	-0,0137	-0,0137		
G ₁	0,0551	G ₂	0,0884	G ₂	0,088	Sumatorias	0,5847	0,5847		

Iteración 5

Elemento	Caudal (m ³ /s)	Número de Reynolds	Factor de fricción	Nodos	Energía calculada (m)	Elemento	Caudal calculado (m ³ /s)	Caudal promedio (m ³ /s)	G promedio (m ³ /s)	Criterio de convergencia
1	0,0651	331379	0,0143	1	170,000	1	0,0651	0,0651	0,0551	2,38x10 ⁻⁵
2	0,1034	658357	0,0127	2	172,385	2	0,1034	0,1034	0,0884	
3	0,0371	236281	0,0153	3	158,478	3	0,0371	0,0371		
4	0,0429	273015	0,0148	4	155,220	4	0,0429	0,0429		
5	0,1066	678544	0,0127	5	158,748	5	0,1066	0,1066		
6	0,1749	890931	0,0121	6	177,331	6	0,1749	0,1749		
7	0,0683	435120	0,0137	7	200,000	7	0,0684	0,0684		
8	-0,0137	87220	0,0185	G ₁	0,055	8	-0,0137	-0,0137		
G ₁	0,0551	G ₂	0,0884	G ₂	0,088	Sumatorias	0,5847	0,5847		