MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
29, 1, 1991

MÉCANIQUE DES MILIEUX DÉNOMBRABLES. PROBLÈMES GÉNÉRAUX.

ROMAN NAGÓRSKI

L'École Politechnique de Varsovie

1. Introduction

Das le travail [1] on a présenté une conception de la mécanique des milieux dénombrables, i.e. des systèmes matériels dont des configurations peuvent-être déterminées à l'aide des suites (généralisées). On a exposé la génèse du thème, des assumptions générales (de la mécanque classique déterministe et phénomenologique) ainsi que des notions et équations fondamentales de la mécanique de tels milieux. On a discuté aussi quelques problèmes importants et propriétés des milieux dénombrables et on a indiqué sur des possibilités de leurs applications à modeler des phénomènes ou à formuler des problèmes de la mécanique des différents systèmes ou structures matériels.

Ce travail contient un développment des considérations du travail [1]. Nous présentons des éléments de la cinematique et de la dynamique des milieux dénombrables comme certaines généralisation des notions et des équations de mécanique analitique des systèmes à nombre fini des dégrés de liberté.

La forme mathématique proposée des notions et des equations est l'une des possibles. Elle est utilisable entre autre pour des systèmes matériels infinis, composés d' "éléments" isolés (discretement distribués) dans un espace configuration de référence. Un tel milieu dénombrable (linéaire) a été étudié dans le travail [2] qui contient des illustrations de considérations théoriques présentées dans cet article ainsi que certaines méthodes d'analyse qualitative et quantitative des milieux dénombrables dont un représentant est la structure étudiée. Mentionons que dans cet essai nous profitons des notions et des théorèmes de l' analyse mathématique moderne (surtout fonctionnelle), particulièrement des espaces des suites et leurs propriétés.

2. Espaces des suites

Nous commençons par une présentation brève des notions et des propriétés fondamentales des espaces vectoriels des suites infinies (generalisées). Ces espaces vont jouer un rôle essentiel dans les considérations contenues dans les paragraphes suivants.

Soit I un enseemble dénombrable (des indices i) et $\{V_i,\ i \in I\}$ une famille des espaces vectoriels sur le corps des reels $\mathcal{R}$, de Banach avec les normes $\|\cdot\|_i$ ou de Hilbert avec les produits scalaires $<\cdot,\cdot>_i$ $(i \in I)$. Admettonts aussi qu'ils sont séparables.

Notons par V_i' l'espace adjoint á V_i, par $\|\cdot\|_i'$ et $<\cdot,\cdot>_i'$ la norme duale á $\|\cdot\|_i$ et le produit dual des éléments de V_i' et V_i respectivement.

Soit V le produit direct des espaces V_i $(i \in I)$:

$$V = \{v = (v_i) = \{v_i \in V_i;\ i \in I\}\} \tag{2.1}$$

muni de structure de l'espace vectoriel avec les lois de composition:

$$\begin{aligned} v + w &= (v_i + w_i); \qquad v = (v_i), \quad w = (w_i) \in V, \\ av &= (av_i); \qquad v = (v_i) \in V, \quad a \in \mathcal{R}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

De la même façon définions l'espace vectoriel:

$$V' = \{v' = (v_i') = \{v_i' \in V_i';\ i \in I\}\}. \tag{2.3}$$

Soit ensuite:

$$\begin{aligned} l^p(V) &= \Big\{v = (v_i) \in V;\ \sum_{i\in i} \|v_i\|_i^p < \infty\Big\}, \qquad 1 \le p < \infty, \\ l^\infty(V) &= \Big\{v = (v_i) \in V;\ \sup_{i\in I} \|v_i\|_i < \infty\Big\}, \qquad p = \infty. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Ce sont les espaces de Banach par rapport aux normes:

$$\begin{aligned} \|v\|_p &= \Big(\sum_{i\in I} \|v_i\|_i^p\Big)^{\frac{1}{p}}, \qquad 1 \le p < \infty, \\ \|v\|_\infty &= \sup_{i\in I} \|v_i\|_i, \qquad p = \infty \end{aligned} \tag{2.5}$$

et séparables pour $1 \le p < \infty$.

Si $p = 2$ et si V_i sont de Hilbert alors $l^2(V)$ est aussi de Hilbert par rapport au produit scalaire:

$$< v, w >= \sum_{i\in I} < v_i, w_i >; \qquad v = (v_i), \quad w = (w_i) \in l^2(V). \tag{2.6}$$

Par le support de $v = (v_i) \in V$ nous comprenons:

$$\operatorname{supp} v = \{i \in I;\ \ v_i \neq 0\}. \tag{2.7}$$

En utilisant cette notion nous introduisons l'espace vectoriel des suites à support fini:

$$\overset{\circ}{l}(V) = \{v \in V;\ \operatorname{card}(\operatorname{supp} v) < \infty\}. \tag{2.8}$$

Il est normé par rapport à chacune des normes (2.4) et de plus:

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{l}(V) &\subset l^p(V), && 1 \leq p \leq \infty, \\ \operatorname{clos}(\overset{\circ}{l}(V)) &\underset{\|\cdot\|_p}{=} l^p(V), && 1 \leq p < \infty, \\ \operatorname{clos}(\overset{\circ}{l}(V)) &\underset{\|\cdot\|_\infty}{\subsetneq} l^\infty(V), && p = \infty, \end{aligned} \tag{2.9}$$

(ici l'operation de fermeture est au sens de convergence par rapport à la norme $\|\cdot\|_p$).

Soit:

$$\overset{\circ}{c}(V) \underset{\|\cdot\|_\infty}{=} \operatorname{clos}(\overset{\circ}{l}(V)). \tag{2.10}$$

Cet espace est séparable malgré que $l^\infty(V)$ ne soit pas présent.

Les espaces adjoints à $l^p(V)$ verifient les relations:

$$\begin{aligned} (l^p(V))' &= l^{p'}(V'), && 1 \leq p < \infty, \\ (l^\infty(V))' &\supset l^1(V'), && p = \infty, \end{aligned} \tag{2.11}$$

où:

$$p' = \frac{p}{1-p}, \qquad (\frac{1}{p} + \frac{1}{p} = 1). \tag{2.12}$$

Le produit dual a la forme:

$$< v', v > = \sum_{i \in I} < v'_i, v_i >_i . \tag{2.13}$$

Notons par $\overset{\circ}{l}'(V)$ l'espace de toutes les formes linéaires sur $\overset{\circ}{l}(V)$. Remarquons que:

$$V' \subset \overset{\circ}{l}'(V), \tag{2.14}$$

car pour tout $v' \in V'$ il est bien définie une forme linéaire (notée aussi par v'):

$$v'(v) = < v', v >' = \sum_{i \in I} < v'_i, v_i >'_i, \qquad v \in \overset{\circ}{l}(V). \tag{2.15}$$

Il est à noter que toutes les notions et propositions exposées dans ce paragraphe sont des généralisations "naturelles" des notions et des propositions respectives concernant les espaces des suites numériques discutées dans beacoup d'ouvrages sur l'analyse fonctionnelle (v. e.g. [3], [4]).

3. Éléments de la cinématique des milieux dénombrables

3.1. Milieu dénombrable. Espace de configuration.

Soit (D) un ensemble dénombrable composé d'elements (α), appelé à partir d'ici le milieu denombrable et soit D l'ensemble dénombrable des indices α (equinombré avec (D)), α -le "numéro" de élément (α).

Soit ensuite, une famille $\{X_\alpha,\ \alpha \in D\}$ des espaces vectoriels normés sur $\mathcal{R}$, nommés les espaces de configuration d'elements (α). Nous admettons qu'ils sont de Banach (avec des normes $\|\cdot\|_\alpha$) ou de Hilbert (avec des produits scalaires $<\cdot,\cdot>_\alpha$) et séparables.

Soit X le produit direct des X_α muni de la structure d'espace vectoriel (v.(2.1),(2.2)). Par l'espace de configuration du milieu (D) nous allons comprendre un sous-espace X_D de X, mini d'une structure d'espace de Banach avec une norme $\|\cdot\|_X$ ou d'espace de Hilbert avec un produit scalaire $<\cdot,\cdot>_X$ (v.(2.4)–(2.6) avec $V = X$ et $I = D$).

3.2. Fonction du mouvement. Vitesse et acceleration.

Soit $T = [0, \tau]$ l'intervalle de temps, X_D -l'espace de configuration du milieu dénombrable (D). Toute fonction:

$$T \ni t \longrightarrow x(t) \in X_D, \tag{3.1}$$

s'appelle la fonction (admissible) du mouvement de (D).

Par l'espace Y_D des fonctions du mouvement nous allons comprendre un sous-espace linéaire de l'espace vectoriel $Y = X_D^T$. En cas, dit classique, que nous allons considérer dans ce travail,on pose comme Y_D l'espace des fonction de classe $C^2(T, X_D)$ (i.e. des fonctions au moins deux fois continûment dérivables).

Soit donc $x = x(t)$ la fonction du mouvement de (D), par hypothése de classe $C^2(T, X_D)$ et:

$$v(t) = \dot{x}(t), \qquad a(t) = \ddot{x}(t) \quad (t \in T), \tag{3.2}$$

ses dérivées par rapport à t. Nous les appelons la vitesse et l'acceleration de (D) en instant t respectivement.

3.3. Liaisons

Le milieu (D) est dit libre si on ne met aucunes restrictions sur sa fonction du mouvement (sauf des assumptions sur la regularité). Au cas contraire (D) est appelé gêné (par des liaisons).

Dans ce travail nous ne considérons que des liaisons bilatérales,holonomes et stationnaires, décrites par l'équation:

$$f(x) = 0, \tag{3.3}$$

où $f: X_D \longrightarrow X_D$ est une fonction (donnée) de liaisons, par hypothèse continûment dérivable.

Toute fonction de Y_D vérifiante l'équation (3.3), i.e.

$$f(x(t)) = 0, \qquad t \in T \tag{3.4}$$

est dite admissible par les liaisons. Alors chaque configuration $x(t)$ est dans:

$$S = \ker f = \{x \in X_D;\ f(x) = 0\}. \tag{3.5}$$

Soit:

$$g: X_D \longrightarrow L(X_D); \qquad g(x) = \frac{df}{dx}(x), \tag{3.6}$$

($L(X_D)$ -l'espace des óperateurs bornés sur X_D) . En dérivant par rapport á t nous obtenons:

$$g(x(t))v(t) = 0, \tag{3.7}$$

i.e. $v(t) \in U(x(t))$ pour tout $t \in T$ oú:

$$U(x) = \ker g(x) = \{u \in X_D;\ g(x)u = 0\} \tag{3.8}$$

est un sous-espace linéaire fermé de X_D.

Toute fonction de $C^2(T, X_D)$:

$$\delta x:\ T \longrightarrow X_D; \qquad \delta x(t) \in U(x(t)), \quad (t \in T), \tag{3.9}$$

où $x = x(t)$ est une fonction du mouvement adminissible, s'appelle la fonction du mouvement virtuel et $u = \delta x(t)$ – le déplacement virtuel de (D) en instant t.

Les liaisons sont dites linéaires si la fonction f est linéaire et bornée (alors continûment dérivable). En ce cas:

$$S = U(x) = \ker f = U = \{u \in X_D;\ fu = 0\} \tag{3.10}$$

car $g(x) = f \quad (x \in X_D)$ (v.(3.5), (3.6)).

3.4. Configurations généralisées de Lagrange

Suppons qu il existe un espace de Banach Ψ_D avec une norme $\|\cdot\|_\Psi$ ou de Hilbert avec un produit scalare $< \cdot,\cdot >_\Psi$ et une aplication injective deux foins continûment dérivable:

$$\Psi_D \supset \Omega \longrightarrow S \subset X_D; \qquad x = \pi(\psi). \tag{3.11}$$

Alors (v.(3.4),(3.5)) $f(\pi(\psi)) = 0$ pour tout $\psi \in \Omega$.

L'espace Ψ_D est nommé l'espace de configuration de Lagrange, ψ -la configuration généralisée du milieu (D). Nous allons admettre que Ψ_D est de structure (2.1), i.e. Ψ_D est un sous-espace linéaire de l'space vectoriel:

$$\Psi = \{\psi = (\psi_\lambda) = \{\psi_\lambda \in \Psi_\lambda;\ \lambda \in \Lambda\}\}, \tag{3.12}$$

oú Λ est un ensemble au plus dénombrable, Ψ_λ sont des espaces vectoriels sur $\mathcal{R}$, de Banach (avec des normes $\|\cdot\|_\lambda$) ou de Hilbert (avec des produits scalaires $< \cdot, \cdot >_\lambda$) et séparables.

Toute fonction de clase $C^2(T, \Psi_D)$:

$$T \ni t \longrightarrow \psi(t) \in \Omega \tag{3.13}$$

est dite la fonction généralisée (de Lagrange) du mouvement de (D) (car $x = \pi(\psi(t))$ est une fonction du mouvement admissible).

Dans la suite nous allons dire simplement: l'espace de configuration Ψ_D, la configuration ψ, la fonction du mouvement $\psi = \psi(t)$ etc.

En vertu de (3.11) et (3.13) nous trouvons les règles de calcul des vitesses et des accelérations ainsi que des déplacements virtuels de (D):

$$\begin{gathered} v(t) = \rho(\psi(t))\dot{\psi}(t), \\ a(t) = \sigma(\psi(t))(\dot{\psi}(t), \dot{\psi}(t)) + \rho(\psi(t))\ddot{\psi}(t), \\ \delta x(t) = \rho(\psi(t))\delta\psi(t), \end{gathered} \tag{3.14}$$

o'u:

$$\begin{aligned} &\rho:\ \Omega \longrightarrow L(\Psi_D; X_D); \qquad \rho = \frac{d\pi}{d\psi}, \\ &\sigma:\ \Omega \longrightarrow L^2(\Psi_D; X_D); \qquad \sigma = \frac{d^2\pi}{d\psi^2}, \end{aligned} \tag{3.15}$$

($\delta\psi = \delta\psi(t)$ est une fonction quelconque de casse $C^2(T, \Psi_D)$, $L(\Psi_D, X_D)$, $L^2(\Psi_D, X_D)$ -les espaces des applications continues lineairés et bilinéaires de Ψ_D dans X_D).

Admettons aussi que tout $u \in U(x)$ avec $x = \pi(\psi)$ s'exprime par:

$$u = \rho(\psi)\varphi, \qquad \varphi \in \Psi_D. \tag{3.16}$$

En cas des liaisons linéaires on pose l'application (3.11) linéaire et bornée, i.e:

$$\pi : \Psi_D \longrightarrow U \subset X_D; \quad x = \pi\psi. \tag{3.17}$$

En conséquence (v.(3.14)-(3.17)):

$$\begin{gathered} v(t) = \pi\dot{\psi}(t), \qquad a(t) = \pi\ddot{\psi}(t), \\ \delta x(t) = \pi\sigma\psi(t), \qquad u = \pi\varphi, \end{gathered} \tag{3.18}$$

car $\rho(\psi) = \pi$, $\sigma(\psi) = 0$.

4. Éléments de la dynamique des milieux dénombrables

4.1. Équation du mouvement

Nous commencons par la loi (l'equation) du mouvement du milieu dénombrable (D) . Nous postulons pour que cette équation soit une généralization de la loi de Newton. Nous présentons quelques resultats considérés comme classiques.

Soit X_D l'espace de configuration de (D) , $x = x(t)$ sa fontion du mouvement (de classe $C^2(T, X_D)$) , X'_D -l'espace adjoint á X_D.

Soit $M : X_D \longrightarrow X'_D$ une application linéaire (donnée), dite l'operateur de masse ou d'inertie de (D) , $F : T \times S_x \times S_v \longrightarrow X'_D(S_X, S_v \subset X_D)$ une application (donnèe), dite la fonction des forces actives agissantes sur (D) et $R : T \longrightarrow X'_D$ une application (inconnue), applée la fonction des réactions des liaisons (de l'équation (3.3)).

Nous postulons que la fonction du mouvement réel de (D) vérifie l'équation suivante, nommée l'équation du mouvement:

$$M\ddot{x}(t) = F(t, x(t), \dot{x}(t)) + R(t), \quad t \in T. \tag{4.1}$$

Admettons aussi que les liaisons sont parfaites, i.e:

$$< R(t), u >'_X = 0 \tag{4.2}$$

pour tout $u \in U(x(t))$ et $t \in T$, où $< \cdot, \cdot >'_X$ denote le le produit dual des elements de X'_D et X_D .

En substituant $R(t)$ dans (4.2) par son expression tirée de (4.1) nous obtenons:

$$< M\ddot{x}(t), u >'_X = < F(t, x(t), \dot{x}(t)), u >'_X, \quad u \in U(x(t)), \quad t \in T. \tag{4.3}$$

Remarquons que l'operateur M définit uniquement la forme bilinéaire $\mathcal{M}: X_D \times X_D \longrightarrow \mathcal{R}$, dite la forme d'inertie,

$$\mathcal{M}(a, u) = < Ma, u >'_X, \tag{4.4}$$

continue par rapport á u. De mene F definit la fonctionnelle $\mathcal{F} : (T \times S_X \times S_V) \times X_D \longrightarrow \mathcal{R}$:

$$\mathcal{F}(t, x, v; u) = < F(t, x, v), u >'_X \tag{4.5}$$

linéaire et continue par rapport à u. L'equation (4.3) prend alors la forme:

$$\mathcal{M}(\ddot{x}(t), u) = \mathcal{F}(t, x(t), \dot{x}(t); u), \quad u \in U(x(t)), \quad t \in T. \tag{4.6}$$

4.2. Théorème des travaux virtuels

Soit $\delta x = \delta x(t)$ fonction quelconque de mouvement virtuel (v.(3.9)). Posons $u = \delta x(t)$ dans (4.3). Nous obtenons l'equation:

$$< M\ddot{x}(t), \delta x(t) >'_X = < F(t, x(t), \dot{x}(t)), \delta x(t) >'_X, \quad t \in T. \tag{4.7}$$

Les équations (4.7) et (4.3) sont equivalentes, car (4.7) implique (4.3). En effet, pour $\bar{t} \in T$ et $u \in U(x(\bar{t})$ arbitraires il existe $\delta x = \delta x(t)$ de classe $C^2(T, X_D)$ et telle que $\delta x(\bar{t}) = u$. En écrivant (4.7) en instant $\bar{t}$ nous avons l'équation (4.3). Comme $\bar{t}$ est arbitraire nous arrivons à la thèse.

L'équation (4.7) exprime le théorème des travaux virtuels car les expressions à gauche et à droite du signe d'égalité peuvent-être considérées comme le travail virtuel des forces d'inertie et des forces actives respectivement.

Autre forme de (4.7) est (v.(4.4)-(4.6)):

$$\mathcal{M}(\ddot{x}(t), \delta x(t)) = \mathcal{F}(t, x(t), \dot{x}(t); \delta x(t)), \quad t \in T \tag{4.8}$$

pour toute $\delta x = \delta x(t)$ (respective).

4.3. Théorèmes de l'energie

Suppons que la forme $\mathcal{M}$ est symétrique et continue. En posant $u = \dot{x}(t)$ (en vue (3.7), (3.8)) et tenant compte de:

$$\mathcal{M}(\ddot{x}(t), \dot{x}(t)) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\mathcal{M}(\dot{x}(t), \dot{x}(t))$$

en (4.6) nous déduisons l'équation:

$$\frac{d}{dt}\mathcal{E}(t) = \mathcal{P}(t), \quad t \in T, \tag{4.9}$$

qui exprime le théorème de l'énérgie cinétique car:

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2}\mathcal{M}(\dot{x}(t), \dot{x}(t)) \tag{4.10}$$

nous pouvons nommer l'énergie cinétique de (D) et :

$$\mathcal{P}(t) = \mathcal{F}(t, x(t), \dot{x}(t); \dot{x}(t)) = < F(t, x(t), \dot{x}(t)), \dot{x}(t) >'_X \tag{4.11}$$

la puissance des forces (activites) agaissantes sur (D).

Si ces forces sont potentielles, i.e. s'il existe $\mathcal{U}: X_D \longrightarrow \mathcal{R}$ continûment dérivable telle oue:

$$F = -\frac{d\mathcal{U}}{dx} \tag{4.12}$$

(pour $F = F(x)$ seulement), alors (4.9) entraîne:

$$\mathcal{E}(t) + \mathcal{U}(t) = \text{const}, \qquad t \in T \tag{4.13}$$

car (v.(4.5), (4.11))

$$\mathcal{P}(t) = < -\frac{d\mathcal{U}}{dx}(x(t)), \dot{x}(t) >'_X = -\frac{d}{dt}\mathcal{U}(x(t)).$$

L'équation (4.13) exprime le théorème de l'integrale d'énérgie totale $\mathcal{E} + \mathcal{U}$.

4.4. Equation de Lagrange de premier genre

Soit $\lambda: T \longrightarrow X'_D$ une fonction continue sur T, dite le multiplicateur de Lagrange. Pour tout $t \in T$ on a (v.(3.8)):

$$< \lambda(t), g(x(t))u >'_X = 0, \tag{4.14}$$

quelque soit $u \in U(x(t))$ ($x = x(t)$-la fontion du mouvement de (D)).

En vertu de (4.1) et (4.14) nous pouvons écrire:

$$< [M\ddot{x}(t) - F(t, x(t), \dot{x}(t)) - \lambda(t) \circ g(x(t))], u >'_X = 0 \tag{4.15}$$

pour tout $u \in U(x(t))$, $t \in T$.

S'il existe $\lambda = \lambda(t)$ tel que:

$$M\ddot{x}(t) - F(t, x(t), \dot{x}(t)) - \lambda(t) \circ g(x(t)) = 0, \quad t \in T, \tag{4.16}$$

nous obtenons ainsi le résultat connu sous le nom d'équation de Larange de premier genre.

En comparant (4.16) avec (4.1) nous déduisons:

$$R(t) = \lambda(t) \circ g(x(t)), \qquad t \in T. \tag{4.17}$$

4.5. Équation de Lagrange de deuxième genre

Supposons que la forme d'inertie $\mathcal{M}$ est symétrique et continue. Soit Ψ_D l'espace de configuration de Lagrange (v.par.3.4). En substituant $x, \dot{x}, \delta x$ par les expressions (3.14) nous transformons l'équation (4.8) à la forme (analogiquement comme en mécanique analitique):

$$< \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial psi} - \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \psi}, \delta\psi >_{\Psi} = < \Phi(t, \psi, \dot{\psi}), \delta\psi >'_{\Phi}, \qquad t \in T, \tag{4.18}$$

où en vue de (4.10) et de (4.5)

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}\mathcal{A}(\psi)(\psi, \dot{\psi}) = \frac{1}{2}\mathcal{M}(\rho(\psi)\dot{\psi}, \rho(\psi)\dot{\psi}); \qquad \mathcal{A} : \Omega \longrightarrow L^2(\Psi_D, \mathcal{R}),$$

$$< \Phi(t, \psi, \dot{\psi}), \delta\psi >'_{\Phi} = < F(t, \pi(\psi), \rho(\psi)\dot{\psi}), \rho(\psi)\delta\psi >'_X \tag{4.19}$$

($< \cdot, \cdot >'_{\Psi}$ dénote le produit dual des elements de Ψ'_D et Ψ_D, Ψ'_D -l'espace adjoint á Ψ_D).

Nous pouvons ecrire aussi (v.(4.4)):

$$\mathcal{A}(\psi)(\varphi_1, \varphi_2) = \mathcal{M}(\rho(\psi)\varphi_1, \rho(\psi)\varphi_2) = < (M \circ \rho(\psi))\varphi_1, \rho(\psi)\varphi_2 >'_X =$$

$$= < (\rho'(\psi) \circ M \circ \rho(\psi))\varphi_1, \varphi_2 >'_{\Psi} = < A(\psi)\varphi_1, \varphi_2 >'_{\Psi},$$

$$< F(t, \pi(\psi), \rho(\psi)\dot{\psi}), \rho(\psi)\varphi >'_X = < \varphi'(\psi) \circ F(t, \pi(\psi), \rho(\psi)\dot{\psi}), \varphi >'_{\Psi} = \tag{4.20}$$

$$= < \Phi(t, \psi, \dot{\psi}), \varphi >'_{\Psi}, \qquad (\varphi, \varphi_1, \varphi_2 \in \Psi_D),$$

d' où

$$A : \Omega \longrightarrow L(\Psi_D, \Psi'_D); \qquad A(\psi) = \rho'(\psi) \circ M \circ \rho(\psi),$$

$$\Phi : T \times \Omega \times \Psi_D \longrightarrow \Psi'_D; \qquad \Phi(t, \psi, \dot{\psi}) = \rho'(\psi)F(t, \pi(\psi), \rho(\psi)\dot{\psi}), \tag{4.21}$$

où $\rho' : \Omega \longrightarrow L(X'_D, \Psi'_D)$ est l'application adjointe à ρ , définie à l'aide de la formule:

$$< \rho'(\psi)u', \varphi >'_{\Psi} = < u', \rho(\psi)\varphi >'_X, \qquad u' \in X'_D, \quad \rho \in \Psi_D \tag{4.22}$$

pour tout $\psi \in \Omega \subset \Psi_D$.

L'application Φ est dite la fonction généralisée des forces actives agissantes sur (D) , $\mathcal{M}$ -la forme généralisée d'inertie, A -l'opérateur généralisé d'inertie de (D).

Comme $\delta\psi(t)$ est arbitraire, l'équation (4.18) implique:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \dot{\psi}} - \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \psi} = \Phi, \qquad t \in T. \tag{4.23}$$

Cette forme d' équation du mouvement est connue sous le nom d' équation de Lagrange de deuxième genre.

Si $\mathcal{A}$ et A ne dépendent pas de ψ (e.g. si l'application π est linéaire – v.(3.17),(3.18)), alors (4.23) prend la forme (v.(4.19)–(4.22) avec $\rho'(\psi) = \pi'$):

$$A\ddot{\psi}(t) = \Phi(t, \psi(t), \dot{\psi}(t)), \qquad t \in T \tag{4.24}$$

équivalente à

$$\mathcal{A}(\ddot{\psi}(t), \varphi) = < \Phi(t, \psi(t), \dot{\psi}(t)) >', \qquad \varphi \in \Psi_D, \quad t \in T. \tag{4.25}$$

L' équation (4.24) est semblable à (4.1), mais elle ne contient pas de fonction des réactions des liaisons.

4.6. Une généralisation des équations du mouvement

Soit X_D l'espace de configuration du milieu (D) , $x = x(t)$ -sa fonction du mouvement de classe $C^2(T, X_D)$ et soit $\overset{\circ}{l'}(X)$ – l' espace des formes linéaires sur $\overset{\circ}{l}(X)$ (v.2.7),(2.8) avec $V = X$, $I = D$), $\overset{\circ}{X'}$ -un sous-espace linéaire de $\overset{\circ}{l'}(X)$.

Soit ensuite $M : X_D \longrightarrow \overset{\circ}{X'}$ une application linéaire (donnée), dite l'operateur d'inertie, $F: T \times S_x \times S_v \longrightarrow \overset{\circ}{X'}$ ($S_x, S_v \subset X_D$ une fonction (donnée) des forces actives agissantes sur (D) et $R: T \longrightarrow \overset{\circ}{X'}$ une fonction (inconnue) des réactions des liaisons de l' équation (3.3).

Nous postulons l'équation du mouvement de (D) dans la forme:

$$M\ddot{x}(t) = F(t, x(t), \dot{x}(t)) + R(t), \qquad t \in T. \tag{4.26}$$

Admettons aussi que les liaisons sont parfaites au sens suivant:

$$< R(t), u >'_X = 0 \tag{4.27}$$

pour tout $u \in \overset{\circ}{U}(x(t))$ et $t \in T$ où:

$$\overset{\circ}{U}(x) = U(x) \cap \overset{\circ}{l}(X) \tag{4.28}$$

avec $U(x)$ déterminé à l'aide de (3.8) ($< u', u >'_X = u'(u)$ pour $u' \in \overset{\circ}{l'}(X)$, $u \in \overset{\circ}{l}(X)$).

Les équations (4.27) et (4.28) se ramènent á

$$< M\ddot{x}(t), u >'_X = < F(t, x(t), \dot{x}(t)), u >'_X, \qquad u \in \overset{\circ}{U}(x(t)), \quad t \in T. \tag{4.29}$$

Si nous posons $\overset{\circ}{X}' = X'_D$ et si $\overset{\circ}{l}(X)$ est dense dans X_D (e.g. pour $X_D = l^p(X)$ avec $1 \leq p < \infty$ ou $X_D = \overset{\circ}{c}(X)$ – v.par.2) et si clos$\overset{\circ}{U}(x) = U(x)$ pour tout $x \in S$ (v.(4.28)), alors l' quation (4.29) est équivalente à (4.3).

La forme (4.29) d'équation du mouvement ne pert pas, en générale, dériver les théorémes des travaux virtuales (par.4.2) et de l'énérgie (par.4.3) et les équations de Lagrange (par.4.4, 4.5). Ci-dessous nous montrons comment on peut obtenir l'équation du type de Lagrange (de deuxième genre), mais sous certaines hypothèses supplémentaires.

Admettons que les liaisons sont linéaires (v.(3.10),(3.17),(3.18)) et:

$$\pi(\overset{\circ}{l}(\Psi)) \subset \overset{\circ}{U} = U \cap \overset{\circ}{l}(X). \tag{4.30}$$

Soit $\psi = \psi(t)$ la fonction généralisée du mouvement de classe $C^2(T, \Psi_D)$: En tenant compte de (3.18) et de :

$$u = \pi\varphi \in \overset{\circ}{U} \qquad \text{pour} \qquad \varphi \subset \overset{\circ}{l}(\Psi) \tag{4.31}$$

dans l'équation (4.29) nous obtenons:

$$< (M \circ \pi)\ddot{\psi}(t), \pi\varphi >'_X = < F(t, \pi\psi(t), \pi\dot{\psi}(t)), \pi\varphi >'_X .$$

Á l'aide de l'application $\pi' : \overset{\circ}{l'}(X) \longrightarrow \overset{\circ}{l'}(\Psi)$ adjointe á π, définie par la formule (v.(4.22)):

$$< \pi' u', \varphi >'_\Psi = < u', \pi\varphi >'_X, \qquad u' \in \overset{\circ}{l}(X), \quad \varphi \in \overset{\circ}{l}(\Psi), \tag{4.32}$$

nous transformons ladite equation à la forme:

$$< A\ddot{\psi}(t), \varphi >'_\Psi = < \Phi(t, \psi(t), \dot{\psi}(t)). \varphi >'_\Psi, \qquad \varphi \in \overset{\circ}{l}(\Psi), \quad t \in T, \tag{4.33}$$

avec

$$\begin{aligned} A &: \Psi_D \longrightarrow \overset{\circ}{l'}(\Psi); & A &= \pi' \circ M \circ \pi, \\ \Phi &: T \times \Psi_D \times \Psi_D \longrightarrow \overset{\circ}{l'}(\Psi); & \Phi(t, \psi, \dot{\psi}) &= \pi' \circ F(t, \pi\psi, \pi\dot{\psi}), \end{aligned} \tag{4.34}$$

$(< \varphi', \varphi >= \varphi'(\varphi)$ pour $\varphi' \in \overset{\circ}{l'}(\Psi)$, $\varphi \in \overset{\circ}{l}(\Psi))$.

De (4.33) il s'en suit:

$$A\ddot{\psi}(t) = \Phi(t, \psi(t), \dot{\psi}(t)), \qquad t \in T, \tag{4.35}$$

qui est l'équation du type Lagrange énoncée (v.4.24)); A est l'opérateur (généralisé) d'inertie, Φ -la fonction (généralisée) des forces actives.

5. Problème de Cauchy

Ci-dessous nous allons étudier l'existence et l' unicité de la solution du probème de Cauchy des milieux dénombrables. Nous allons nous occuper de quelques cas classiques, mais fondamentaux, correspondant aux considérations contenues au par.4.

5.1. Premier cas

Considérons l'équation du mouvement (4.1) ramenée á l'aide du formalisme du Lagrange á l' équation différentielle (4.23). Étudions un cas particulier, i.e. celui des liaisons linéaires pour lequel l' équation (4.23) prend la forme (4.24).

À cette équation nous adjoignons les conditions initiales:

$$\psi(0) = \overset{\circ}{\psi}, \qquad \dot{\psi}(0) = \overset{\circ}{\varphi}, \tag{5.1}$$

où $(\overset{\circ}{\psi}, \overset{\circ}{\varphi})$ est un couple donné de $\Psi_D \times \Psi_D$.

Proposition 1. Si A et Φ vérifient les conditions

1° $\|A\psi\|'_{\Psi} \geq c\|\psi\|_{\Psi}$ pour tout $\psi \in \Psi_D$ où c est une constante positive,

2° Φ: $T \times \Psi_D \times \Psi_D \longrightarrow \mathrm{Im}(A) \subset \Psi'_D$ est continue et lipschitzienne, i.e.

$$\|\Phi(t,\psi_1,\varphi_1) - \Phi(t,\psi_2,\varphi_2)\|'_{\Psi} \leq C \sup(\|\psi_1 - \psi_2\|_{\Psi}, \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{\Psi})$$

où C est une constante positive, $(\psi_1,\varphi_1),(\psi_2,\varphi_2) \in \Psi_D \times \Psi_D$, $t \in T$, alors le problème de Cauchy (4.24),(5.1) a une solution $\psi = \psi(t)$ de classe $C^2(T,\Psi_D)$ qui est unique.

En effect, en vertu de l'hypothèse 1° l' équation (4.24) est équivalente à:

$$\ddot{\psi} = A^{-1}\Phi(t,\psi,\dot{\psi}),$$

où A^{-1} existe et est borné. En appliquant à cette équation le théorème fondamental (de Piccard) de la théorie des équations différentielles ordinaires (v. e.g.[5]) concernant le cas lipschitzien (en vue de la condition 2° et du fait que composition $A^{-1} \circ \Phi$ est aussi continue et lipschitzienne) nous arrivons á la thèse.

5.2. Deuxième cas

Comme dans le par.5.1. considérons l' équation du mouvement (4.1) ramenée à l'aide du formalisme de Lagrange à la forme (4.25) (sous l'hypothèse de linéarité des liaisons). Admettons en outre que l'space Ψ_D est hilbertien (le produit $< \cdot, \cdot >'_\Psi$ dévient le produit scalaire $< \cdot, \cdot >_\Psi$, $\Psi'_D = \Psi_D$).

Nous adjoignons á l' équation (4.25) les conditions initiales (5.1).

Proposition 2. Si $\mathcal{A}$ et Φ vérifient les conditions

1° la forme $\mathcal{A}$ est continue et strictement positive, i.e.:

$$c_1 \|\psi\|^2_\Psi \leq \mathcal{A}(\psi, \psi) \leq c_2 \|\psi\|^2_\Psi,$$

ou c_1, c_2 des constantes positives,

2° Φ: $T \times \Psi_D \times \Psi D \longrightarrow \Psi_D$ est continue et lipschitzienne, i.e.

$$\|\Phi(t, \psi_1, \varphi_1) - \Phi(t, \psi_2, \varphi_2)\|_\Psi \leq C(\sup \|\psi_1 - \psi_2\|_\Psi, \|\varphi_1 - \varphi_2\|_\Psi),$$

oú C est une constante positive ($(\psi_1, \varphi_1), (\psi_2, \varphi_2) \in \Psi_D \times \Psi_D$, $t \in T$), alors le problème de Cauchy (4.25),(5.1) a une solution de classe $C^2(T, \Psi_D)$ qui est unique..

En effet, la forme $\mathcal{A}$ étant bilinéaire, symétrique (en vue de $(4.20)_1$ de symètrie, bilinèarité de $\mathcal{M}$ et linéarité de $\rho(\psi) = \pi$), strictement positive et continue (en vue de la condition 1°) définit produit scalaire sur Ψ_D:

$$< \psi_1, \psi_2 >_\mathcal{A} = \mathcal{A}(\psi_1, \psi_2),$$

tel que la norme $\|\psi\|_\mathcal{A} = < \psi, \psi >^{\frac{1}{2}}_\mathcal{A}$ est équivalente à la norme $\|\psi\|_\Psi$. L' espace $\Psi_\mathcal{A} = \Psi_D$ est donc hilbertien par rapport au produit $< \cdot, \cdot >_\mathcal{A}$.

En vertu du théorème de Riesz il existe l'application $\Psi_D \ni \Phi \rightarrow \Phi_\mathcal{A} \in \Psi_\mathcal{A}$ telle que $< \Phi, \varphi >_\Psi = < \Phi_\mathcal{A}, \varphi >_\mathcal{A}$ pour tout $\varphi \in \Psi_\mathcal{A} = \Psi_D$. Alors l' équation (4.25) prend la forme:

$$< \ddot{\psi}, \varphi >_\mathcal{A} = < \Phi_\mathcal{A}, \varphi >_\mathcal{A}, \qquad \varphi \in \Psi_\mathcal{A}, \quad t \in T,$$

d' oú:

$$\ddot{\psi}(t) = \Phi_\mathcal{A}(t, \psi(t), \dot{\psi}(t)), \qquad t \in T.$$

De plus $\Phi_\mathcal{A} = \Phi_\mathcal{A}(t, \psi, \dot{\psi})$ est continue par rapport à $(t, \psi, \dot{\psi})$ et lipschitzienne par rapprt à $(\psi, \dot{\psi})$ (en vue la condition 2° et de l' équivalence des normes $\|\cdot\|_\mathcal{A}$ et $\|\cdot\|_\Psi$).

La dernière équation remplit donc les hypothèses du théor'eme fondamental de la théorie des équations différentielles (ordinaires) d' où la thèse de la proposition.

5.3. Troisième cas

Considérons maintenant l'équation (4.26) ramenèe la forme (4.35) (sous les hypothèses nommées au par 4.5.). Nous adjoignons les conditions initiales (5.1).

Proposition 3. Soit Ψ_A un espace de Banach avec la norme $\|\cdot\|_A$ étant sous-espace de $\overset{\circ}{l'}(\Psi)$. Si:
1° $A\colon \Psi_D \longrightarrow \Psi_A$ remplit la condition:

$$\|A\psi\|_A \geq c\|\psi\|_\Psi, \qquad \psi \in \Psi_D \quad (c = \text{const} > 0),$$

2° $\Phi\colon T \times \Psi_D \times \Psi_D \longrightarrow \mathrm{Im}(A)$ est continue et lipschitzienne au sens:

$$\|\Phi(t,\psi_1,\varphi_1) - \Phi(t,\psi_2\varphi_2)\|_A \leq C \sup(\|\psi_1 - \psi_2\|_\Psi, \|\varphi_1 - \varphi_2\|_\Psi)$$

avec $C = \text{const} > 0$ et pour $(\psi_1,\varphi_1),(\psi_2,\varphi_2) \in \Psi_D \times \Psi_D$, $t \in T$, alors le probléme de Cauchy (4.35),(5.1) a une solution de classe $C^2(T,\Psi_D)$ qui est unique. La preuve est analogique à celle de la proposition 1.

Cet article contient des résultats du travail effectué dans le cadre du Problème Central des Recherches Fondamentales 02.05.

Références

1. NAGÓRSKI R., *Sur une conception de la mécanique des milieux dénombrables,* Mech.Teor. i Stos. (Méc.Théor. et Appl.), 27,1,1989
2. NAGÓRSKI R., WIŚNIAKOWSKI P.,*Mécanique des milieux dénombrables. Milieux infinis discrets,* Mech.Teor. i Stos. (Méc.Theór. et Appl.) 29,1,1991
3. BACHMAN G., NARICI L., *Functional Analysis,* New York 1966
4. KANTOROVITCH L.W., AKILOV G.P., *Analyse fonctionnelle dans les espaces normés (en russe),* Moscou 1959
5. SCHWARTZ L., *Analyse mathématique,* Herman, Paris 1967

Streszczenie

Praca dotyczy układów materialnych, których konfiguracje mogą być określane za pomocą ciągów uogólnionych. Zawiera ona pewne rozwinięcie koncepcji mechaniki takich układów, zwanych ośrodkami przeliczalnymi [1]. Przy założeniach klasycznej mechaniki przedstawiono elementy kinematyki i dynamiki ośrodków przeliczalnych jako pewne uogólnienie pojęć i równań mechaniki analitycznej układów o skończonej liczbie stopni swobody. Przedstawione rozważania o charakterze teoretycznym zilustrowano w pracy [2] przykładem analizy nieskończonego układu izolowanych cząstek materialnych.

Summary

The paper deals with material systems configurations of which can be determined by means of infinite sequences. It contains a development of the concept of mechanics of such systems named countable media [1]. Under the assumptions of the classical deterministic mechanics some elements of the kinematics and dynamics of countable media are presented. These constitute a generalization (one of the possible) of notions and equations of analytical mechanics of the systems with finite number of degrees of freedom. The theoretical considerations presented in the paper are illustrated in [2] by an example of analysis of system of material particles.

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 15 czerwca 1988 roku