MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
29, 1, 1991

METODY LINEARYZACJI STOCHASTYCZNEJ
(Przegląd nowych prac)[1]

LESŁAW SOCHA

Politechnika Śląska, Katowice

W artykule dokonano przeglądu nowych prac dziedziny linearyzacji stochastycznej i omówiono szczegółowo najważniejsze z nich. W szczególności omówiono metody równoważnej i statystycznej linearyzacji jak również problem wyznaczania równań momentów i rozwiązań stacjonarnych. Zamieszczono ilustrujące przykłady.

Wstęp

Podobnie jak w analizie układów deterministycznych jednym z podstawowych narzędzi badań stochastycznych nieliniowych układów dynamicznych jest metoda linearyzacji. Najogólniej mówiąc, sprowadza się ona do znalezienia pewnego układu liniowego, który jest równoważny "w pewnym sensie" analizowanemu układowi nieliniowemu. Do oceny tej równoważności wykorzystuje się różne kryteria. W literaturze istnieje kilka różnych opracowanych metod. Najbardziej znane są dwie spośród nich, pierwsza zwana metodą równoważnej linearyzacji została opracowana przez Caughey'ego [27] w 1953 roku, a druga nazwana metodą linearyzacji statystycznej podana została niezależnie przez Booton'a [15] w 1953 roku i Kazakowa [51] w roku 1954. Metody te są podobne, tym niemniej pierwsza z nich z uwagi na swą specyfikę bardziej nadaje się do analizy układów oscylacyjnych występujących np. w dynamice maszyn, podczas gdy druga jest wygodniejsza w analizie układów automatyki, jakkolwiek można ją stosować również w dynamice maszyn. W następnych latach nastąpił silny rozwój prac nad teorią i zastosowaniami obu metod, zarówno w ZSRR – Kazakow [51]–[57], Perwozwanski [77],[78],

[1]Praca ta powstała w ramach realizacji tematu 03.23. w CPBP 02.19

E.P.Popow [81],[82], Pupkow [86],[87], Piatnicki [79], Morosonow [72] jak i w literaturze anglosaskiej – Booton [16], Caughey [26]–[28], Foster [39], Sawaragi, N.Sugai i Sunahara [94], Alexlby [8], Crandall [33]. Dalszy rozwój metod linearyzacji spowodował konieczność ich uporządkowania i umieszczenia w grupie innych pojawiających się prac z zakresu przybliżonych metod analizy stochastycznych układów dynamicznych. Ukazało się wiele monografii, w których metody linearyzacji zostały szczegółowo omówione m.in. Pugaczow [84], Soong [97], Ahlbehrendt i Kempe [1], Kazakow [57], Lin [62], Nigam [75], Piszczek [80], Roberts i Spanos [92]. Dalszy stały rozwój prac z tego zakresu powoduje powstanie artykułów przeglądowych Caughey [29], Sinicin [95], Roberts [88]–[91], Crandall [35], Crandall i Z.Q.Zhu [34], Friedrich [41], Spanos [99], Spanos i Lutes [100], To [101] -[103], Monahar i Iyengar [69], gdzie podobnie jak we wspomnianych monografiach omówiono metody linearyzacji.

Celem niniejszego artykułu jest przegląd nowych prac z metod linearyzacji, gdy zakłócenia są ciągłymi procesami gaussowskimi oraz propozycje kilku uogólnień istniejących metod. Zamieszczono wiele przykładów ilustrujących omawiane metody, które mają charakter dydaktyczny. Z uwagi na obszerność problematyki nie omówiono prac, w których metodę linearyzacji wykorzystuje się jako narzędzie badawcze do analizy nieliniowych układów stochastycznych. Artykuł składa się z czterech punktów. W pierwszym omówiono metody równoważnej linearyzacji, w drugim metody statystycznej linearyzacji. Punkt trzeci poświęcony jest zagadnieniu wyznaczania równań momentów i ich rozwiązań, w szczególności wyznaczeniu momentów rozwiązań stacjonarnych. W punkcie czwartym omówiono metody linearyzacji dla układów z zakłóceniami multiplikatywnymi.

1. Metoda równoważnej linearyzacji

Metodę tę omówimy, korzystając z wyników Atalika i Utku [7], na przykładzie układu o wielu stopniach swobody opisanego wektorowym nieliniowym równaniem różniczkowym:

$$\boldsymbol{\Phi}(\ddot{\boldsymbol{x}}, \dot{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(t), \tag{1.1}$$

gdzie:

$\boldsymbol{x}$ jest n–wymiarowym wektorem przemieszczeń,

$\boldsymbol{\Phi} = [\varphi_1, ..., \varphi_n]^T$, φ_i są nieliniowymi nieparzystymi funkcjami swoich argumentów,

$\boldsymbol{f}(t) = [f_1(t), ..., f_n(t)]^T$, $f_i(t)$ są stacjonarnymi gaussowskimi procesami o wartości średniej równej zero, $i = 1, ..., n$.

Zakłada się, że równanie (1.1) posiada rozwiązanie stacjonarne.

Przyjmuje się, że rozwiązanie aproksymujące (1.1) jest postaci:

$$\mathbf{M}\ddot{\boldsymbol{x}} + \mathbf{C}\dot{\boldsymbol{x}} + \mathbf{K}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{f}(t), \tag{1.2}$$

gdzie macierze $\mathbf{M}, \mathbf{C}, \mathbf{K}$ z uwagi na dynamiczny charakter zastosowań nazwane macierzami mas, tłumienia i sprężystości zostaną wyznaczone po zastosowaniu metody linearyzacji.

Jako miarę błędu aproksymacji przyjmuje się:

$$\boldsymbol{e} = \boldsymbol{\Phi}(\ddot{\boldsymbol{x}}, \dot{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{x}) - \mathbf{M}\ddot{\boldsymbol{x}} - \mathbf{C}\dot{\boldsymbol{x}} - \mathbf{K}\boldsymbol{x}. \tag{1.3}$$

Z uwagi na fakt, że $\boldsymbol{e}$ jest w dalszym ciągu wektorowym procesem stochastycznym, i równocześnie funkcją zmiennych ($\ddot{\boldsymbol{x}}$, $\dot{\boldsymbol{x}}$, $\boldsymbol{x}$) to jako kryterium oceny aproksymacji można przyjąć:

$$E[\boldsymbol{e}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{e}] \rightarrow \min, \tag{1.4}$$

gdzie $E[.]$ oznacza wartość oczekiwaną.

Warunkami koniecznymi spełnienia (1.4) jest:

$$\frac{\partial}{\partial m_{ij}} E[\boldsymbol{e}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{e}] = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial c_{ij}} E[\boldsymbol{e}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{e}] = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial k_{ij}} E[\boldsymbol{e}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{e}] = 0. \tag{1.5}$$

Podstawiając (1.3) do (1.5) i wykonując cząstkowe różniczkowanie otrzymamy:

$$E[\boldsymbol{z}\boldsymbol{z}^{\mathsf{T}}][\mathbf{M}, \mathbf{C}, \mathbf{K}]^{\mathsf{T}} = E[\boldsymbol{z}g^{\mathsf{T}}(\boldsymbol{z})], \tag{1.6}$$

gdzie:

$$\boldsymbol{z}^{\mathsf{T}} = [\ddot{\boldsymbol{x}}^{\mathsf{T}}, \dot{\boldsymbol{x}}^{\mathsf{T}}, \boldsymbol{x}^{\mathsf{T}}]. \tag{1.7}$$

Zauważmy, że operacja uśredniania w ogólnym przypadku jest względem miary generowanej przez rozwiązanie równania (1.1), która w ogólnym przypadku jest miarą niegaussowską. Atalik i Utku zakładają jednak gaussowskość wektora $\boldsymbol{z}$ i to pozwoliło im na otrzymanie rozwiązania równania (1.6) w postaci zamkniętej. Udowodnili oni następującą własność:

Lemat

Jeśli $g(\boldsymbol{y}) = g(y_1, ..., y_n)$ jest funkcją nieliniową dostatecznie gładką tzn. pierwsze pochodne ze względu na y_i $(i = 1, ..., n)$ istnieją, $\boldsymbol{y}$ jest wektorem gaussowskim o wartości średniej równej zero, a ponadto dla dowolnego $\boldsymbol{y} \in R^n$ i pewnej ustalonej liczby A spełniona jest nierówność:

$$g(\boldsymbol{y}) < A \exp\{\sum_{j=1}^{n} y_j^{\alpha}\}, \tag{1.8}$$

gdzie $\alpha < 2$,
wówczas zachodzi równość:

$$E[yg(y)] = E[yy^{\mathsf{T}}]E[\nabla g(y)], \tag{1.9}$$

gdzie ∇ jest operatorem nabla:

$$\nabla^{\mathsf{T}}(\cdot) = \left[\frac{\partial(\cdot)}{\partial y_1}, \frac{\partial(\cdot)}{\partial y_2}, ..., \frac{\partial(\cdot)}{\partial y_n}\right]. \tag{1.10}$$

Korzystając z cytowanego powyżej lematu można równanie (1.6) przedstawić w postaci:

$$E[zz^{\mathsf{T}}][\mathsf{M}, \mathsf{C}, \mathsf{K}] = E[zz^{\mathsf{T}}]\, E[\mathsf{J}(\frac{g(z)}{z})], \tag{1.11}$$

gdzie $\mathsf{J}(.)$ jest macierzą Jakobiego.

Z faktu, że z jest processem gaussowskim wynika, że $E[zz^{\mathsf{T}}]$ jest dodatnio określona. Stąd oraz z równania (1.11) wynika,że:

$$[\mathsf{M}, \mathsf{C}, \mathsf{K}] = E\Big[\mathsf{J}(\frac{g(z)}{z})\Big], \tag{1.12}$$

tzn:

$$[\mathsf{M}, \mathsf{C}, \mathsf{K}] = E\Big[\mathsf{J}(\frac{g}{\ddot{z}}), \mathsf{J}(\frac{g}{\dot{z}}), \mathsf{J}(\frac{g}{z})\Big]. \tag{1.13}$$

Rozpisując we współrzędnych:

$$m_{ij} = E\Big[\frac{\partial g_i(\ddot{x}, \dot{x}, x)}{\partial \ddot{x}_j}\Big], \quad c_{ij} = E\Big[\frac{\partial g_i(\ddot{x}, \dot{x}, x)}{\partial \dot{x}_j}\Big], \quad k_{ij} = E\Big[\frac{\partial g_i(\ddot{x}, \dot{x}, x)}{\partial x_j}\Big],$$
$$i, j = 1, ..., n. \tag{1.14}$$

Współczynniki te zależą z reguły w sposób nieliniowy od parametrów rozwiązania stacjonarnego układu zlinearyzowanego (1.2). To powoduje konieczność wprowadzenia procedury iteracyjnej dla rozwiązania problemu linearyzacji. Zagadnienie to omówimy w dalszej części artykułu. Podamy teraz dwa przykłady ilustrujące metodę równoważnej linearyzacji.

Przykład 1

Rozważmy równanie nieliniowe skalarne:

$$\dot{x} = -f(x) + \dot{\xi}(t), \tag{1.15}$$

gdzie:

$$f(x) = cx + Ax^3, \tag{1.16}$$

$\dot{\xi}(t)$ jest białym szumem o intensywnośći $\sqrt{q}$, c , A są stałymi parametrami.

Aproksymujący układ liniowy będzie następującej postaci:

$$\dot{x} = -kx + \dot{\xi}, \tag{1.17}$$

gdzie współczynnik linearyzacji k wyznacza się z warunku minimalizacji błędu średniokwadratowego:

$$\frac{\partial}{\partial k} E[(f(x) - kx)^2] = 0. \tag{1.18}$$

Otrzymuje się wówczas zależność:

$$k = \frac{E[f(x)x]}{E[x^2]}. \tag{1.19}$$

Z uwagi na fakt, że w przypadku stacjonarnym $E[x] = 0$ i założenie, że rozwiązanie $x(t)$ jest procesem gaussowskim zachodzi zależność:

$$E[x^4] = 3\, E[x^2]\,. \tag{1.20}$$

Po podstawieniu jej do (1.19) otrzymuje się:

$$k = c + 3AE[x^2]\,. \tag{1.21}$$

Podstawiając ponownie k określone przez (1.21) do równania (1.17) i wyznaczając wielkości $m = E[x]$ oraz $E[x^2]$ otrzymamy:

$$\frac{dm}{dt} = -\left[c + 3AE[x^2]\right] m, \tag{1.22}$$

$$\frac{d}{dt}(E[x^2] - m^2) = -2E\left[(x - m)(c + 3AE[x^2])x\right] + q. \tag{1.23}$$

Przyjmując oznaczenia:

$$y = AE[x^2], \qquad \varepsilon = \frac{qA}{2}, \tag{1.24}$$

otrzymamy zależność dla rozwiązania stacjonarnego:

$$3y^2 + cy - \varepsilon = 0, \tag{1.25}$$

$$y = \frac{-c + \sqrt{c^2 + 12\varepsilon}}{6}. \tag{1.26}$$

Przykład 2

Szczególnym przypadkiem równania (1.1) jest równanie Duffinga:

$$m\ddot{x} + 2h\dot{x} + f(x) = \dot{\xi}(t). \tag{1.27}$$

gdzie m, h są stałymi dodatnimi parametrami a $f(x)$ i $\dot{\xi}(t)$ mają tę samą postać co w przykładzie 1, tzn:

$$f(x) = cx + Ax^3. \tag{1.28}$$

Aproksymujący układ liniowy jest postaci:

$$m\ddot{x} + 2h\dot{x} + kx = \dot{\xi}(t). \tag{1.29}$$

Wówczas k wyraża się takim samym wzorem jak w poprzednim przykładzie tzn:

$$k = c + 3AE[x^2]. \tag{1.30}$$

Podstawiając ponownie k do równania (1.29) wyznaczamy wielkości $m = E[x]$ i $E[x^2]$ dla równania liniowego (1.29), w przypadku stacjonarnym:

$$E[x^2] = \frac{q}{2(2h)k} = \frac{q}{4h[c + 3AE[x^2]]}, \tag{1.31}$$

przyjmując oznaczenia:

$$\sigma_0^2 = \frac{q}{4hc}, \qquad y = AE[x^2], \tag{1.32}$$

i rozwiązując (1.31) otrzymamy:

$$y = \frac{-1 + \sqrt{1 + \frac{12}{c}\sigma_0^2 A}}{6} \qquad \text{dla } c \neq 0, \tag{1.33}$$

$$y = \sqrt{\frac{q}{12Ah}} \qquad \text{dla } c = 0. \tag{1.34}$$

W zdecydowanej większości prac uogólniających metodę równoważnej linearyzacji np.[46], jak i w przedstawionej metodzie Atalika i Utku [7] czyni się założenie, że operacja uśredniania we wzorach (1.4), (1.5), (1.6) jest względem miary gaussowskiej generowanej przez rozwiązanie stacjonarne równania (1.2). W rzeczywistości operacja uśredniania powinna być dokonywana względem miary generowanej przez rozwiązanie równania (1.1), która nie jest gaussowska. Dlatego Izumi Zaiming i Kimura [49] przedstawili pewną zmodyfikowaną wersję standardowej linearyzacji, gdzie przy uśrednianiu wprowadza się pewne funkcje wagowe. Z przykładów numerycznych podanych przez Atalika i Utku [7] dla układów o jednym stopniu swobody wynika, że błędy metody linearyzacji wynosiły kilkanaście procent, podczas gdy dla tych samych przykładów przy zastosowaniu metody Izumi Zaiming i Kimura [49] odpowiednie błędy były rzędu kilku procent. Beaman i Hedrick zaproponowali w pracy [13] uogólnienie metody linearyzacji przez założenie, że gęstość rozkładu, którą wykorzystujemy do uśredniania ma postać szeregu Grama-Charliera tzn:

$$g(x) = \sum_{j_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{j_n=0}^{\infty} c_{j_1 \dots j_n} \frac{\partial^{j_N} g_N}{\partial x_1^{j_1} \dots x_n^{j_n}}, \tag{1.35}$$

gdzie: $j_N = j_1 + ... + j_n$, $g_N(x)$ – jest n–wymiarowym rozkładem gaussowskim:

$$g_N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \det \mathbf{K}}} \exp\left\{\frac{1}{2}(x - E[x])^{\mathsf{T}} \mathbf{K}^{-1}(x - E[x])\right\}, \tag{1.36}$$

gdzie $\mathbf{K}$ jest macierzą kowariancji.

Współczynniki $c_{j_1...j_n}$ są funkcjami kumulantów $\lambda_{j_1...j_n}$:

$$c_{j_1...j_n} = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad j_N = 0 \\ 0 & \text{dla} \quad 0 < j_N < 3 \\ (-1)^{j_N} \frac{\lambda_{j_1...j_n}}{j_1...j_n} & \text{dla} \quad j_N \geq 3 \end{cases}. \tag{1.37}$$

Uwzględnienie w funkcji gęstości prawdopodobieństwa kumulantów wyższych rzędów powoduje konieczność wprowadzenia do analizy równań momentów wyższych rzędów w celu zamknięcia układu równań. Szczegółowo metodę tę przedstawimy na podstawie pracy Beamana i Hedricka [13] na przykładzie układu jednowymiarowego.

$$dx = -f(x)dt + \sqrt{q}d\xi, \tag{1.38}$$

gdzie $\xi(t)$ jest standardowym procesem Wienera.

Równania różniczkowe dla momentów centralnych mają postać:

$$\dot{m} = E[f(x)], \tag{1.39}$$

$$\dot{\mu}_2 = -2E[(x-m)f(x)] + q, \tag{1.40}$$

$$\dot{\mu}_3 = -3\Big[[(x-m)^2 f(x)] - \mu_2 E[f(x)]\Big], \tag{1.41}$$

$$\dot{\mu}_4 = -4\Big[E[(x-m)^3 f(x)] - \mu_3 E[f(x)]\Big] + 6\mu_2 q, \tag{1.42}$$

gdzie $m = E[x]$, μ_i są momentami centralnymi rzędu i, a operacja uśredniania jest przeprowadzana przy użyciu funkcji gęstości określonej wzorem (1.35) przy ograniczeniu do kumulanta 4 rzędu tzn:

$$g(x) = \left[1 - \frac{\mu_3}{3!}\frac{\partial^3}{\partial x^3} + \frac{\mu_4 - 3\mu_2^2}{4!}\frac{\partial^4}{\partial x^4}\right] g_N(x), \tag{1.43}$$

gdzie:

$$g_N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\mu_2}} \exp\left\{-\frac{(x-m)^2}{2\mu_2}\right\}. \tag{1.44}$$

Beaman i Hedrick wykorzystując własności rozkładu Gaussa i jego związek z wielomianami Hermite'a pokazali, że równania (1.39)–(1.42) przyjmą postać:

$$\dot{m} = -\left[1 + \frac{\mu_3}{3!}D^3 + \frac{\mu_4 - 3\mu_2^2}{4!}D^4\right] E[f(x)]_0, \tag{1.39'}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\mu}_2 &= -2\Big[\mu_2 D + \frac{\mu_3}{3!}(\mu_2 D^4 + 3D^2) + \\
&\quad \frac{\mu_4 - 3\mu_2^2}{4!}(\mu_2 D^5 + 4D^3)\Big] E[f(x)]_0 + q, \qquad (1.40') \\
\dot{\mu}_3 &= -3\Big[(\mu_2)^2 D^2 + \frac{\mu_3}{3!}((\mu_2)^2 D^5 + 6\mu_2 D^3 + 6D) + \\
&\quad + \frac{\mu_4 - 3(\mu_2)^2}{4!}((\mu_2)^2 D^6 + 8\mu_2 D^4 + 12D^2)\Big] E[f(x)]_0 \qquad (1.41') \\
\dot{\mu}_4 &= -4\Big[(\mu_2)^3 D^3 + 3(\mu_2)^2 D - \mu_3 + \frac{\mu_3}{3!}((\mu_2)^3 D^6 + 12(\mu_2)^2 D^4 + \\
&\quad +27\mu_2 D^2 + 6\mu_3 D^3) + \frac{\mu_4 - 3(\mu_2)^2}{4!}((\mu_2)^3 D^7 + 15(\mu_2)^2 D^5 + \\
&\quad +48\mu_2 D^3 + 24D - \mu_3 D^4)\Big] E[f(x)]_0 + 6\mu_2 q, \qquad (1.42')
\end{aligned}$$

gdzie:

$$D^k = \frac{\partial^k}{\partial m^k}, \qquad E[f(x)]_0 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) g_N(x) dx. \qquad (1.45)$$

Równania te przedstawiają różniczkowe zależności dla przybliżonych momentów centralnych rozwiązania równania (1.38). W celu wyznaczenia przybliżonych stacjonarnych statystyk (jeśli takie istnieją) należy przyrównać do zera lewe strony równań (1.39')-(1.42') i rozwiązać otrzymany nieliniowy układ równań algebraicznych.

Jako szczególny przypadek rozważmy układ z przykładu 1 dla $c = 1$ tzn:

$$f(x) = x + Ax^3 \qquad (1.46)$$

Wykorzystując wzory (1.39')-(1.42') otrzymamy, że w stacjonarnym przypadku:.

$$\begin{gathered}
m = \mu_3 = 0, \\
-2[\mu_2 + A\mu_4] + q = 0, \qquad (1.47) \\
-4[15A\mu_2^3 + 3\mu_2^2 + (\mu_4 - 3\mu_2^2)(15\mu_2 + 1)] + 6\mu_2 q = 0.
\end{gathered}$$

Wprowadzając nowe zmienne:

$$y = A\mu_2, \qquad (1.48)$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2} - Aq, \qquad (1.49)$$

i rozwiązując układ równań (1.47) otrzymamy:

$$30y^3 + 15y^2 + y - 12y\varepsilon - \varepsilon = 0. \qquad (1.50)$$

Analiza układów wyższych rzędów metodą zaproponowaną przez Beamana i Hedricka [13] prowadzi do skomplikowanych wielowymiarowych układów równań dla kumulantów. Autorzy ci w związku z tym proponują pewną metodę redukcji ilości równań. Nie będziemy się tym problemem zajmować odsyłając czytelnika do pozycji źródłowej [13].

Zauważmy, że linearyzowane równanie (1.2) jest tego samego rzędu co równanie nieliniowe (1.1) i w związku z tym gęstość widmowa rozwiązania zlinearyzowanego nie może zawierać tych samych efektów rezonansowych, które występują w odpowiadającej jej gęstości widmowej równania nieliniowego. Innymi słowy, minimalizacja błędu średniokwadratowego nie oznacza dobrej aproksymacji gęstości widmowej rozwiązania nieliniowego. Aby poprawić te niekorzystne cechy standardowej linearyzacji Iyengar [47] zaproponował metodę równoważnej linearyzacji wyższego rzędu, tzn. równoważny układ liniowy jest wyższego rzędu niż układ zlinearyzowany, przy tym samym addytywnym wymuszeniu stochastycznym. Jakkolwiek wyprowadzone ogólne zależności są błędne, to przykład ilustrujący (równanie Duffinga) jest poprawny i dlatego zasługuje na odnotowanie.

Podane przez nas w charakterze przykładu równanie Duffinga (1.15) było wielokrotnie przedmiotem analizy np: Lin [62], Lyon [65], Budgor [20], Iwan i Yang [45]. Niektórzy autorzy - Lyon, Heckl i Hazlegrove [66], Dimentberg [37], Iyengar [48], Socha [96] używali równania Duffinga do badania odpowiedzi układu na zakłócenia o charakterze procesu wąskopasmowego. Socha [96] porównał dwa ujęcia metody równoważnej linearyzacji na dwóch przykładach układów pierwszego i drugiego rzędu poddanych działaniu stacjonarnych gaussowskich szumów kolorowych. W pierwszym ujęciu linearyzuje się łącznie równanie stanu i równanie filtru, w ujęciu drugim linearyzację przeprowadza się jedynie dla równania stanu. Socha [96] wykazał, że oba ujęcia są równoważne (współczynniki linearyzacji są te same) przy założeniu gaussowskości odpowiedzi, a ponadto, że zbieżność wymuszeń kolorowych do szumu białego pociąga za sobą zbieżność odpowiednich wariancji rozwiązań równań zlinearyzowanych.

Iwan i Mason [44] używali równania Duffinga dla badania zakłócenia niestacjonarnego:

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + f(x) = \Theta(t)\dot{\xi}(t) \tag{1.51}$$

gdzie $\Theta(t)$ jest deterministyczną funkcją czasu, a $\dot{\xi}(t)$ jest stacjonarnym gaussowskim białym szumem.

Ahmadi [3] dla układów postaci (1.52) zaproponował uogólnienie metody równoważnej linearyzacji. W odpowiadającym układowi zlinearyzowanym równaniu:

$$\ddot{x} + 2h_e\dot{x} + \omega_e x = \Theta(t)\dot{\xi}(t), \tag{1.52}$$

założył, że ω_e jest wolnozmienną funkcją czasu $\omega_e = \omega_e(t)$ i na przykładzie równania Duffinga wykazał, że otrzymana przez niego wariancja $x(t)$ jest dokładniejsza niż przy stosowaniu standardowej linearyzacji.

Analizą układów wielowymiarowych przy wymuszeniu procesem niestacjonarnym zajmowali się Kimura i Sakata [59],[93], Spanos [98]. Na odnotowanie zasługuje również praca Apetaura i Opicki [5], w której autorzy przeprowadzają linearyzację w dziedzinie częstotliwościowej. Niektórzy autorzy zapoczątkowali wykorzystanie metody równoważnej linearyzacji do analizy układów z histerezami Wen [106], [107], Bouc [14], Baber i Wen [9]. Dalsze badania pozwoliły na uogólnienie wyników na układy oscylacyjne z dowolną histerezą. Wen [108] korzystając z wyników Bouca [14] pokazał, że oscylator z histerezą może być zamodelowany przez następujące równania:

$$\ddot{x} + h(x, \dot{x}) + z(x) = \xi(t), \tag{1.53}$$

$$\dot{z} = -\delta|\dot{x}|\, z\, |z|^{n-1} - \beta\dot{x}|z|^{n} + \gamma\dot{x}, \tag{1.54}$$

gdzie $h(\dot{x}, x)$ jest funkcją jednoznaczną, a z uwzględnia histerezę i zależy bezpośrednio od pochodnej x.

Przez odpowiedni dobór współczynników δ, β i γ można modelować różne kształty histerezy. Ta idea została rozwinięta na różne sposoby głównie przez Babera i Noori [10]–[12], Constantinou [32], Casciati [23], [24], Casciati i Faravelli [25].

Metodę równoważnej linearyzacji stosowali również Budgor [19], Budgor, Lindberg i Shuler [21], Bulsara, Lindberg i Shuler [22], Popp, Muller i Windrich [83], w połączeniu z metodą równoważnej harmonicznej linearyzacji oraz Windrich [110] z metodą uśredniania do analizy drgań samowzbudnych układów o jednym stopniu swobody. Fang i Wang [38] pokazali natomiast, że kombinacja równoważnej linearyzacji z metodą analizy modalnej daje pewne obliczeniowe korzyści. To uogólnienie analizy modalnej może być stosowane zarówno dla układów z tłumieniem jak i bez niego, nie ma również konieczności ograniczania się jedynie do zakłóceń gaussowskich.

Pewne interesujące uogólnienie metody z wykorzystaniem równań całkowych przedstawił Tung [104]. Wyznaczył on nieliniowe równanie całkowe dla funkcji korelacji odpowiedzi nieliniowego układu, które następnie rozwiązywał iteracyjnie i wykazał, że pierwsze przybliżenie jest równoważne metodzie linearyzacji.

Ideę równoważnego układu rozszerzono również na układy nieliniowe, tzn. opracowano metody wyznaczania równoważnych układów nieliniowych. Przez analogię procedurę tę nazywamy równoważną nielinearyzacją. Malczikow [67], [68] jako pierwszy pokazał dla wielowymiarowego układu z parametrycznymi i addytywnymi zakłóceniami istnienie równoważnego jednowymiarowego układu nieliniowego. Odpowiadające sobie rozwiązania mają ten sam rozkład prawdopodobieństwa.

Jeden z "Ojców" idei równoważnej linearyzacji Caughey zaproponował w pracy [30] zastosowanie jej do układów nieliniowych drugiego rzędu poddanych działaniu białego szumu, które nie mogą być rozwiązane dokładnie, a dla których można znaleźć równoważne równanie nieliniowe należące do klasy tych równań, dla których znane są rozwiązania dokładne. Rozważa on równanie:

$$\ddot{x} + h(x,\dot{x})\mathrm{sgn}(\dot{x}) + x = \sqrt{\sigma}\dot{\xi}(t), \tag{1.55}$$

gdzie:

$$h(x,\dot{x}) = h_{00} + h_{01}\dot{x} + h_{10}x + h_{11}x\dot{x} + ... + h_{ij}x^i\dot{x}^j + ..., \tag{1.56}$$

$0 \leq i,\ j \leq N,\ \sigma > 0$ jest intensywnością szumu.

Równanie (1.54) zastąpimy równaniem równoważnym:

$$\ddot{x} + f(H)\dot{x} + x + e(x,\dot{x}) = \sqrt{\sigma}\dot{\xi}(t), \tag{1.57}$$

gdzie:

$$H = \frac{1}{2}(x^2 + \dot{x}^2),$$
$$f(H) = c_{00}f_{00}(H) + c_{01}f_{01}(H) + c_{10}f_{10}(H) + ..., \tag{1.58}$$

$e(x,\dot{x})$ jest funkcją błędu.

Przechodząc do współrzędnych biegunowych tzn:

$$x = a\cos\Theta, \qquad \dot{x} = -a\sin\Theta, \tag{1.59}$$

współczynniki c_{ij}, $f_{ij}(H)$ tak dobieramy by zminimalizować błąd:

$$E[e^2(x,\dot{x})] \to \min.$$

Caughey wyznaczył momenty rozwiązań np:

$$E[x^2] = A_0\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} a\cos\Theta\ \exp\left\{\frac{2}{\sigma}\int_0^{\frac{a^2}{2}} f(z)dz\right\} da d\Theta, \tag{1.60}$$

gdzie A_0 jest pewną stałą normalizacyjną.

Metodę tę Caughey zilustrował na następującym przykładzie [30].

Przykład 3

Rozważmy nieliniowy oscylator z tarciem Culomba pod działaniem gaussowskiego białego szumu:

$$\ddot{x} + h\mathrm{sgn}(\dot{x}) + x = \sqrt{\sigma}\dot{\xi}(t). \tag{1.61}$$

Jest to szczególny przypadek równania (1.54) dla $h_{00} = h$, $h_{ij} = 0$, $(i,j > 0)$. Równanie (1.61) zastąpimy przez równoważne nieliniowe równanie różniczkowe:

$$\ddot{x} + cf(H)\dot{x} + x = \sqrt{\sigma}\dot{\xi}(t), \tag{1.62}$$

funkcję $f(H)$ przyjmujemy w postaci:

$$f(H) = \frac{1}{\sqrt{2H}}, \tag{1.63}$$

wówczas współczynnik c_0 będzie określony zależnością:

$$c_0 = \frac{2b}{\pi}\frac{\Gamma(1)\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{3}{2})} = \frac{4b}{\pi}. \tag{1.64}$$

Należy podkreślić, że wybór $f(H)$ i c_0, który minimalizuje $E[\epsilon^2(x,\dot{x})]$ również gwarantuje, że średnie energie dysypacji są te same w równaniach (1.61), (1.62). Przyjmując H postaci (1.58) i wyznaczając stałą normalizacji A_0, a następnie gęstość rozkładu rozwiązania stacjonarnego otrzymamy na tej podstawie momenty rozwiązań stacjonarnych:

$$E[x^2] = E[\dot{x}^2] = \frac{1}{2}E[a^2] = 3(\frac{\pi\sigma}{8h}). \tag{1.65}$$

Dalsze uogólnienia można znaleźć w pracach Zhu i Yu [114], Monahara i Iyengara [69]. Ideę równoważnych układów rozwijali również Lin i jego współpracownicy [63].

2. Metoda statystycznej linearyzacji

Metodę tę omówimy korzystając z wyników Kazakowa [57]. Rozważymy układ dynamiczny opisany nieliniowym wektorowym stochastycznym równaniem Ito:

$$d\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi}(\mathbf{x},t)dt + \sum_{k=1}^{M} \mathbf{G}_{k0}(t)d\xi_k(t), \tag{2.1}$$

gdzie:

$\mathbf{x}$ jest wektorem stanu, $\mathbf{x} = [x_1, ..., x_n]$,

$\mathbf{\Phi}$ jest pewną nieliniową wektorową funkcją, $\mathbf{\Phi}: R^n \times R^+ \rightarrow R^n$,

$\mathbf{G}_{k0}(t) = [\sigma_{k0}^1(t), ..., \sigma_{k0}^n(t)]^T$, $(k = 1, ..., M)$ są wektorami deterministycznymi intensywności szumu,

$\xi_k(t)$ są niezależnymi standardowymi procesami Wienera.

Celem linearyzacji statystycznej jest zastąpienie układu (2.1) układem liniowym, który jest równoważny w sensie pewnego kryterium układowi (2.1); ściślej mówiąc zastąpienie wektora nieliniowego $\mathbf{Y}$ postaci:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{\Phi}(\mathbf{x},t), \tag{2.2}$$

jego zlinearyzowaną postacią:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{\Phi}_0(\mathbf{m}_x, \mathbf{\Theta}_x, t) + \sum_{i=1}^{n} \mathbf{K}_i(\mathbf{m}_x, \mathbf{\Theta}_x, t)\mathbf{x}_i^0, \tag{2.3}$$

gdzie:

$\boldsymbol{\Phi}_0 = [\Phi_0^1, ..., \Phi_0^n]$ jest nieliniową funkcją wektorową momentów zmiennych wejściowych x_i,

$\mathbf{K}_i = [\boldsymbol{k}_{i1}(\boldsymbol{m}_x, \boldsymbol{\Theta}_x, t), ..., \boldsymbol{k}_{in}(\boldsymbol{m}_x, \boldsymbol{\Theta}_x, t)]^{\mathrm{T}}$, $(i = 1, ..., n)$ są wektorami statystycznych współczynników wzmocnień: $\boldsymbol{m}_x = E[\boldsymbol{x}]$, $\boldsymbol{\Theta}_x = [\Theta_{ij}]$, $\Theta_{ij} = E[x_i^0 x_j^0]$, $m_{x_i} = E[x_i]$, $i = 1, ..., n$,

x_i^0 jest scentrowanym procesem stochastycznym:

$$x_i^0 = x_i - m_{x_i}. \tag{2.4}$$

W dalszym ciągu omówimy metodę linearyzacji statystycznej na przykładzie jednowymiarowej nieliniowosci. Wówczas wielkości $\boldsymbol{\Phi}_0$ i $\mathbf{K}_i$ będą skalarami. W celu ich wyznaczenia należy posłużyć się jakimś kryterium. Podamy obecnie zastosowanie kilku typowych kryteriów.

2.1. Kryterium równości wartości oczekiwanej oraz drugich momentów dla zmiennej linearyzowanej i zlinearyzowanej

$$E[Y] = m_y = \Phi_0, \tag{2.5}$$

$$E[(Y - E[Y])^2] = E[(\Phi - \Phi_0)^2] = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} k_i k_j \Theta_{ij}, \tag{2.6}$$

gdzie:

$$\Theta_{ij}(t) = E[x_i^0 t) x_j^0(t)]. \tag{2.7}$$

Z równań (2.5) i (2.6) nie można w sposób jednoznaczny wyznaczyć współczynników k_i (za wyjątkiem przypadku jednowymiarowego). Istnieje zatem konieczność wprowadzenia dodatkowych zależności np. równości drugich momentów mieszanych tzn:

$$E[(Y - E[Y])(x_j - m_x)] = E\Big[\sum_{i=1}^{n} k_i x_i^0 x_j^0\Big], \qquad j = 1, ..., n, \tag{2.8}$$

otrzymamy wtedy układ równań liniowych:

$$\Theta_{\Phi_j} - \Phi_0^2 = \sum_{i=1}^{n} k_i \Theta_{ij}, \qquad j = 1, ..., n, \tag{2.9}$$

gdzie:

$$\Theta_{\Phi_j}(t) = E[\Phi x_j^0(t)]. \tag{2.10}$$

Łącząc otrzymany układ równań (2.9) z równaniem (2.6) otrzymamy przesztywniony układ równań ($n + 1$ równań i n niewiadomych). Dalsze postępowanie może polegać na szukaniu przybliżonego rozwiązania wszystkich równań, bądź na pominięciu któregoś z równań (2.8) i wyznaczeniu współczynników k_i z pozostałych równań.

Inny sposób wyznaczania współczynników zaproponował Kazakow [57]. Współczynniki k_i będziemy poszukiwali w następującej postaci:

$$k_i = \left[\frac{E[\Phi^2] - \Phi_0^2}{\Theta_{ii}}\mu\right]^{\frac{1}{2}} \operatorname{sgn}\frac{\partial\Phi_0}{\partial m_{x_i}}, \tag{2.11}$$

μ jest parametrem, który wyznaczamy podstawiając wielkości k_i do równania (2.6).

Znak w równaniu (2.11) powinien być zgodny ze znakiem $\frac{\partial\Phi_0}{\partial m_{x_i}}$ dla wielkości x_i posiadających rozkład normalny. Otrzymamy wówczas:

$$k_i = \left\{\frac{E[\Phi^2] - \Phi_0^2}{\Theta_{ii}}\left[\sum_{r,l=1}^{n}\frac{\Theta_{rl}}{\Theta_{rr}\Theta_{ll}}\operatorname{sgn}\frac{\partial\Phi_0}{\partial m_{x_r}}\operatorname{sgn}\frac{\partial\Phi_0}{\partial m_{x_l}}\right]^{-1}\right\}^{\frac{1}{2}} \operatorname{sgn}\frac{\partial\Phi_0}{\partial m_{x_i}} \quad i = 1, ..., n. \tag{2.12}$$

Jeśli założymy, że łączny rozkład zmiennych losowych jest normalny to wyznaczenie współczynników k_i upraszcza się. W szczególnym przypadku jednowymiarowej nieliniowości ($n = 1$) parametr $\mu = 1$, a współczynnik k_1 przyjmuje wówczas postać:

$$k_1 = \frac{D\Phi_0}{\Theta_{11}}\operatorname{sgn}\frac{\partial\Phi_0}{\partial m_{x_1}}, \tag{2.13}$$

gdzie:

$$\Phi_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(x_1,t)g(x_1,t)dx_1, \tag{2.14}$$

$$D\Phi = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi^2(x_1,t)g(x_1,t)dx_1 - \Phi_0^2, \tag{2.15}$$

$$\Theta_{11} = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1^2 g(x_1,t)dx_1 - m_{x_1}^2, \tag{2.16}$$

$$g(x_1,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\Theta_{11}}}\exp\{\frac{-(x_1 - m_x)^2}{2\Theta_{11}}\}. \tag{2.17}$$

W przypadku jednowymiarowym najczęściej funkcję Φ_0 zapisujemy w postaci:

$$\Phi_0 = k_0 m_x, \tag{2.18}$$

gdzie k_0 jest statystycznym współczynnikiem wzmocnienia wartości oczekiwanej.

2.2. Kryterium minimalnego średniokwadratowego błędu aproksymacji

Rozważmy średniokwadratowy błąd aproksymacji funkcji $Y = \Phi(x, t)$ poprzez zlinearyzowaną postać (2.4) tzn:

$$\delta = E[\Phi(x_1, ..., x_n, t) - \Phi_0 - \sum_{i=1}^{n} k_i x_i^0]^2. \tag{2.19}$$

Warunki konieczne istnienia minimum tego funkcjonału są postaci:

$$\frac{\partial \delta}{\partial \Phi_0} = 0, \qquad \frac{\partial \delta}{\partial \Phi_0} = 0. \tag{2.20}$$

Obliczając je otrzymamy następujące zależności:

$$\Phi_0 = E[\Phi], \tag{2.21}$$

$$\Theta_{\Phi_j} = \sum_{i=1}^{n} k_i \Theta_{ij}, \tag{2.22}$$

gdzie Θ_{ij} i Θ_{Φ_j} zostały określone zależnościami (2.7) i (2.10) tzn:

$$\Theta_{ij} = E[x_i^0 x_j^0], \qquad \Theta_{\Phi_j} = E[\Phi x_j^0].$$

Rozwiązując układ równań (2.22) otrzymamy:

$$k_i = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \frac{\Delta_{ij}}{\Delta} \Theta_{\Phi_j}, \qquad i = 1, ..., n, \tag{2.23}$$

gdzie:

$\Delta = \det[\Theta_{ij}]$, Δ_{ij} – dopełnienie algebraiczne elementu i–tej kolumny i j–tego wiersza.

Jeśli zmienne x_i są niezależne i gaussowskie to współczynniki k_i wyrażają się prostymi zależnościami:

$$k_i = \frac{\partial \Phi_0}{\partial m_{x_i}}. \tag{2.24}$$

Zależność (2.24) jest oczywiście szczególnym przypadkiem (2.23).

2.3. Kryterium równości błędu aproksymacji w przedziale $x < m_x$ i $x > m_x$

Kryterium to zostało wprowadzone po raz pierwszy przez Zajdenberga [112] dla jednowymiarowej nieliniowości. Współczynnik k_0 wyznaczamy tak samo jak w przypadku poprzednich kryteriów tzn:

$$k_0 = \frac{m_y}{m_x} = \frac{\Phi_0}{m_x}, \tag{2.25}$$

natomiast współczynnik k_1 wyznaczamy z warunku równości wartości oczekiwanych błędu wynikającego z zastąpienia funcji $Y = \Phi(x)$ przez funkcję zlinearyzowaną w przedziałach $(-\infty, m)$ oraz $(m, +\infty)$ tzn:

$$\int_{-\infty}^{m_x} [\Phi(x) - k_0 m_x - k_1(x - m_x)] g(x) dx = \int_{m_x}^{+\infty} [\Phi(x) - k_0 m_x - k_1(x - m_x)] g(x) dx, \tag{2.26}$$

gdzie $g(x)$ jest gęstościa rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej x.

Kryterium to rozszerzymy i uogólnimy na przypadek gdy Y jest funkcją wielu zmiennych. Odpowiednikami zależności (2.25) i (2.26) są:

$$\Phi_0 = E[\Phi(x_1, ..., x_n, t)], \tag{2.27}$$

$$\int_{-\infty}^{m_{x_1}} ... \int_{-\infty}^{m_{x_n}} [\Phi(x_1, ..., x_n, t) - \Phi_0 - \sum_{i=1}^{n} k_i x_i^0]^p g(x_1, ..., x_n, t) dx_1 ... dx_n =$$

$$= \int_{m_{x_1}}^{\infty} ... \int_{m_{x_n}}^{\infty} [\Phi(x_1, ..., x_n, t) - \Phi_0 - \sum_{i=1}^{n} k_i x_i^0]^p g(x_1, ..., x_n, t) dx_1 ... dx_n, \tag{2.28}$$

gdzie p jest liczbą całkowitą dodatnią.

Podobnie jak w przypadku pierwszego kryterium, z równań (2.27) i (2.28) nie można w sposób jednoznaczny wyznaczyć współczynników k_i (z wyjątkiem przypadku jednowymiarowego). Trzeba dołączyć pewne dodatkowe relacje. Można posłużyć się przy tym kilkoma różnymi metodami:

a) założyć, że warunek (2.28) jest spełniony równocześnie dla $p = 1, ..., n$,

b) zachodzi równość mieszanych momentów drugiego rzędu w rozpatrywanych przedziałach:

$$\int_{-\infty}^{m_{x_1}} ... \int_{-\infty}^{m_{x_n}} [\Phi(x_1, ..., x_n, t) - (\Phi_0 - \sum_{i=1}^{n} k_i x_i^0) x_i]^p g(x_1, ..., x_n, t) dx_1 ... dx_n =$$

$$= \int_{m_{x_1}}^{\infty} ... \int_{m_{x_n}}^{\infty} [\Phi(x_1, ..., x_n, t) - (\Phi_0 - \sum_{i=1}^{n} k_i x_i^0) x_i]^p g(x_1, ..., x_n, t) dx_1 ... dx_n, \tag{2.29}$$

W przypadku jednej nieliniowości, gdy zmienna x ma rozkład normalny, przy czym funkcja gęstości prawdopodobieństwa jest postaci (2.17), można wykazać, że współczynniki linearyzacji k_1 będą wyrażone zależnościami, odpowiednio dla $p = 1$:

$$k_1 = \frac{\int_0^{\infty} \Phi(\sigma_x \xi + m_x) e^{\frac{-1}{2}\xi^2} d\xi - \int_{-\infty}^{0} \Phi(\sigma_x \xi + m_x) e^{\frac{-1}{2}\xi^2} d\xi}{2\sigma_x}, \tag{2.30}$$

dla $p = 2$:

$$k_1 = \frac{\int\limits_0^\infty A d\xi - \int\limits_{-\infty}^0 A d\xi}{2\sigma_x \left[\int\limits_0^\infty B d\xi - \int\limits_{-\infty}^0 B d\xi\right]}, \tag{2.31}$$

gdzie:

$$\begin{aligned} A &= [\Phi^2(\sigma_x\xi + m_x) - 2\Phi_0\Phi(\sigma_x\xi + m_x)]e^{-\frac{1}{2}\xi^2}, \\ B &= \xi[\Phi(\sigma_x\xi + m_x) - \Phi_0]e^{-\frac{1}{2}\xi^2}. \end{aligned}$$

Zastosowanie formuły Isserlisa w linearyzacji stochastycznej

Otrzymane przez nas współczynniki k_0 i $k_1^{(i)}$ są w ogólnym przypadku nieliniowymi funkcjami wartości oczekiwanej i wariancji rozwiązania. Friedrich w pracy [36] pokazał, że korzystając z kryterium drugiego tzn. minimalnego średniokwadratowego błędu aproksymacji oraz formuły Isserlisa [39] można, przy założeniu stacjonarności i gaussowskości $x(t)$, zlinearyzować funkcję skalarną nieliniową w postaci wielomianowej:

$$f(x,\dot{x}) = \sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{m} c_{kl} x^k \dot{x}^l, \qquad k+1 \geq 2, \tag{2.32}$$

Otrzymuje się wówczas następujące przybliżenie liniowe:

$$f_l(x,\dot{x}) \cong k_0^{(5)} + k_1^{(5)}(x(t) - m_x) + k_2^{(5)}(\dot{x}(t) - \dot{m}_x), \tag{2.33}$$

gdzie współczynniki $k_0^{(5)}$, $k_1^{(5)}$ i $k_2^{(5)}$ są postaci wielomianowej ze względu na wartość średnią m_x i wariancje σ_x^2 i $\sigma_{\dot{x}}^2$:

$$\begin{aligned} k_0^{(5)} &= E[f(x,\dot{x})] = \\ &= \sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{[m/2]} c_{k\,2l} \sum_{j=0}^{[k/2]} \binom{k}{2j} m_x^{k-2j} \frac{(2j)!(2l)!}{2^{j+l} j! l!} (\sigma_x^2)^j (\sigma_{\dot{x}}^2)^l, \qquad (2.34) \\ k_1^{(5)} &= \frac{E[f(x,\dot{x})(x-m)]}{E[(x-m_x)^2]} = \\ &= \sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{[m/2]} c_{k\,2l} \sum_{j=0}^{[k-1/2]} \binom{k}{2j+1} m_x^{k-2j-1} \frac{(2j+1)!(2l)!}{2^{j+l} j! l!} (\sigma_x^2)^j (\sigma_{\dot{x}}^2)^l, \quad (2.35) \\ k_2^{(5)} &= \frac{E[f(x,\dot{x})(\dot{x}-\dot{m})]}{E[(\dot{x}-m_{\dot{x}})^2]} = \\ &= \sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{[m+1/2]} c_{k\,2l+1} \sum_{j=0}^{[k/2]} \binom{k}{2j} m_x^{k-2j} \frac{(2j)!(2l+1)!}{2^{j+l} j! l!} (\sigma_x^2)^j (\sigma_{\dot{x}}^2)^l, \qquad (2.36) \end{aligned}$$

gdzie symbol [ ] występujący w górnych wskaźnikach sumowania oznacza wartość całkowitą (entier):

$$m_x = E[x], \qquad \sigma_x^2 = E[(x - m_x)^2], \qquad \sigma_{\dot{x}}^2 = E[(\dot{x} - m_{\dot{x}})]. \tag{2.37}$$

Przykład 4

Rozpatrzmy nieliniowość:

$$Y = Ax^3, \qquad A > 0. \tag{2.38}$$

Statystycznie zlinearyzowana funkcja będzie miała postać:

$$Y = k_0 m_x + k_1(x - m_x). \tag{2.39}$$

Załóżmy również, że zmienna x ma rozkład $N(m_x, \sigma_x)$, gęstość prawdopodobieństwa jest dana wzorem (2.17) dla $x = x_1$.

Współczynik k_0 we wszystkich rozpatrywanych metodach oblicza się identycznie z następującej zależności:

$$k_0 = \frac{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} (A\sigma_x\xi + m_x)^3 \exp\{-\frac{1}{2}\xi^2\} d\xi}{\sqrt{2\pi} m_x} = A(m_x^2 + 3\sigma_x^2). \tag{2.40}$$

Przy obliczaniu tego typu całek korzystamy z własności, że całka $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \Phi(\cdot)dx$ z funkcji nieparzystej równa się zero oraz ze wzorów:

$$\int\limits_0^\infty \xi^{2k+1} e^{-\alpha\xi^2} d\xi = \frac{k!}{2a^{k+1}} = \int\limits_{-\infty}^0 \xi^{2k+1} e^{-\alpha\xi^2} d\xi, \tag{2.41}$$

$$\int\limits_0^\infty \xi^{2k} e^{-\alpha\xi^2} d\xi = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \frac{(2k-1)!!}{2(2a)^k} = \int\limits_{-\infty}^0 \xi^{2k} e^{-\alpha\xi^2} d\xi. \tag{2.42}$$

1^0 *Kryterium pierwsze*

Korzystamy z zależności (2.13) – (2.17):

$$\Phi_0 = A(m_x^3 + 3\sigma_x^2 m_x), \tag{2.43}$$

$$k_1^{(1)} = \sqrt{\frac{D\Phi}{\sigma_x^2}} = A\sqrt{9m_x^4 + 36m_x^2\sigma_x^2 + 15\sigma_x^4}. \tag{2.44}$$

2^0 *Kryterium drugie*

Korzystamy z zależności (2.24):

$$k_1^{(2)} = \frac{\partial \Phi_0}{\partial m_x} = 3A(m_x^2 + \sigma_x^2). \tag{2.45}$$

3^0 *Kryterium trzecie* ($p = 1$)

Korzystamy z zależności (2.30), (2.41), (2.42) obliczamy każdą z całek w liczniku oddzielnie, otrzymamy wtedy:

$$k_1^{(3)} = A(2\sigma_x^2 + 3m_x^2). \tag{2.46}$$

4^0 *Kryterium czwarte* ($p = 2$)

Podobnie jak poprzednio korzystamy z zależności (2.31), (2.41), (2.42) i obliczamy każdą z całek oddzielnie, otrzymamy wtedy:

$$k_1^{(4)} = 3A(2\sigma_x^2 + m_x^2), \tag{2.47}$$

5^0 *Kryterium piąte*

Korzystając z zależności (2.34) – (2.37) otrzymamy:

$$k_0^{(5)} = 3A(m_x^2 + \sigma_x^2), \qquad k_1^{(5)} = 3A(m_x^2 + \sigma_x^2), \qquad k_2^{(5)} = 0. \tag{2.48}$$

Tabele ze współczynnikami stochastycznej linearyzacji dla różnych funkcji nieliniowych, w tym również dla histerez, czytelnik znajdzie np. w artykułach [54], [109], [112], jak i monografiach [36], [57], [74]. Należy również odnotować, że pewne praktyczne metody wyznaczania współczynników linearyzacji przedstawił Morosanow [73]. W następnym punkcie omówimy wykorzystanie współczynników linearyzacji do wyznaczania równań momentów i rozwiązań stacjonarnych.

3. Wyznaczanie równań momentów i rozwiązań stacjonarnych

Rozważymy układ dynamiczny opisany stochastycznym równaniem wektorowym Ito (2.1):

$$dx(t) = \Phi(x(t), t)dt + G_{k0}(t)d\xi_k(t).$$

Po zastosowaniu stochastycznej linearyzacji otrzymamy zlinearyzowane stochastyczne równanie wektorowe:

$$dx = [\Phi_0(m_x, \Theta_x, t) + \mathbf{K}(m_x, \Theta_x, t)x^0]dt + \sum_{k=1}^{M} G_{k0}(t)d\xi_k(t), \tag{3.1}$$

gdzie statystyczna charakterystyka Φ_0 i macierz $\mathbf{K}$ ($n \times n$ wymiarowa) statystycznych współczynników wzmocnienia, zależą od wektora wartości średnich i macierzy kowariancji procesu $\boldsymbol{x}(t)$ tzn:

$$\boldsymbol{\Theta}_x = E[\boldsymbol{x}^0 \boldsymbol{x}^{0^{\mathsf{T}}}] = E[(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{m}_x)(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{m}_x)^{\mathsf{T}}]. \tag{3.2}$$

Korzystając z formuły Ito, podobnie jak w poprzednim rozdziale, wyznaczamy równania różniczkowe, które spełniają pierwsze i drugie momenty centralne:

$$\frac{dm_i}{dt} = \Phi_0^i(\boldsymbol{m}_x, \boldsymbol{\Theta}_x, t), \qquad m_i(t_0) = m_{i_0}, \tag{3.3}$$

$$\frac{d\Theta_{rs}}{dt} = \sum_{l=1}^{n}(k_{rl}\Theta_{ls} + k_{sl}\Theta_{rl}) + \sum_{k=1}^{M} \sigma_{k0}^r \sigma_{k0}^r, \qquad \Theta_{rs}(t_0) = \Theta_{rs_0}, \tag{3.4}$$

gdzie: Θ_{rs} są elementami macierzy $\boldsymbol{\Theta}_x$, $\boldsymbol{\Theta}_x = [\Theta_{rs}]$.

Elementy macierzy $\mathbf{K}$ są funkcjami $\boldsymbol{m}_x$ i $\boldsymbol{\Theta}_x$ tzn. wartości średnich i wariancji rozwiązania stacjonarnego, które otrzymamy po rozwiązaniu układu równań (3.3), (3.4) przy t dążącym do nieskończoności. Prowadzi to do następującej procedury rekurencyjnej:

$$\frac{dm_i^{h+1}}{dt} = \Phi_0(\boldsymbol{m}_x, \boldsymbol{\Theta}_x, t)\frac{1}{m_i^n} m_i^{h+1}, \qquad m_i^{h+1}(t_0) = m_{i0}, \tag{3.5}$$

$$\frac{d\Theta_{rs}^{h+1}}{dt} = \sum_{l=1}^{n}(k_{rl}(\boldsymbol{m}^h, \boldsymbol{\Theta}^h, t)\Theta_{ls}^{h+1} + k_{sl}(\boldsymbol{m}^h, \boldsymbol{\Theta}^h, t)\Theta_{rl}^{h+1}) + \sum_{k=1}^{M} \sigma_{k0}^r \sigma_{k0}^s, \tag{3.6}$$

$$\Theta_{rs}^{h+1}(t_0) = \Theta_{rs_0}, \qquad r, s = 1, ..., n, \qquad h = 1, 2, ...$$

gdzie $m_i^{h+1}(t)$, $\Theta_{rs}^{h+1}(t)$ są wartościami średnimi i wariancjami $(n+1)$ przybliżenia, a $\boldsymbol{m}_x^h$, $\boldsymbol{\Theta}_x^h$ są wartościami rozwiązań stacjonarnych.tzn:

$$\boldsymbol{m}_x^h = \lim_{t\to\infty} \boldsymbol{m}_x^h(t), \qquad \boldsymbol{\Theta}_x^h = \lim_{t\to\infty} \boldsymbol{\Theta}_x^h(t). \tag{3.7}$$

W tym miejscu czyni się milczące założenie o istnieniu stacjonarnych rozwiązań. W dalszym ciągu zajmiemy się badaniem rozwiązań stacjonarnych układu (3.3),(3.4). Wówczas otrzymamy nieliniowy układ równań algebraicznych:

$$\Phi_0(\boldsymbol{m}_x, \boldsymbol{\Theta}_x, t) = 0, \qquad m_i^{h+1}(t_0) = m_{i0}, \tag{3.8}$$

$$\sum_{l=1}^{n}(k_{rl}(\boldsymbol{m}_x, \boldsymbol{\Theta}_x, t)\Theta_{ls} + k_{sl}(\boldsymbol{m}_x, \boldsymbol{\Theta}_x, t)\Theta_{rl}) + \sum_{k=1}^{M} \sigma_{k0}\sigma_{k0} = 0. \tag{3.9}$$

Układ (3.8), (3.9) najczęściej można rozwiązać jedynie metodami numerycznymi. Można również skorzystać z pewnej procedury iteracyjnej. Przyrównując do zera lewe strony równań różniczkowych (3.5), (3.6) i rozwiązując układ równań algebraicznych względem zmiennych $\boldsymbol{\Theta}_x^{h+1}$ otrzymamy:

$$\mathrm{sc}\boldsymbol{\Theta}_x^{h+1} = \boldsymbol{F}(\mathrm{sc}\boldsymbol{\Theta}_x^h), \tag{3.10}$$

gdzie sc$\boldsymbol{\Theta}$ jest wektorem utworzonym z elementów macierzy $\boldsymbol{\Theta} = [\Theta_{ij}]$:

$$\mathrm{sc}\boldsymbol{\Theta} = [\Theta_{11}, ..., \Theta_{1n}, \Theta_{21}, ..., \Theta_{2n}, ..., \Theta_{nn}]^{\mathsf{T}},$$

$\boldsymbol{F}(\cdot)$ jest funkcją wektorową liniową zdefiniowaną poprzez równania (3.5) i (3.6).

Zauważmy ponadto, że najczęściej w przypadku stacjonarnym $(t \to \infty)$, gdy wartości średnie zakłóceń są równe zero to również:

$$\boldsymbol{m}^{\infty}(t) = \boldsymbol{0}. \tag{3.11}$$

Działanie procedury iteracyjnej (3.10) pokażemy na przykładzie.

Przykład 5

Rozważmy układ nieliniowy analizowany w przykładzie 1 postaci:

$$dx = -(x + Ax^3)dt + \sqrt{q}dw, \tag{3.12}$$

gdzie w jest standardowym procesem Wienera.

Współczynniki linearyzacji dla nieliniowości Ax^3 są postaci (2.40), (2.44) - (2.47). Wartość średnia i drugi moment rozwiązania równania (3.12) spełniają następujące równania:

$$\frac{dm_x}{dt} = \Phi_0, \tag{3.13}$$

$$\frac{dE[x^2]}{dt} = -2k_1^{(i)}E[x^2] + q. \tag{3.14}$$

Stąd wartość średnia rozwiązania stacjonarnego $m_x = 0$ oraz:

$$E[x^2] = \kappa^{h+1} = \frac{q}{2k_1^{(i)}(m_x^n, \sigma_x^n)} = \frac{q}{2[1 + \alpha_i A\kappa^n]}, \tag{3.15}$$

gdzie:

$$\alpha_1 = 15, \quad \alpha_2 = 3, \quad \alpha_3 = 2, \quad \alpha_4 = 6. \tag{3.16}$$

Każdą z czterech procedur można zapisać w postaci:

$$\kappa^{h+1} = F(\kappa^h), \tag{3.17}$$

gdzie:

$$F(y) = \frac{q}{2[1 + \alpha_i Ay]}, \qquad \alpha_i > 0, \quad y > 0. \tag{3.18}$$

Łatwo pokazać, że $|F| = \sup_{y=1} |F(y)|$ jest mniejsza od 1, to znaczy, że procedury iteracyjne (3.15) dla $i = 1, ..., 4$ są zbieżne.

W przypadku stacjonarnym, gdy $\lim_{h\to\infty} \kappa^h = \kappa^\infty$ drugi moment można wyznaczyć z następującego równania algebraicznego:

$$2\alpha_i \kappa_i^{\infty^2} + 2\kappa_i^\infty + q = 0, \qquad i = 1, ..., 4. \tag{3.19}$$

wtedy:

$$\kappa_i^\infty = \frac{-1 + \sqrt{1 + 2A\alpha_i q}}{2A\alpha_i}, \qquad i = 1, ..., 4. \tag{3.20}$$

Wracając do zależności ogólnej (3.10) definiującej procedurę iteracyjną możemy przedstawić ją w postaci:

$$Y^{h+1} = F(Y^h),$$

gdzie $Y^h = \mathrm{sc}\Theta_x^h$, przy założeniu, że spełnione są nierówności:

$$|F(\kappa_1, ..., \kappa_n) - F(\kappa_1', ..., \kappa_n')| \le \sum_{j=1}^n B_{ij} |\kappa_j - \kappa_j'|, \qquad i = 1, ..., n, \tag{3.21}$$

gdzie $\chi = [\kappa_1, .., \kappa_n]^T$, $\chi' = [\kappa_1', .., \kappa_n']^T$ należą do dziedziny operatora F.

Nierówność (3.21) można zastąpić nierównością:

$$\|F(\chi) - F(\chi')\| \le \|\mathrm{B}\| \, \|\chi - \chi'\|, \tag{3.22}$$

gdzie normy wektora i macierzy przyjęto następująco:

$$\|\chi\| = \max_i |\kappa_i|, \qquad \|\mathrm{B}\| = \max_i \left(\sum_{j=1}^n |B_{ij}| \right). \tag{3.23}$$

Można wykazać, że jeśli:

$$\|\mathrm{B}\| < 1 \Rightarrow \lim \chi^h = \chi^\infty = F(\chi^\infty). \tag{3.24}$$

Innym sposobem wyznaczenia wartości stacjonarnych m_x i Θ_x jest wykorzystanie do rozwiązywania układu równań (3.8), (3.9) algorytmów, którymi rozwiązuje się równania Lapunowa. Obszerny przegląd literaturowy i porównanie takich algorytmów można znaleźć w artykule przeglądowym Jamshidiego [50].

4. Metoda linearyzacji dla układów z zakłóceniem parametrycznym

Podobnie jak dla układów z zakłóceniem addytywnym można wyróżnić dwie grupy metod linearyzacji dla układów z zakłóceniem multiplikatywnym. W pierwszej z nich, będącej naturalnym uogólnieniem równoważnej linearyzacji, na szczególne wyróżnienie zasługują prace Kottalam, Lindberg i Westa [61], Brücknera i

Lina [17],[18], natomiast w drugiej, będącej uogólnieniem metody linearyzacji statystycznej, metody Kazakowa i Malczikowa [58]. Brückner i Lin [17] rozważali nieliniowy oscylator opisany równaniem:

$$\ddot{x}(t) + f(x, \dot{x}) = \sum_{k=1}^{M} g_k(x, \dot{x})\xi_k(t), \tag{4.1}$$

gdzie f i g_k są pewnymi funkcjami nieliniowymi, $\xi_k(t)$ są białymi szumami o wartości średniej zero i macierzy kowariancji:

$$E[\xi_j(t)\xi_k(t+\tau)] = S_{jk}\delta(\tau). \tag{4.2}$$

Jego równoważna postać Ito wygląda następująco:

$$\begin{aligned} dx_1 &= x_2 dt, \\ dx_1 &= F(x_1, x_2)dt + \sigma(x_1, x_2)dw(t), \end{aligned} \tag{4.3}$$

gdzie:

$$F(x_1, x_2) = -f(x_1, x_2) + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{M}\sum_{k=1}^{M} \frac{\partial g_i(x_1, x_2)}{\partial x_2} g_k(x_1, x_2) S_{jk}, \tag{4.4}$$

$$\sigma^2(x_1, x_2) = \sum_{j=1}^{M}\sum_{k=1}^{M} g_j(x_1, x_2) g_k(x_1, x_2) S_{jk}, \tag{4.5}$$

$w(t)$ jest standardowym procesem Wienera.

Brückner i Lin przyjęli, że zlinearyzowany układ (4.3) ma postać:

$$\begin{aligned} dx_1 &= x_2 dt, \\ dx_2 &= (a_1 x_1 + a_2 x_2 + b)dt + [c_{11}(x_1)^2 + c_{12}x_1 x_1 + \\ &+ c_{22}(x_2)^2 + d_1 x_1 + d_2 x_2 + e]^{\frac{1}{2}} dw. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Współczynniki a_i, b, c_{ij}, d_i, e są dobierane tak by minimalizowały błędy średnio kwadratowe:

$$I_1 = E[(F(x_1, x_2) - a_1 x_1 - a_2 x_2 - b)^2], \tag{4.7}$$

$$\begin{aligned} I_2 &= E[(2F(x_1, x_2) + \sigma^2(x_1, x_2)^2 - c_{11}(x_1)^2 - (2a_1 + c_{12})x_1 x_2 + \\ &- (2a_2 + c_{22})(x_2)^2 - d_1 x_1 - (2b + d_2)x_2 - e)^2]. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Wyznacza się je z zależności:

$$\frac{\partial I}{\partial a_i} = \frac{\partial I}{\partial b} = \frac{\partial I}{\partial c_{ij}} = \frac{\partial I}{\partial d_i} = \frac{\partial I}{\partial e} = 0, \tag{4.9}$$

przy czym są one funkcjami pierwszych dwu momentów x_1 i x_2 i ponadto momentów wyższych rzędów takich jak:

$$E[(x_2)^3F(x_1,x_2)],\quad E[x_1(x_2)^2F(x_1,x_2)],\quad E[(x_2)^2\sigma^2(x_1,x_2)],\quad E[x_1x_2\sigma^2(x_1,x_2)].$$

W szczególności, jeśli F jest wielomianem stopnia m, to w celu otrzymania zamkniętego układu równań różniczkowych dla momentów musimy je wyznaczyć do rzędu $k = \max(n+3, m+2)$.

W metodzie podanej przez Kottalama Lindberga i Westa [61] zlinearyzowany układ miał szczególną postać układu (4.6), gdzie $c_{11} = c_{12} = c_{22} = d_1 = d_2 = 0$.

Brückner i Lin pokazali, że przedstawioną metodę można uogólnić na układy o wielu stopniach swobody:

$$\begin{aligned} dx_1^{(j)} &= x_2^{(j)}dt, \\ dx_2^{(j)} &= F^{(j)}(\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2)dt + \sum_{k=1}^{M}\sigma_k^{(j)}(\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2)dw_k(t), \end{aligned} \tag{4.10}$$

gdzie:

$x^{(j)} = x_1^{(j)}$, $\dot{x}^{(j)} = x_2^{(j)}$, $j = 1,\dots,M$,

$\boldsymbol{X}_i = [x_i^{(1)},\dots,x_i^{(M)}]$, $i = 1,2$,

$w_k(t)$, $k + 1,\dots,M$ – niezależne standardowe procesy Wienera.

Rozwiązania zlinearyzowanego równania poszukuje się w postaci:

$$\begin{aligned} dx_1^{(j)} &= x_2^{(j)}dt, \\ dx_2^{(j)} &= \left[\sum_{k=1}^{M}(a_1^{(j)}x_1^{(k)} + a_2^{(j)}x_2^{(k)}) + b^{(j)}\right]dt + \sum_{k=1}^{M}c_k^{(j)}dw_k(t), \end{aligned} \tag{4.11}$$

gdzie $a_{1_k}^{(j)}$, $a_{2_k}^{(j)}$ i $b^{(j)}$ są stałymi parametrami i $\sum_{k=1}^{M} c_k^{(i)}c_k^{(j)}$ są wielomianami kwadratowymi względem zmiennych wektorowych $\boldsymbol{X}^{(j)}$, $\dot{\boldsymbol{X}}^{(j)}$.

Współczynniki w tych wielomianach jak i parametry $a_{1_k}^{(j)}$, $a_{2_k}^{(j)}$ i $b^{(j)}$ wyznacza się z warunku minimalizacji błędów średniokwadratowych:

$$\varepsilon^{(j)} = E\left[\left(F^{(j)}(\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2) - \sum_{k=1}^{M}(a_{1_k}^{(j)}x_1^{(k)} + a_{2_k}^{(j)}x_2^{(k)}) - b^{(j)}\right)^2\right], \tag{4.12}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^{(ij)} &= E\Bigg[\Bigg(x_2^{(i)}F^{(j)} + x_2^{(j)}F^{(i)} + \sum_{k=1}^{M}\sigma_k^{(i)}\sigma_k^{(j)} - \sum_{k=1}^{M}[(a_{1_k}^{(j)}x_2^{(i)} + a_{1_k}^{(i)}x_2^{(j)})x^{(k)} + \\ &+ (a_{2_k}^{(j)}x_2^{(i)} + a_{2_k}^{(i)}x_2^{(j)})x_2^{(k)} - b^{(j)}x_2^{(i)} - b^{(i)}x_2^{(j)}] - \sum_{k=1}^{M}c_k^{(j)}c_k^{(i)}\Bigg)^2\Bigg]. \end{aligned} \tag{4.13}$$

W innej swej pracy [18] Brückner i Lin zaproponowali wykorzystanie transformacji Ariaratnama i Tama [2]:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= z(t)e^{i\omega t} + \bar{z}(t)e^{-i\omega t}, \\ x_2(t) &= i\omega\left[z(t)e^{i\omega t} + \bar{z}(t)e^{-i\omega t}\right], \end{aligned} \tag{4.14}$$

która z uwagi na swą liniowość zachowuje również markowskość procesu wektorowego $[z(t), \bar{z}(t)]$.

Transformacja ta przekształca układ (4.11) do postaci:

$$\begin{aligned} dz &= F_z dt + \sigma_{z_1} d\xi_1 + \sigma_{z_2} d\xi_2, \\ d\bar{z} &= \bar{F}_z dt + \bar{\sigma}_{z_1} d\xi_1 + \bar{\sigma}_{z_2} d\xi_2, \end{aligned} \tag{4.15}$$

gdzie F_z, $\bar{F}_z$, σ_{z_i}, $\bar{\sigma}_{z_i}$ $(i = 1,2)$ są funkcjami $z(t)$, $\bar{z}(t)$, ω, $e^{i\omega t}$, ξ_1, ξ_2 są standardowymi procesami Wienera.

Jeżeli układ wyjściowy (4.3) zawierał jedynie nieliniowości o charakterze wielomianowym, to F_z, $\bar{F}_z$, σ_{z_1}, $\bar{\sigma}_{z_1}$, σ_{z_2}, $\bar{\sigma}_{z_2}$ są również wielomianami z i $\bar{z}$. Dla układu (4.15) można wyznaczyć równania momentów, które w przypadku gdy układ wyjściowy (4.10) jest liniowy będą stanowiły układ równań zamkniętych, natomiast w ogólnym przypadku układu nieliniowego (4.10) konieczne jest zastosowanie jednej z technik zamykania, np. metody kumulantów, lub quasimomentów.

Przykład 6

Rozważmy nieliniowy oscylator opisany równaniem:

$$\begin{aligned} dx_1 &= x_2 dt, \\ dx_2 &= (-\alpha x_2 - \beta(x_1)^2 x_2 - x_1)dt + [(x_1)^2\sigma_1 + \sigma_2]^{\frac{1}{2}} dw. \end{aligned} \tag{4.16}$$

Poszukując współczynników układu zlinearyzowanego w postaci (4.6) korzysta się z warunków (4.9). Otrzymuje się wówczas:

$$\begin{aligned} a_1 &= -1 - \frac{(\mu_{1112} - \mu_1\mu_{112})(\mu_{22} - (\mu_2)^2) - (\mu_{1122} - \mu_2\mu_{112})(\mu_{12} - \mu_1\mu_2)}{(\mu_{11} - (\mu_1)^2)(\mu_2 - (\mu_2)^2) - (\mu_{12} - \mu_1\mu_2)^2}, \\ a_2 &= -1 - \frac{(\mu_{1112} - \mu_2\mu_{112})(\mu_{11} - (\mu_1)^2) - (\mu_{1122} - \mu_1\mu_{112})(\mu_{12} - \mu_1\mu_2)}{(\mu_{11} - (\mu_1)^2)(\mu_2 - (\mu_2)^2) - (\mu_{12} - \mu_1\mu_2)^2}, \\ b &= (-1 - a_1)\mu_1 + (-\alpha - a_2)\mu_2 - \beta\mu_{112}, \end{aligned} \tag{4.17}$$

gdzie: $\mu_i = E[x_i]$, $\mu_{ij} = E[x_i x_j]$ itd.

Podobnie można wyprowadzić zależności dla c_{ik}, d_i, e. Z uwagi na fakt, że po prawej stronie wyrażeń (4.17), jak również dla c_{ik}, d_i, e występują momenty do szóstego rzędu włącznie, to aby zamknąć układ równań dla momentów musimy uwzględnić 27 równań momentów, do których ponadto stosuje się jedną z technik zamykania. Równania te zwykle po zamknięciu rozwiązuje się numerycznie.

Najprostszą metodę statystycznej linearyzacji układów z multiplikatywnymi zakłóceniami zaproponowali Kazakow i Malczikow [58]. Polega ona na niezależnej statystycznej linearyzacji części deterministycznej $\Phi(x,t)$ i stochastycznej $\sigma(x,t)$ równania:

$$dx = \Phi(x,t)dt + \sigma(x,t)dw, \tag{4.18}$$

gdzie Φ, σ są wektorowymi funkcjami nieliniowymi, $w(t)$ jest skalarnym standardowym procesem Wienera.

Ciekawą koncepcję analizy układów z zakłóceniem multiplikatywnym i addytywnym podali Young i Chang [91]. Polega ona na zastąpieniu orginalnego układu z zakłóceniami multiplikatywnymi i addytywnymi pewnym równoważnym układem nieliniowym z innym zakłóceniem jedynie addytywnym o charakterze białego szumu. Intensywność tego zakłócenia jest zależna od stacjonarnych rozwiązań, do wyliczenia których, autorzy proponują wykorzystać gęstość prawdopodobieństwa dla układu zastępczego. Prowadzi to z konieczności do procedury iteracyjnej. Szczegóły dotyczące tej metody jak i przykłady ilustrujące znajdzie czytelnik w [91].

5. Uwagi końcowe

W opracowanym przeglądzie nowych rezultatów dotyczącym metod linearyzacji stochastycznej uwzględniono jedynie zakłócenia ciągłe, gaussowskie, najczęściej szumy białe. W literaturze istnieją już prace z metod linearyzacji np. Tylikowskiego i Marowskiego [105], gdzie zakłócenie ma charakter Poissonowski. W niniejszej pracy nie omówiono również oceny dokładności metod linearyzacji, można ją będzie znaleźć między innymi w pracach Kazakowa [56], [57], Kołowskiego [60], Aleksandrowa i in. [5]. Coraz częściej pojawiają się prace, gdzie metoda równoważnej linearyzacji jest używana jako narzędzie badawcze do analizy wyspecjalizowanych problemów dynamiki statystycznej takich jak: analiza ruchu ślizgowego pewnych struktur przypadkowo poruszających się powierzchniach [4], [31], drgania utwierdzonych płyt i konstrukcji powierzchniowych pod wpływem wymuszeń akustycznych [70], [71], czy analiza niestacjonarnych drgań pojazdu poruszającego się po nierównościach o charakterze stochastycznym [42].

Z przeprowadzonego przeglądu prac można wyciągnąć kilka podstawowych wniosków:

(a) Metoda statystycznej i równoważnej linearyzacji jest prosta w zastosowaniu jedynie dla układów o kilku stopniach swobody. Daje wówczas dla funkcji gładkich dokładność rzędu kilkunastu procent. W przypadku układów o wielu stopniach swobody jej zastosowanie jest dużo bardziej złożone z uwagi na rosnącą z kwadratem liczbę równań momentów. Tę trudność starali się ominąć Casciati i Faravelli

[25] oraz Pawleta [76] przez wprowadzenie zdecentralizowanej linearyzacji.

(b) Standardowa metoda linearyzacji, ze średnio-kwadratowym kryterium, zapewnia jedynie najlepszą aproksymację wariancji rozwiązania, nie uwzględnia jednak własności dynamicznych układu nieliniowego, innymi słowy nie zapewnia dobrej aproksymacji gęstości widmowej rozwiązania układu nieliniowego.

(c) W niektórych układach, zwłaszcza o wielu stopniach swobody z histerezami jest jedynym narzędziem matematycznym (analitycznym) pozwalającym na analizę zjawisk dynamicznych. Alternatywą w tym przypadku są jedynie metody symulacyjne.

Literatura

1. AHLBEHRENDT N., KEMPE V., *Analyse stochastischer Systeme*, R.Oldenburg Verlag, München, Wien, 1984
2. ARIARATNAM S.T., TAM D.S.F., *Moment stability of coupled linear systems under combined harmonic and stochastic excitation*, Stochastic Problems in Dynamics (ed. B.L.Clarkson), Pitman, London 1977
3. AHMADI G., *Mean square Response of a Duffing Oscillator to a Modulated White Noise Excitation by the Generalized Method of Equivalent Linearization*, J.Sound & Vibr., vol.71, No 1,1980
4. AHMADI G., *Stochastic Earthquake Response of a Structure on a Sliding Foundation*, Int.J.Engrg.Sci., vol.21, 1983
5. Александров М.,Батков А.М., Староверов А.М., Щукин Б.А., Исследование точности нелинейных нестационарных систем при помощи метода статистической линеаризации, Автоматика и Телемеханика, Т.24, Но 3, 1965
6. APETAUR M., OPICKA F., *Linearization of nonlinear stochastically excited dynamic systems*, J.Sound & Vibr., vol.86, No 4, 1983
7. ATALIK T.S., UTKU S., *Stochastic Linearization of Multidegree of Freedom Nonlinear Systems*, Int.J.Earthquake Engr.Struct.Dynamic, vol.4, 1976
8. AXELBY G.S., *Random noise with bias signals in nonlinear devices*, Trans.IRE, AC-4, No 2, 1959
9. BABER T.T., WEN K., *Equivalent Linearization for Hysteretic Structures*, Proc. ASCE Specialty Conf.Probabilistic Mech.Struc.Reliabil., Tucson AZ, 1979
10. BABER T.T., *Nonzero Mean Random Vibration of Hysteretic Systems*, ASCE J.Engrg.Mech., vol.110, No 7, 1984
11. BABER T.T., NOORL M.N., *Random Vibration of Degrading Pinching Systems*, ASCE J.Engrg.Mech., vol.111, No 8, 1985
12. BABER T.T., NOORL M.N., *Modelling General Hysteresis Behaviour and Random Vibration Applications*, J.Vib.Acoust.Stress Rel.Des., Trans.ASME, vol.108, No 4, 1986
13. BEAMAN J.J., HEDRICK J.K., *Improved Statistical Linearization for Analysis and Control of Nonlinear Stochastic Systems; Part I: An Extended Statistical Linearization Technique*, J.Dynam.Syst.Meas.Control, Trans.ASME, vol.103, 1981

14. BOUC R., *Forced Vibration of Mechanical Systems with Histeresis*, Abstract.Proc.Fourth Conf.Nonlinear Oscillations, Praga, 1967

15. BOOTON R.C., *The analysis of nonlinear control systems with random inputs*, Proc.Sympos.Nonlinear Circuit Analysis, vol.2, 1953

16. BOTTON R.C., *Nonlinear control systems with random inputs*, IRE CT-1,1954

17. BRÜCKNER A., LIN Y.K., *Generalization of the equivalent linearization method for nonlinear random vibration problems*, Int.J.Non-Linear Mech., vol.22, No 3, 1987

18. BRÜCKNER A., LIN Y.K., *Application of complex stochastic averaging to non-linear random vibration problems*, Int.J.Non-linear Mech., vol.22, No 3, 1987

19. BUDGOR A.B., *Studies in Nonlinear Stochastic Processes I; Approximate Solution of Nonlinear Stochastic Differential Equation by the Method of Statistical Linearization*, J.Statist.Phys. vol.15, No 5, 1976

20. BUDGOR A.B., LINDBERG K., SHULER K.E., *Studies in Nonlinear Stochastic Processes. II. The Dufing Oscillator Revisited*, J.Statist.Phys. vol.15, No 5, 1976

21. BUDGOR A.B., LINDBERG K., SHULER K.E., *Studies in Nonlinear Stochastic Processes. III. Approximate Solutions of Nonlinear Stochastic Differential Equations Excited by Gaussian Noise and Harmonic Disturbances*, J.Statist.Phys., vol.17, No 1, 1977

22. BULSARA A.R., LINDBERG K., SHULER K.E., *Spectral Analysis of a Nonlinear Oscillator Driven by Random and Periodic Forces. I. Linearized Theory*, J.Statist.Phys. vol.27, No 4, 1982

23. CASCIATI F., *Equivalent linearization technique in the analysis of seismic-excited sructures*, Proc. of the Euro-china Joint Seminar on Earthquake Engineering, Beijing, China, 1986

24. CASCIATI F., *Nonlinear stochastic dynamic of large structural system by equivalent linearization*, Proc.ICASP5, Int.Conf.on Application of Statistics and Probability in Soil and Structural Engineering, Vancouver, 1987

25. CASCIATI F., FARAVELLI L., *Equivalent linearization in nonlinear random vibration problems*, Proc.Int.Conf.on Vibration Problems in Eng., Xian, China, 1986

26. CAUGHEY T.K., *Equivalent Linearization Techniques*, J.Acoust.Soc.Amer., vol.35, No 11, 1963

27. CAUGHEY T.K., *Response of Nonlinear Systems to Random Excitation*, Lecture Note, California Inst.Techn., 1953 (niepublikowana)

28. CAUGHEY T.K., *Random Excitation of Loaded Nonlinear String*, J. Appl. Mech. Trans. ASME, vol.27, No 3, 1960

29. CAUGHEY T.K., *Nonlinear Theory of Random Vibrations*, Appl.Mech., vol.11, 1971

30. CAUGHEY T.K., *On the Response of Non-linear Oscillators to Stochastic Excitation*, Random Vibration ed. Huang T.C. & Spanos P.D., The American Society of Mechanical Engineering, 1984

31. CONSTATINOU M.C., TADJBAKSH I.G., *Response of Sliding Structure to Filtered Random Excitation*, J.Struc.Mech., vol.12, No 3, 1984

32. CONSTANTINOU M.C., *Dynamics of 3D base isolated structures* , Dynamic Response of Structures, ed G.Hart and R.Nelson, New York, 1986.

33. CRANDALL S.H., *Random Vibration of a Nonlinear System with a set-up Spring*, J.Appl.Mech.Trans.ASME, vol.27, No 3, 1962

34. CRANDALL S.H., ZHU W.Q., *Random Vibration : A Survey of Recent Developments*, J.Appl.Mech.Trans.ASME, vol.50, No 6, 1983

35. CRANDALL S.H., *Correlations and Spectra of Nonlinear System Response*, Zagadnienia Drgań Nieliniowych, vol. 14, 1973

36. CSAKI F., *Nonlinear Optimal and Adaptive Systems*, Akademia Kiado, Budapest 1972

37. Диментберг М.Ф., О колебаниях системы с нелинейной кубической характеристикой при ускополосном случайном возбуждений, Изв. АН СССР, МТТ, Но2, 1971

38. FANG T., WANG Z.N., *A Generalization of Caughey's Normal Mode Approach to Nonlinear Random Vibration Problems*, AIAA J., vol.24, No 3, 1986

39. FOSTER E.T., *Semilinear Random Vibrations in Discrete Systems*, J. Appl. Mech. Trans. ASME, vol.35, No 3, 1968

40. FRIEDRICH H., *On a method of equivalent statistical linearization* , J.Tech.Phys., vol.16, No 2, 1975

41. FRIEDRICH H., *Näherungsverfahren zur Berechnung von schwachnichtlinearen, stochastisch zwangserregten Schingungssystemen mit einem Freicheitsgrad* , Beitrage zur Schwingungstheorie ed. Schmidt G.,Akademie-Verlag, Berlin, 1974

42. HARRISON R.F., HAMMOND J.K., *Approximate Time Domain, Nonstationary Analysis of Stochastically Excited Nonlinear Systems with Particular Reference to the Motion of Vehicles on Rough Ground* , J.Sound.Vibr., vol.105, No 37, 1986

43. ISSERLIS L., *On a formula for the product-moment coefficient in any number of variables*, Biometrica, vol.12, No 1/2, 1918

44. IWAN W.D., MASON A.B., *Equivalent Linearization for Systems Subjected to Nonstationary Random Excitation*, Int.J.Non-linear Mech., vol.15,1980

45. IWAN W.D., YANG I.M., *Statistical Linearization for Nonlinear Structures*, ASCE J.Engr.Mech.Div., vol.97, No 6, 1971

46. IWAN W.D., *A Generalization of the Method of Equivalent Linearization* , Int.J.Non-linear Mech., vol.8, 1973

47. IYENGAR R., *Higher order linearization in nonlinear random vibration*, Int.J.Nonlinear Mechanics, vol.23, No.5/6, 1988

48. IYENGAR R., *Response of nonlinear systems to narrow-band excitation*, Structural Safety, vol.6, 1989

49. IZUMI M., ZAIMING L., KIMURA M., *A stochastic linearization technique and its application to response analysis of nonlinear system based on weighted least-square minimization*, Journal of Structural and Construction Engineering, Transaction AIJ, No.395, 1989

50. JAMSHIDI M., *An overview on the solutions of the algebraic matrix Riccati equation and related problems*, Large Scale Systems, vol.1, No 2, 1980

51. Казаков И.Е., Приближенный метод статистического исследования нелинейных систем, Труды ВВИА им. Жуковскего, 1954

52. Казаков И.Е., Приближенный вероятностный анализ точности работы существенно нелинейных автоматических систем, Автоматика и Телемеханика, в.17, Но 5, 1956

53. Казаков И.Е., Доступов Б.Г., Статистическая динамика нелинейных автоматических систем, Физматгиз, 1962

54. Казаков И.Е., *Методы исследования нелинейных автоматических систем основанные на статистической линеаризации*, в Современные методы проектирования систием управления, Машиностроене, 1967

55. Казаков И.Е., *Статистические методы проектирования систем управленя*, Машиностроене, 1969

56. Казаков И.Е., *Оценка точности метода статистической линеаризации исследования автоматических систем*, Труды IV Всесаюзного совиещания по автоматическому управлению, Наука, Москва, 1972

57. Казаков И.Е., *Статистическая теория систем управления в пространстве состаяний*, Наука, Москва, 1975

58. Казаков И.Е., Мальчиков С.В., *Анализ стохастических систем в пространстве состаяний*, Наука, Москва 1983

59. KIMURA K., SAKATA M., *Non-Stationary Responses of a Non-Symmetric, Non-Linear System Subjected to a Wide Class of Random Excitation*, J.Sound & Vibr., vol.76, No 2, 1981

60. Коловский М.З., *Об оценке точности решений получаемых методом статистической линеаризации*, Автоматика и Телемеханика, Т.27, Но 10, 1966

61. KOTTALAM J., LINDBERG K., WEST B.J., *Statistical replacement for systems with delta-correlated fluctuations*, Journal of Statistical Physics, vol.42, 5/6, 1986

62. LIN Y.K., *Probabilistic Theory of Structural Dynamics*, Mc Grow-Hill,New York, 1967

63. LIN Y.K., KOZIN F., WEN Y.K., CASCIATI F., SCHUELLER G., DER KIUREGHIAN A., DITLEVSEN O., VANMARCKE E.H., *Methods of stochastic structural dynamics*, Structural Safety, vol.3, 1986

64. LIN Y.K., CAI G.Q., *Equivalent stochastic systems*, Journal of Applied Mechanics, Transaction of ASME, vol.55, 1988

65. LYON R.H., *Equivalent Linearization of the Hard-Spring Oscillator*, J. Acoust. Soc. Amer., vol.32, 1960

66. LYON R.H., HECKL M., HAZLEGROVE C.B., *Narrow Band Excitation of the Hard-Spring Oscillator*, J.Acoust.Soc.Amer., vol.33, No 10, 1961

67. MALCZIKOW S.W., *An approximate method of statistical analysis of systems which contain nonlinearities of multiplicative type*, Awtomat.i Telemiech., T.34, No.10, 1973

68. MALCZIKOW S.W., *Determination of the distribution of the output variables of a multidimensional nonlinear system*, Awtom.i Telemech., T.34, No.11, 1973

69. MANOHAR C.S., IYENGAR R.N., *Random vibration of a limit cycle system*, Structural Engineering Laboratory, Dept.of Civil Engineering Indiana Institute of Science, Bangalore, Report No.1, 1990

70. MEL C., PAUL D.B., *Nonlinear Multi-Mode Response of Clamped Rectangular Plates to Acoustic Loading*, AIAA J., vol.24, 1986

71. MEL C., WOLFE H.F., *On Large Defletion Analysis in Acoustic Fatigue Design*, Random Vibration - Status and Recent Developments, Elsevier, Amsterdam, 1986

72. Моросанов И.С., Влияние флуктуации на релейные экстремалные системы в автоматибателном режиме. Автоматика и Телемиеханика, Т.21,Но 9, 1960

73. Моросанов И.С., Практические методы вычисленя коэффициентов линеаризации праизвольных нелинейностей, Автоматика и Телемеханика, Т.29, Но 10, 1968

74. Наумов Б.Н., Теоря нелинейных автоматических систем, Наука, Москва, 1972

75. NIGAM N.C., *Introduction to Random Vibrations*, The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, London, 1983

76. PAWLETA M., *Stochastic linearization of composite dynamic systems*, Mechanicka Teoretyczna i Stosowana (w druku)

77. Первозванский А.А., Приближенный метод исследования автоколебателных систем при наличи случайных воздействий, Изд. АН.СССР. ОТН, Механика и Машиностроение, Но 3, 1958

78. Первозванский А.А., Случайные процесы в нелинейных автоматических системах, Москва, Физматгиз, 1962

79. Пиатницки Г.И., Воздействие стационарных случайных процесов на систиемы автоматического регулирования, садержащие существенные элементы, Автоматика и Телемеханика, Т.21, Но 4, 1960

80. PISZCZEK K., *Metody stochastyczne w teorii drgań mechanicznych*, PWN, Warszawa, 1982

81. Попов Е.П., Об оценке качества нелинейных автоматических систем при случайных помехах, Автоматика и Телемеханика, Т.20, Но 10, 1959

82. Попов Е.П., Палтов И.П., Приближенные методы исследования нелинейных автоматических систем, Москва, Физматгиз, 1960

83. Popp K., Müller P.C., Windrich H., *Analysis of Nonlinear Stochastic Multibody Systems*, Dynamics of Multibody Systems IUTAM/IFToMM Symposium Udine 1985, ed.G.Bianchi and W.Schiehlen, Springer Verlag,Berlin, Heidelberg, 1986

84. Пугачев В.С., Теория случайных функции и её применение к задачам автоматического управления, Москва, Физматгиз, 1962

85. Пугачев В.С., Синицын И.Н., Стохастические дифференциалные системы, Москва, Наука, 1985

86. Пупков К.А., Метод исследования точности существенно нелинейных систем автоматического управления при помощи эквивалентной передаточной, Автоматика и Телемеханика, Т.21,Но 2, 1960

87. Пупков К.А., Статистический отчет нелинейных систем автоматического управления, Москва, Машиностроение, 1965

88. ROBERTS J.B., *Stationary Response of Oscillators with Non-linear Damping to Random Excitation*, J.Sound & Vibr., vol.50, 1976

89. ROBERTS J.B., *Response ofNonlinear Mechanical Systems to Random Excitation, Part 2: Equivalent Linearization and other Methods* , The Shock and Vibration Digest, vol.13, No 5, 1981

90. ROBERTS J.B., *Techniques for Nonlinear Random Vibration Problems* , The Shock and Vibration Digest, vol.16, No 2, 1984

91. ROBERTS J.B., DUNNE J.F., *Nonlinear vibration in mechanical systems*, The Shock and Vibration Digest, vol.20, No 6, 1988

92. ROBERTS J.B., SPANOS P.D., *Random vibration and statistical linearization*, J.Willey and Sons, 1990

93. SAKATA M., KIMURA K., *Calculation of the Non-Stationary Mean Square Response of Non-Linear System Subjected to Non-white Excitation* , J.Sound & Vibr., vol.73, No 3, 1976

94. SAWARAGI Y., SUGAI N., SUNAHARA Y., *Statistical Studies of Nonlinear Control Systems*, Nippon Printing and Publishing Co., Osaka, 1962

95. Синицин И.Н, Метод статистической линеаризации (обзор), Автоматика и Телемеханика, Т.35, Но 5, 1974

96. SOCHA L., *Equivalent linearization for dynamical systems excited by colored noise*, Z.Angew.Math.Mech., vol.70, No.6, 1990

97. SOONG T.T., *Random differential equations in science and engineering*, Academic Press, New York, 1973

98. SPANOS P.D., *Formulation of Stochastic Linearization for Symmetric and Assymmetric M.D.O. Nonlinear Systems*, J.Appl.Mech.Trans.ASME, vol.47, No 1, 1980

99. SPANOS P.D., *Stochastic Linearization in Structural Dynamics* , Applied Mechanics Reviews, vol.34, No 1, 1981

100. SPANOS P.D., LUTES L.D., *A primer of random vibration techniques in structural engineering*, The Shock and Vib. Dig., vol.18, No.4, 1986

101. TO C.W.S., *The Response of Nonlinear Structures to Random Excitation*, The Shock and Vibration Digest, vol.16, No 4, 1984

102. TO C.W.S., *Random vibration of nonlinear systems*, The Shock and Vibration Digest, vol.19, No.3, 1987

103. TO C.W.S., *Vibration analysis of systems with random parametric excitations*, The Shock and Vibration Digest, vol.21, No.2, 1989

104. TUNG C.C., *On the Response of Structure to Random Waves*, Prob.Offshore Mech.,Prog.Engrg.Sci., vol.7, (Ed.P.D.Spanos) 1985

105. TYLIKOWSKI A., MAROWSKI W., *Vibration of Non-linear single degree of Freedom system due to Poissonian Impulse Excitation*, Int.J.Non-linear Mech., vol.21, No 3, 1986

106. WEN Y.K., *Equivalent Linearization for Hysteretic Systems under Random Excitation*, J.Appl.Mech.Trans.ASME, vol.47, No 1, 1980

107. WEN Y.K., *Method for Random Vibration of Hysteretic Systems* , ASCE J. Engin. Mech. Div., vol.102, No 2, 1976

108. WEN Y.K., *Application of Random Vibration Method to Safety and Damage Analysis of Buldings and Structures, Random Vibration- Status and Recent Developments*, Elsevier, Amsterdam 1986

109. WICHER J., *O wspolczynnikach linearyzacji statystycznej w metodzie E.D.Zajdenberga*, Zagadnienia Drgań Nieliniowych, vol.12, 1971

110. Виндрих Х., Применение методов статистической линеаризации и усредниения дла систем с пределными циклами, Прикладная Механика, вол.24, Но 1, 1988

111. YOUNG G.E., CHANG R.J., *Prediction of the response of non-linear oscillators under stochastic parametric and external excitations*, Int.J.Non-linear Mech., vol.22, No 2, 1987

112. Зайденберг Е.Д., О третем способе статистической линеаризации одного класса нелинейных диффиеренциялных уравнений, Автоматика и Телемиеханика, Т.25, Но 2, 1964

113. ZHU W.Q., *Stochastic averaging methods in random vibration* , Applied Mechanics Review, vol.41, No.5, 1988

114. ZHU W.Q., YU J.S., *The equivalent nonlinear system method*, Journal Sound and Vibration, vol.129, No.3, 1989

Summary

The present state of the theory of statistical and equivalent linearization is surveyed in this paper. The most important approaches are discussed in details. Particularly the method of equivalent and statistical linearization and the problem of obtaining the moment equations and their stationary solutions are presented. The discussed methods are illustrated by examples.

Резюме

В статье сделано обзор новых работ по статистической линеаризации и представлено более подробно самые главные из них.

Особенно представлено методы эквивалентной и статистической линеаризации и проблемы получения уравнений моментов и их стационарных решений. Описанные методы проиллюстрированны примерами.

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 22 maja 1989 roku