

## ROZWIĄZANIE ZADANIA O BRACHISTOCHRONIE METODĄ MAKSIMUM PONTRIAGINA

STANISŁAW DUBIEL

ANDRZEJ HOMZIUK

*Wojskowa Akademia Techniczna, Warszawa*

### 1. Wprowadzenie

W 1669 roku Jan Bernoulli opublikował list, w którym zwraca uwagę matematyków na zadanie o linii najszybszego spadku – brachistochronie. W zadaniu tym należy znaleźć linię łączącą dwa dane punkty  $A$  i  $B$ , nie leżące na jednej prostej pionowej, mającą tę właściwość, że punkt materialny spada wzdłuż tej linii z punktu  $A$  do punktu  $B$  w najkrótszym czasie. Rozwiązanie tego zadania podali: Jan Bernoulli, Jakub Bernoulli, Newton i de l'Hospital. Okazało się, że linią najszybszego spadku jest cykloida.

Zadanie o brachistochronie oraz podobnie sformułowane zadania o liniach geodezyjnych (należy znaleźć linię o najmniejszej długości, która łączy dane punkty na pewnej powierzchni) czy zadania izoperymetryczne (znaleźć linię zamkniętą o danej długości  $l$ , która ogranicza maksymalne pole  $S$ ) inspirowały do poszukiwań nowych sposobów rozwiązywania tego typu problemów. Zaczęła rozwijać się nowa gałąź matematyki: rachunek wariacyjny.

W latach pięćdziesiątych naszego stulecia rozpoczęła burzliwy rozwój matematyczna teoria sterowania optymalnego. Początkowo bazowała ona wyłącznie na rachunku wariacyjnym, by z czasem dopracować się własnych metod badawczych takich jak: programowanie dynamiczne Bellmana czy zasada maksimum Pontriagina. Szczególnie zasada maksimum podana początkowo przez Pontriagina jako hipoteza a następnie udowodniona przez Gamkrelidze (dla układów liniowych) i Boltiańskiego (dla układów nieliniowych), stała się powszechnie wykorzystywaną metodą badawczą. Rozszerzenie tej zasady dla różnego rodzaju całkowych i niecałkowych wskaźników jakości, ruchomych końców czy więzów na sterowania i zmienne stanu, uczyniło z niej metodę znacznie bardziej uniwersalną od metod wypływających z rachunku wariacyjnego. Uniwersalność zasady maksimum Pontriagina nie oznacza jednak, że przy jej pomocy rozwiązać można dowolnie sformułowane zagadnienie.

Problem znacznie komplikuje się w przypadkach, gdy poszukujemy rozwiązań w postaci zamkniętej a w rozwiązaniach występują sterowania osobliwe. Do takiej grupy zadań należy właśnie zadanie o brachistochronie. Dlatego też w literaturze przedmiotu brak jest dotychczas takiego rozwiązania. Okazuje się jednak, że umiejętne stosowanie zasady maksimum Pontriagina (w artykule zastosowano niekonwencjonalne przekształcenie funkcji Hamiltona) i w takich przypadkach pozwala na uzyskanie rozwiązań.

### Stosowane oznaczenia

$t$	-	czas,
$t_0, t_1$	-	czas rozpoczęcia i zakończenia sterowania,
$x, y$	-	współrzędne położenia obiektu na płaszczyźnie $Oxy$ ,
$V$	-	prędkość lotu obiektu,
$a_z$	-	przyspieszenie normalne,
$g$	-	przyspieszenie ziemskie,
$u$	-	sterowanie,
$\lambda$	-	zmienna sprzężona do zmiennej przestrzeni konfiguracji,
$\bar{\lambda}$	-	zmienna sprzężona do zmiennej przestrzeni konfiguracji transformowana,
$H(\lambda, x, y, u)$	-	funkcja Hamiltona.

## 2. Sformułowanie problemu

Przyjmijmy układ równań ruchu obiektu w płaszczyźnie pionowej:

$$\begin{aligned}\dot{V} &= g \sin u, \\ \dot{x} &= V \cos u, \\ \dot{y} &= V \sin u,\end{aligned}\tag{2.1}$$

gdzie:  $u$  – sterowanie kątem pochylenia wektora prędkości,  $V$  – prędkość obiektu,  $x, y$  – współrzędne położenia obiektu sterowania.

Ponieważ:

$$\frac{dV}{dy} = \frac{g}{V},$$

co oznacza, że:

$$V = \sqrt{2gy + V_0^2},$$

ostatecznie otrzymamy z (2.1):

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sqrt{2gy + V_0^2} \cos u, \\ \dot{y} &= \sqrt{2gy + V_0^2} \sin u.\end{aligned}\quad (2.2)$$

Poszukujemy takiego sterowania  $u_{opt}$ , które przeprowadza obiekt z punktu  $A(x_0, y_0)$  do punktu  $B(x_1, y_1)$  w minimalnym czasie tj. przy minimum funkcjonału jakości:

$$I = \int_{t_0}^{t_1} dt. \quad (2.3)$$

Tak sformułowane zadanie w pełni pokrywa się z klasycznym zadaniem o brachistochronie.

### 3. Rozwiązanie zadania

Na podstawie równań ruchu obiektu (2.2) oraz wskaźnika jakości (2.3) otrzymamy funkcję Hamiltona:

$$H(\lambda, x, y, u) = \lambda_0 + \sqrt{2gy + V_0^2}(\lambda_1 \cos u + \lambda_2 \sin u). \quad (3.1)$$

Ponieważ w funkcji Hamiltona nie występuje w sposób jawny zmienna  $x$ , dlatego  $\lambda_1 = \partial H / \partial x = 0$  oraz  $\lambda_1 = \text{const}$ . W zasadzie maksimum Ponriagina udowodniono, że sterowania będą optymalne wówczas, gdy funkcja Hamiltona osiągnie wartość maksymalną oraz:

$$H_{max}(\lambda, x, y, u_{opt}) = 0. \quad (3.2)$$

Zależność (3.2) nie zmieni się, gdy podzielimy ją przez stałą. Ostatecznie po podzieleniu (3.1) przez  $\lambda_1$  oraz wprowadzeniu związku:

$$\cos u + \lambda_2 \sin u = \sqrt{1 + \lambda_2^2} \cos(u - \text{arctg} \lambda_2), \quad (3.3)$$

otrzymamy przekształconą funkcję Hamiltona:

$$H_{max}(\bar{\lambda}, x, y, u) = \bar{\lambda}_0 + \sqrt{2gy + V_0^2} \left[ \sqrt{1 + \bar{\lambda}_2^2} \cos(u - \text{arctg} \bar{\lambda}_2) \right] = 0, \quad (3.4)$$

gdzie:

$$\bar{\lambda}_0 = \frac{\lambda_0}{\lambda_1}, \quad \bar{\lambda}_2 = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}.$$

Z (3.4) jednoznacznie wynika, że dysponując dowolnymi sterowaniami  $u^*$  z przedziału  $\langle 0, \Pi \rangle$  funkcja Hamiltona osiągnie maksimum wówczas, gdy:

$$\cos(u - \arctg \bar{\lambda}_2) = 1 = \max, \quad (3.5)$$

co oznacza:

$$u = \arctg \bar{\lambda}_2. \quad (3.6)$$

Zwróćmy uwagę, że:

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} u = \bar{\lambda}_2, \quad (3.7)$$

zatem, do wyznaczenia linii najszybszego spadku (trajektorii lotu obiektu) wystarczy znalezienie  $\lambda_2(x, y)$ . Po podstawieniu (3.5) do (3.4) otrzymamy:

$$H_{\max}(\bar{\lambda}, x, y, u) = \bar{\lambda}_0 + \sqrt{2gy + V_0^2} \sqrt{1 + \bar{\lambda}_2^2} = 0, \quad (3.8)$$

oraz kolejno:

$$\sqrt{1 + \bar{\lambda}_2^2} = \frac{-\bar{\lambda}_0}{\sqrt{2gy + V_0^2}},$$

$$\bar{\lambda}_2 = \sqrt{\frac{(-\bar{\lambda}_0)^2 - (2gy + V_0^2)}{2gy + V_0^2}},$$

i ostatecznie:

$$\bar{\lambda}_2 = \sqrt{\frac{2a - (y + V_0^2/2g)}{y + V_0^2/2g}}, \quad (3.9)$$

gdzie:  $2a = (-\bar{\lambda}_0)^2/2g$ .

Z zależności (3.7) i (3.9) wynika, że:

$$x = \int \sqrt{\frac{y + V_0^2/2g}{2a - (y + V_0^2/2g)}} dy. \quad (3.10)$$

Po podstawieniu:

$$z^2 = y + V_0^2/2g,$$

$$dy = 2zdz, \quad (3.11)$$

otrzymamy całkę funkcji niewymiernej o postaci:

$$x = 2 \int \frac{z^2}{\sqrt{2a - z^2}} dz, \quad (3.12)$$

o rozwiązaniu:

$$x = -z\sqrt{2a - z^2} + 2a \arcsin(z/\sqrt{2a}) + C. \quad (3.13)$$

Tak więc po podstawieniu (3.11) do (3.13) otrzymamy:

$$x = -\sqrt{(y + V_0^2/2g)[2a - (y + V_0^2/2g)]} + 2a \arcsin \sqrt{\frac{y + V_0^2/2g}{2a}} + C. \quad (3.14)$$

Stosując wzory redukcyjne funkcji cyklometrycznych:

$$\begin{aligned} \arcsin x &= \arccos \sqrt{1 - x^2}, \\ 2\arccos x &= \arccos(2x^2 - 1), \end{aligned} \quad (3.15)$$

ostatecznie otrzymamy:

$$x = -\sqrt{(y + V_0^2/2g)[2a - (y + V_0^2/2g)]} + a \arccos \frac{a - (y + V_0^2/2g)}{a} + C. \quad (3.16)$$

Zauważmy, iż w przypadku gdy  $V_0 = 0$  oraz  $x_0 = y_0 = 0$  (tzn.  $C = 0$ ) z równania (3.16) otrzymamy klasyczne równanie cykloidy we współrzędnych prostokątnych:

$$x = -\sqrt{y(2a - y)} + a \arccos \frac{a - y}{a} \quad (3.17)$$

gdzie  $a$  jest promieniem toczącego się po prostej koła.

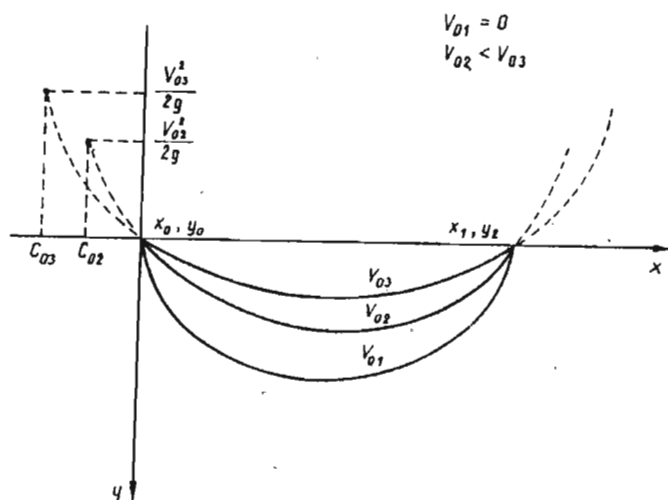
Otrzymaliśmy zatem rozwiązanie, które jest w pełni zgodne z rozwiązaniami rachunku wariacyjnego. Rysunek 1 przedstawia przykładowe rozwiązania zadania przy różnych prędkościach początkowych  $V_0$ .

#### 4. Przyspieszenia normalne obiektu poruszającego się po cykloidzie

W zadaniu o brachistochronie sformułowanym przez Bernoulliego należało wyznaczyć krzywą najszybszego spadku. Kształt tej krzywej nie podlegał żadnym ograniczeniom.

W rozwiązaniu tego zadania metodą maksimum Pontriagina przyjęto model pewnego sterowanego obiektu, którego zadaniem było dotarcie w najkrótszym czasie z punktu  $A$  do punktu  $B$ . Zwróćmy uwagę, że nie jest to zupełnie abstrakcyjny model. Może to być obiekt latający, który porusza się w płaszczyźnie pionowej, a ciąg silnika jest tak dobrany, że równoważy siłę oporu aerodynamicznego (tj.  $T = P_x$ ). Powstaje zatem pytanie: czy uzyskana krzywa najszybszego spadku (trajektoria lotu obiektu) jest technicznie realizowalna? Jakie przyspieszenia normalne działają na obiekt w czasie lotu po takiej krzywej?

Aby rozważania odnieść do "całej" cykloidy rozpatrzmy przypadek jak na rys. 1 ( $y_0 = y_1 = 0$ ). Zauważmy, że równanie (3.16) jest równaniem cykloidy odpowiednio przesuniętej w układzie współrzędnych  $Oxy$ . Tak więc można je zastąpić



Rys. 1.

równaniem (3.17), przesuując odpowiednio układ współrzędnych oraz zmieniając stałą  $a$ . Dalej rozważane będzie równanie postaci (3.17), tj. przy prędkości początkowej  $V_0 = 0$ .

Przyspieszenia normalne występujące podczas lotu obiektu wyznaczmy z zależności:

$$a_z = \frac{V^2}{R} + g \cos u, \quad (4.1)$$

gdzie  $R$  jest promieniem krzywizny i dla dowolnej krzywej wynosi:

$$R = \frac{[1 + (dy/dx)^2]^{\frac{3}{2}}}{d^2y/dx^2}. \quad (4.2)$$

Z uwagi na fakt, że równanie cycloidy podane jest w ogólnej postaci  $x = f(y)$ , dlatego zachowując oznaczenia  $x$  i  $y$  promień krzywizny cycloidy określa zależność:

$$R = \frac{[1 + (dx/dy)^2]^{\frac{3}{2}}}{d^2x/dy^2}. \quad (4.3)$$

Podstawiając:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dy} &= \frac{1}{\lambda_2} = \sqrt{\frac{y}{2a-y}}, \\ \frac{d^2x}{dy^2} &= \frac{2a}{2\sqrt{y}(2a-y)^{\frac{3}{2}}}, \end{aligned} \quad (4.4)$$

otrzymamy wyrażenie na promień krzywizny cykloidy:

$$R(y) = \sqrt{8ay}. \quad (4.5)$$

Ponieważ:

$$\cos u = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 u}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (dy/dx)^2}},$$

dlatego po uwzględnieniu pierwszej zależności (4.4) otrzymamy wyrażenie na przyspieszenia od składowej grawitacyjnej:

$$g \cos u = g \sqrt{\frac{y}{2a}}. \quad (4.6)$$

Ostatecznie po uwzględnieniu, że:  $V(y) = \sqrt{2gy}$  z (4.1) oraz (4.5) (4.6) otrzymamy:

$$a_z(y) = g \sqrt{\frac{y}{2a}} + g \sqrt{\frac{y}{2a}} = 2g \sqrt{\frac{y}{2a}}. \quad (4.7)$$

Okazuje się, że przyspieszenia normalne obiektu poruszającego się po cykloidzie są stosunkowo niewielkie i zmieniają się od zera w ostrzu cykloidy ( $y = 0$ ) do  $2g$  w jej wierzchołku, gdzie  $y = 2a$ .

## 5. Wnioski

W artykule przedstawiono rozwiązanie zadania o brachistochronie metodą maksimum Pontriagina. Wyznaczenie sterowań optymalnych było możliwe dzięki zastosowaniu przekształcenia funkcji Hamiltona i zmiennych sprzężonych. Ponadto zadanie to zostało sprowadzone do zadania wyznaczenia sterowań optymalnych obiektu. Nabiera ono wówczas innego znaczenia fizycznego. Na podstawie uzyskanych rozwiązań można wnioskować, że cykloida będzie charakterystyczną trajektorią lotu obiektów, na które oddziałują siły grawitacyjne, a zmiana prędkości może być spowodowana tylko tymi siłami. Niewielkie przeciążenia normalne oraz wpływ wartości początkowej  $V_0$  na "łagodzenie" kształtu trajektorii lotu (rys.1) sprawia, że właśnie wśród tego typu rozwiązań należy poszukiwać sterowań minimalno-czasowych w realnych obiektach latających.

## Literatura

1. LEITMANN G., *Wprowadzenie do teorii sterowania optymalnego*, WNT Warszawa 1971

2. BOLTIAŃSKI W.G., *Matematyczne metody sterowania optymalnego*, WNT Warszawa 1971
3. ELSGOLC L.E., *Rachunek wariacyjny*, PWN Warszawa 1960

#### Summary

The solution of the brachistochrone problem discussed in the paper by the maximum principle constitutes a singular solution in a more general solution of the control problem. The solution to the problem has been obtained in cartesian coordinates. For the sake of control along brachistochrone the normal component of acceleration has been determined.

#### Резюме

Решение задачи о брахистохроне, рассмотрено в работе с помощью принципа максимума, является частным случаем сингулярного решения общей задачи управления. Решение задачи получено в картезианской системе координат. Для управления полетом необходимо знать нормальное ускорение по брахистохроне, которое выведено в работе.

*Praca wpłynęła do Redakcji dnia 14 kwietnia 1989 roku*