MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
29, 1, 1991

TWIERDZENIE O OBSZARZE WPŁYWU DLA NAPRĘŻENIOWO-STRUMIENIOWEGO PROBLEMU UOGÓLNIONEJ DYNAMICZNEJ SPRZĘŻONEJ TERMOSPRĘŻYSTOŚCI

JERZY BIAŁY

Wyższa Oficerska Szkoła Lotnicza, Dęblin

1. Wstęp

Uogólniona termosprężystość z jednym czasem relaksacji została wprowadzona do literatury technicznej między innymi w celu eliminacji nieskończonej prędkości propagacji termosprężystych zaburzeń opisanych przy pomocy klasycznej liniowej termosprężystości (por [1]). Dla przemieszczeniowo-temperaturowego problemu i dowolnego anizotropowego niejednorodnego uogólnionego termosprężystego ciała fakt o skończonej propagacji został sformułowany w postaci twierdzenia o obszarze wpływu zostało udowodnione w pracy [1]. Dla tzw. modelu ciała termosprężystego zależ nego od prędkości temperatury, również uogólniającego klasyczny termosprężysty ośrodek, analogiczne twierdzenia o obszarze wpływu zostało udowodnione w pracy [2]. Oba wyniki prac [1] i [2] dotyczą tzw. konwencjonalnych początkowo-brzegowych problemów przemieszczeniowo-temperaturowych. Niniejsza praca jest poświęcona twierdzeniu o obszarze wpływu dla naturalnego naprężeniowo-strumieniowego problemu początkowo-brzegowego, w którym stan początkowy ciała należy do pewnej szerszej klasy stanów termosprężystych aniżeli klasa stanów początkowych przemieszczeniowo-temperaturowych.

Praca składa się z trzech części. W pierwszej sformułowano naturalny naprężeniowo-strumieniowy początkowo-brzegowy problem uogólnionej termosprężystości z jednym czasem relaksacji (por. [3]). W drugiej części udowodniono pewną nierówność o obszarze zależności dla rozwiązania tego problemu. Nierówność ta jest podstawą do udowodnienia w części trzeciej twierdzenia o obszarze wpływu, które orzeka, że rozwiązanie powyższego problemu znika na zewnątrz ograniczonego obszaru $B^*(t)$. Metoda dowodu jest podobna do tej z pracy [1].

2. Naprężeniowo-strumieniowe sformułowanie uogólnionej termosprężystości

Naturalny naprężeniowo-strumieniowy początkowo-brzegowy problem liniowej niejednorodności anizotropowej uogólnionej termosprężystości został sformułowany w pracy [3]. Problem ten polega na znalezieniu pary $(\mathbf{S}, \mathbf{q})$ określonej na $B \times [0, \infty)$, która spełnia równania:[1]

$$\hat{\nabla}(\rho^{-1}\mathrm{div}\mathbf{S}) - \bar{\mathbf{K}}'[\ddot{\mathbf{S}}] + C_S^{-1}(\mathrm{div}\dot{\mathbf{q}})\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{0}, \tag{2.1}$$

$$\text{na } Q = B \times (0, \infty)$$

$$\nabla(C_S^{-1}\mathrm{div}\mathbf{q}) - \mathbf{\Lambda}\dot{\mathbf{q}} + \Theta_0\nabla(C_S^{-1}\mathbf{A} \odot \dot{\mathbf{S}}) + \mathbf{r} = \mathbf{0}, \tag{2.2}$$

warunki początkowe:

$$\left.\begin{array}{ll} \mathbf{S} = \mathbf{S}_0, & \dot{\mathbf{S}} = \dot{\mathbf{S}}_0, \\ \mathbf{q} = \mathbf{q}_0, & \dot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{q}}_0, \end{array}\right\} \text{ na } B \times \{0\}, \tag{2.3}$$

oraz warunki brzegowe:

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{s} = \mathbf{S}\mathbf{n}, \\ q = \mathbf{q} \cdot \mathbf{n}, \end{array}\right\} \text{ na } \partial B \times [0, \infty). \tag{2.4}$$

Tutaj $\mathbf{S}(\mathbf{x}, t)$ i $\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)$ oznaczają kolejno tensor naprężenia i strumień ciepła. Ponadto ρ, C_S i Θ_0 oznaczają kolejno: gęstość, ciepło właściwe przy zerowym naprężeniu oraz temperaturę odniesienia. Następnie $\mathbf{A}$ i $\mathbf{\Lambda}$ oznaczają kolejno: tensor rozszerzalności cieplnej i tensor oporności cieplnej.

Ponadto:

$$\bar{\mathbf{K}}' = \bar{\mathbf{K}} - \Theta_0 C_S^{-1}\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}, \tag{2.5}$$

$$\mathbf{B} = \hat{\nabla}(\rho^{-1}\mathbf{b}) - C_S^{-1}\dot{r}\mathbf{A}, \tag{2.6}$$

$$\mathbf{r} = -\nabla(C_S^{-1}r). \tag{2.7}$$

We wzorach tych $\bar{\mathbf{K}}$ jest tensorem podatności, $\mathbf{b}$ – wektorem siły masowej, r – funkcją źródeł ciepła. Tensor podatności $\bar{\mathbf{K}}$ jest związany z tensorem sprężystości $\bar{\mathbf{C}}$ relacją:

$$\bar{\mathbf{K}} = \bar{\mathbf{C}}^{-1}. \tag{2.8}$$

---

[1]Oznaczenia są zgodne z oznaczeniami przyjętymi w pracy [4]. Równania (2.1) i (2.2) zostały zaczerpnięte z pracy [3].

Ponadto:

$$\mathbf{A} = -\bar{\mathbf{K}}[\mathbf{M}], \tag{2.9}$$
$$C_S = C_E - \Theta_0 \mathbf{M} \cdot \mathbf{A}, \tag{2.10}$$

gdzie $\mathbf{M}$ jest tensorem naprężeniowo-temperaturowym oraz C_E jest ciepłem właściwym przy zeroweym odkształceniu. Kropka nad funkcją w równaniach (2.1) – (2.2) oznacza różniczkowanie po czasie. Ponadto:

$$\hat{q} = q + t_0 \dot{q}, \tag{2.11}$$

gdzie t_0 jest dodatnim czasem relaksacji. Wreszcie ∇ i $\hat{\nabla}$ oznaczają kolejno gradient pola skalarnego i symetryczny gradient pola wektorowego. q_0, $\dot{q}_0$, $\mathbf{S}_0$, $\dot{\mathbf{S}}_0$ oraz $\mathbf{s}$, q występujące w równaniach (2.3) i (2.4) są zadanymi funkcjami. Ponadto $\mathbf{n}$ jest wektorem jednostkowym normalnym zewnętrznym do powierzchni ∂B. Odnośnie funkcji materiałowych ρ, C_S, Θ_0, $\bar{\mathbf{K}}$, Λ i $\mathbf{A}$ przyjmujemy następujące ograniczenia konstytutywne[2]:

$$\rho > 0, \qquad C_S > C_E > 0, \qquad \Theta_0 > 0,$$
$$\bar{\mathbf{K}} > \mathbf{0}, \qquad \Lambda > \mathbf{0}, \qquad \Lambda = \Lambda^T. \tag{2.12}$$

Ze związków (2.9) i (2.10) wynika, że:

$$\mathbf{M} \cdot \bar{\mathbf{K}}[\mathbf{M}] = \Theta_0^{-1}(C_S - C_E). \tag{2.13}$$

Wszystkie funkcje materiałowe występujące w powyższych równaniach opisują własności fizyczne pewnego uogólnionego nieklasycznego ciała termosprężystego. Zatem nie są identyczne z odpowiednimi funkcji klasycznego modelu, chyba, że czas relaksacji t_0 znika ($t_0 = 0$).

Zauważmy wreszcie, że sformułowanie problemu (2.1) – (2.4) przy dowolnych polach $\mathbf{S}_0$, $\dot{\mathbf{S}}_0$ q_0 i $\dot{q}_0$ zawiera w sobie szczególne naprężeniowo -strumieniowe sformułowanie z konwencjonalnymi przemieszczeniowo-temperaturowymi warunkami początkowymi oraz warunkami brzegowymi (2.4) (por.[3]). dla klasycznej termosprężystości zagadnienie opisu procesu termosprężystego w terminach pary $(\mathbf{S}, q)$ jest omówione w pracy [5].

3. Główne oszacowanie

Naszym celem będzie wyprowadzenie pewnej nierówności dla rozwiązania problemu (2.1) – (2.4), która jest podstawą do sformułowania twierdzenia o obszarze

[2]Nierówność $\bar{\mathbf{K}} > \mathbf{0}$ rozumiana jest w następującym sensie: $\mathbf{S} \cdot \bar{\mathbf{K}}[\mathbf{S}] \geq 0 \quad \forall \mathbf{S} = \mathbf{S}^T$. Podobnie, nierówność $\Lambda \geq \mathbf{0}$ oznacza, że: $q \cdot \Lambda q \geq 0 \quad \forall q$

wpływu w dalszej części. Dla osiągnięcia celu wprowadzamy funkcję:

$$\begin{aligned} \eta(\boldsymbol{x},s) &= \frac{1}{2}[\rho^{-1}(\mathrm{div}\mathbf{S})^2 + \dot{\mathbf{S}}\cdot\bar{\mathbf{K}}'[\dot{\mathbf{S}}] + t_0\Theta_0^{-1}\dot{\boldsymbol{q}}\cdot\mathbf{A}\dot{\boldsymbol{q}} + \\ &+ (C_S\Theta_0)^{-1}(\mathrm{div}\boldsymbol{q})^2](\boldsymbol{x},s), \qquad \forall(\boldsymbol{x},s)\in\bar{Q}, \end{aligned} \tag{3.1}$$

oraz tensor $\mathbf{K}$ (drugiego rzędu) będący odpowiednikiem tensora akusytcznego[3], który jest zdefiniowany dla każdego jednostkowego wektora $\boldsymbol{m}$ następującą relacją[4]:

$$\mathbf{K}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{m})\boldsymbol{a} = \rho(\boldsymbol{x})\bar{\mathbf{K}}[\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{m}]\boldsymbol{m}, \qquad \forall\boldsymbol{x}\in\bar{B}, \quad \forall\boldsymbol{a}. \tag{3.2}$$

Ponadto wprowadzamy liczby dodatnie C_m i C_1 o wymiarze prędkości, które są dane wzorami[5]:

$$C_m = [\inf\{k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{m}):\ \boldsymbol{x}\in\bar{B},\ |\boldsymbol{m}|=1\}]^{-\frac{1}{2}}, \tag{3.3}$$

$$C_1 = t_0^{-\frac{1}{2}}\,[\inf\{C_S(\boldsymbol{x})\lambda(\boldsymbol{x}):\ \boldsymbol{x}\in\bar{B}\}]^{-\frac{1}{2}}, \tag{3.4}$$

tutaj $k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{m})$ oraz $\lambda(\boldsymbol{x})$ oznaczają kolejno najmniejszą wartość własną tensora $\mathbf{K}$ oraz $\mathbf{A}$[6]. Również wprowadzamy oznaczenia[7]:

$$\begin{aligned} C_1^0 &= C_1\left[\sup_{\boldsymbol{x}\in\bar{B}}\left\{1+\frac{C_S}{C_E}\Big(1-\frac{C_E}{C_S}\Big)^{\frac{1}{2}}\right\}\right]^{\frac{1}{2}}, \\ C_2^0 &= C_m\left[\sup_{\boldsymbol{x}\in\bar{B}}\left\{\Big(\frac{C_S}{C_E}\Big)^2\Big[1+\Big(1-\frac{C_E}{C_S}\Big)^{\frac{1}{2}}\Big]\right\}\right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Lemat. Niech para $(\mathbf{S},\boldsymbol{q})$ będzie rozwiązaniem układu (2.1) – (2.4) i niech C będzie liczbą o wymiarze prędkości daną wzorem:

$$C = \max(C_1^0, C_2^0). \tag{3.6}$$

Wtedy: $\forall t>0$, $\forall R>0$ i $\forall\boldsymbol{x}_0\in B$

---

[3]Tensor akustyczny został wprowadzony w pracy [4].

[4]Tensor $\mathbf{K}$ ma następujące własności: $\mathbf{K}=\mathbf{K}^T$, $\mathbf{K}>0$.

[5]C_m jest liczbą dodatnią i skończoną oraz można pokazać, że: $\rho\dot{\mathbf{S}}\cdot\bar{\mathbf{K}}[\dot{\mathbf{S}}]\geq C_m^{-2}|\dot{\mathbf{S}}e_r^0|^2$.

[6]Ponieważ tensor $\mathbf{A}$ jest dodatnio określony, to C_1 jest dodatnia i ograniczona oraz: $t_0C_S\dot{\boldsymbol{q}}\cdot\mathbf{A}\dot{\boldsymbol{q}}\geq C_1^{-2}|\dot{\boldsymbol{q}}|^2$.

[7]Prędkości C_1^0 i C_2^0 są skończone, bo C_1 i C_m są ograniczone oraz ograniczone są pola C_E i C_S.

$$\int\limits_{B(\boldsymbol{x}_0,R)} \eta(\boldsymbol{x},t)dV + \Theta_0^{-1}\int_0^t ds \int\limits_{B[\boldsymbol{x}_0,R+C(t-s)]} (\dot{\boldsymbol{q}}\cdot\mathbf{\Lambda}\dot{\boldsymbol{q}})(\boldsymbol{x},s)dV \leq$$

$$\leq \int\limits_{B(\boldsymbol{x}_0,R+Ct)} \eta(\boldsymbol{x},0)dV + \Theta_0^{-1}\int_0^t ds \int\limits_{B[\boldsymbol{x}_0,R+C(t-s)]} (\boldsymbol{r}\cdot\dot{\boldsymbol{q}} + \mathbf{B}\cdot\dot{\boldsymbol{S}})(\boldsymbol{x},s)dV +$$

$$+\int_0^t ds \int\limits_{\partial B\cap S[\boldsymbol{x}_0,R+C(t-s)]} [\rho^{-1}\dot{\mathbf{S}}(\mathrm{div}\mathbf{S}) + (C_S\Theta_0)^{-1}(\mathrm{div}\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}} + \tag{3.7}$$

$$+C_S^{-1}(\mathbf{A}\cdot\dot{\mathbf{S}})\dot{\boldsymbol{q}}](\boldsymbol{x},s)\cdot\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})da,$$

gdzie $\forall d \in R^+$ wprowadzamy oznaczenia:

$$\begin{aligned} S(\boldsymbol{x}_0,d) &= \{\boldsymbol{x}\in E^3 : |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0| < d\}, \\ B(\boldsymbol{x}_0,d) &= B\cap S(\boldsymbol{x}_0,d). \end{aligned} \tag{3.8}$$

Dowód lematu:

Rozważmy funkcję $g_\delta : \lambda \in R \to g_\delta(\lambda) \in [0,1]$ taką, że:

$$\begin{aligned} &g_\delta(\lambda) = 0 && \forall\lambda\in(-\infty,0], \\ &g_\delta(\lambda) = 1 && \forall\lambda\in[\delta,\infty),\quad \delta>0, \\ &g'_\delta(\lambda) \geq 0 && \forall\lambda\in R, \end{aligned} \tag{3.9}$$

oraz funkcję:

$$g(\boldsymbol{x},s) = g_\delta(C^{-1}[R + C(t-s) - |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|]), \tag{3.10}$$

gdzie R jest stałą dodatnią o wymiarze długości, zaś t i $\boldsymbol{x}_0$ są kolejno ustalonym czasem i ustalonym wektorem w E^3.

Funkcja g zdefiniowana na $E^3\times[0,\infty)$ ma następujący nośnik:

$$\Sigma = \bigcup_{s\in[0,t]} S[\boldsymbol{x}_0, R + C(t-s)]. \tag{3.11}$$

Ponadto g jest gładka na $E^3\times[0,t]$ i ∇g znika tożsamościowo na zbiorze:

$$\Sigma_0 = \bigcup_{s\in[0,t]} S[\boldsymbol{x}_0, R + C(t-s-\delta)], \tag{3.12}$$

gdzie δ jest małą liczbą dodatnią taką, że $R + C(s-\delta) > 0$ dla każdego $s\in[0,t]$. Mnożąc równanie (2.1) przez $g\dot{S}$, a równanie (2.2) przez $g\Theta_0^{-1}\dot{\boldsymbol{q}}$ dostaniemy następujący układ równań:

$$g\hat{\nabla}(\rho^{-1}\mathrm{div}\mathbf{S})\cdot\dot{\mathbf{S}} - g\dot{\mathbf{S}}\cdot\bar{\mathbf{K}}'[\tilde{\mathbf{S}}] + gC_S^{-1}(\mathrm{div}\dot{\boldsymbol{q}})\mathbf{A}\cdot\dot{\mathbf{S}} + g\mathbf{B}\cdot\dot{\mathbf{S}} = 0, \quad \text{na } Q, \tag{3.13}$$

$$g\Theta_0^{-1}\nabla(C_S^{-1}\mathrm{div}\boldsymbol{q})\cdot\dot{\boldsymbol{q}} - g\Theta_0^{-1}\dot{\boldsymbol{q}}\cdot\mathbf{\Lambda}\dot{\boldsymbol{q}} + g\nabla(C_S^{-1}\mathbf{A}\cdot\dot{S})\cdot\dot{\boldsymbol{q}} + g\Theta_0^{-1}\boldsymbol{r}\cdot\dot{\boldsymbol{q}} = 0. \tag{3.14}$$

Ponieważ:

$$
\begin{aligned}
g\nabla(C_S^{-1}\mathrm{div}\mathbf{q})\cdot\dot{\mathbf{q}} &= \mathrm{div}[C_S^{-1}g(\mathrm{div}\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}] - C_S^{-1}(\mathrm{div}\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}\cdot\nabla g + \\
&- \frac{1}{2}gC_S^{-1}\frac{d}{dt}(\mathrm{div}\mathbf{q})^2, && (3.15)\\
g\nabla(C_S^{-1}\mathbf{A}\cdot\dot{\mathbf{S}})\cdot\dot{\mathbf{q}} &= \mathrm{div}[C_S^{-1}g(\mathbf{A}\cdot\dot{\mathbf{S}})\dot{\mathbf{q}}] - C_S^{-1}(\mathbf{A}\cdot\dot{\mathbf{S}})\dot{\mathbf{q}}\cdot\nabla g + \\
&- C_S^{-1}g(\mathbf{A}\cdot\dot{\mathbf{S}})\mathrm{div}\dot{\mathbf{q}}, && (3.16)\\
\dot{\mathbf{S}}\cdot\bar{\mathbf{K}}'[\dot{\mathbf{S}}] &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\{\dot{\mathbf{S}}\cdot\bar{\mathbf{K}}'[\dot{\mathbf{S}}]\}, && (3.17)\\
\dot{\mathbf{q}}\cdot\Lambda\ddot{\mathbf{q}} &= \frac{1}{2}t_0\frac{d}{dt}\{\dot{\mathbf{q}}\cdot\Lambda\dot{\mathbf{q}}\} + \dot{\mathbf{q}}\cdot\Lambda\dot{\mathbf{q}}, && (3.18)\\
g\hat{\nabla}(\rho^{-1}\mathrm{div}\mathbf{S})\cdot\dot{\mathbf{S}} &= \mathrm{div}[\rho^{-1}g\dot{\mathbf{S}}(\mathrm{div}\mathbf{S})] - \frac{1}{2}\rho^{-1}g\frac{d}{dt}(\mathrm{div}\mathbf{S})^2 + \\
&- \rho^{-1}(\mathrm{div}\mathbf{S})\cdot(\dot{\mathbf{S}}\nabla g), && (3.19)
\end{aligned}
$$

to równania (3.13) i (3.14) będą miały następującą postać:

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{div}[\rho^{-1}g\dot{\mathbf{S}}(\mathrm{div}\mathbf{S})] - \frac{1}{2}\rho^{-1}g\frac{d}{dt}(\mathrm{div}\mathbf{S})^2 - \rho^{-1}(\mathrm{div}\mathbf{S})\cdot(\dot{\mathbf{S}}\nabla g) + \\
&-\frac{1}{2}g\frac{d}{dt}\{\dot{\mathbf{S}}\cdot\bar{\mathbf{K}}'[\dot{\mathbf{S}}]\} + gC_S^{-1}(\mathrm{div}\dot{\mathbf{q}})\mathbf{A}\cdot\dot{\mathbf{S}} + g\mathbf{B}\cdot\dot{\mathbf{S}} = 0 \quad \text{na } Q, && (3.20)\\
&\Theta_0^{-1}\mathrm{div}[C_S^{-1}g(\mathrm{div}\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}] - \Theta_0^{-1}C_S^{-1}(\mathrm{div}\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}\cdot\nabla g - \frac{1}{2}\Theta_0^{-1}gC_S^{-1}\frac{d}{dt}(\mathrm{div}\mathbf{q})^2 + \\
&-\frac{1}{2}\Theta_0^{-1}t_0g\frac{d}{dt}\{\dot{\mathbf{q}}\cdot\Lambda\dot{\mathbf{q}}\} - \Theta_0^{-1}g\dot{\mathbf{q}}\cdot\Lambda\dot{\mathbf{q}} + \mathrm{div}[C_S^{-1}g(\mathbf{A}\cdot\dot{\mathbf{S}})\dot{\mathbf{q}}] + && (3.21)\\
&-C_S^{-1}(\mathbf{A}\cdot\dot{\mathbf{S}})\dot{\mathbf{q}}\cdot\nabla g - C_S^{-1}g(\mathbf{A}\cdot\dot{S})\mathrm{div}\dot{\mathbf{q}} + \Theta_0^{-1}g\mathbf{r}\cdot\dot{\mathbf{q}} = 0 \quad \text{na } Q.
\end{aligned}
$$

Dodając stronami równania (3.20) i (3.21) otrzymamy równanie:

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{div}[\rho^{-1}g\dot{\mathbf{S}}(\mathrm{div}\mathbf{S})] + \Theta_0^{-1}C_S^{-1}g(\mathrm{div}\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} + C_S^{-1}g(\mathbf{A}\cdot\dot{S})\dot{\mathbf{q}}] + \\
&-\frac{1}{2}g\frac{d}{dt}\{\rho^{-1}(\mathrm{div}\mathbf{S})^2 + \dot{\mathbf{S}}\cdot\bar{\mathbf{K}}'[\dot{\mathbf{S}}] + \Theta_0^{-1}C_S^{-1}(\mathrm{div}\mathbf{q})^2 + \\
&+\Theta_0^{-1}t_0\dot{\mathbf{q}}\cdot\Lambda\dot{\mathbf{q}}\} - \{\rho^{-1}(\mathrm{div}\mathbf{S})\cdot(\dot{\mathbf{S}}\nabla g) + && (3.22)\\
&C_S^{-1}(\mathbf{A}\cdot\dot{S})\dot{\mathbf{q}}\cdot\nabla g + \Theta_0^{-1}C_S^{-1}(\mathrm{div}\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}\cdot\nabla g\} - \Theta_0^{-1}g\dot{\mathbf{q}}\cdot\Lambda\dot{\mathbf{q}} + \\
&+g\mathbf{B}\cdot\dot{S} + \Theta_0^{-1}g\mathbf{r}\cdot\dot{\mathbf{q}} = 0 \quad \text{na } Q.
\end{aligned}
$$

Wykorzystując (3.1), a następnie całkując (3.22) po obszarze $B\times[0,t]$ i stosując twierdzenie o dywergencji otrzymamy:

$$
\begin{aligned}
&\int_B (g\eta)(\boldsymbol{x},t)dV + \Theta_0^{-1}\int_0^t ds \int_B (g\dot{\boldsymbol{q}}\cdot\Lambda\dot{\boldsymbol{q}})(\boldsymbol{x},s)dV = \int_B (g\eta)(\boldsymbol{x},0)dV + \\
&\int_0^t ds \int_B (\dot{g}\eta)(\boldsymbol{x},s)dV - \int_0^t ds \int_B \{\rho^{-1}(\mathrm{div}\mathbf{S})\cdot(\dot{\mathbf{S}}\nabla g) + \\
&+\Theta_0^{-1}C_S^{-1}(\mathrm{div}\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}}\cdot\nabla g + C_S^{-1}(\mathbf{A}\cdot\dot{\mathbf{S}})\dot{\boldsymbol{q}}\cdot\nabla g\}(\boldsymbol{x},s)dV + \\
&+\int_0^t ds\int_B g(\mathbf{B}\cdot\dot{\mathbf{S}} + \Theta_0^{-1}\boldsymbol{r}\cdot\dot{\boldsymbol{q}})(\boldsymbol{x},s)dV + \int_0^t ds\int_{\partial B}\{g(\rho^{-1}\dot{\mathbf{S}}(\mathrm{div}\mathbf{S}) + \\
&+\Theta_0^{-1}C_S^{-1}(\mathrm{div}\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}} + C_S^{-1}(\mathbf{A}\cdot\dot{\mathbf{S}})\dot{\boldsymbol{q}})\}(\boldsymbol{x},s)\cdot\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})da.
\end{aligned}
\tag{3.23}
$$

Ponieważ $\forall\beta > 0$, $\dim\beta = (\dim\mathbf{S})(\dim\mathbf{M})^{-1}$,

$$
\dot{\mathbf{S}}\cdot\bar{\mathbb{K}}[\mathbf{M}] \le \frac{1}{2}\{\beta\mathbf{M}\cdot\bar{\mathbb{K}}[\mathbf{M}] + \beta^{-1}\dot{\mathbf{S}}\cdot\bar{\mathbb{K}}[\dot{\mathbf{S}}]\},
\tag{3.24}
$$

zatem:

$$
\begin{aligned}
(\dot{\mathbf{S}}\cdot\mathbf{A})^2 &= (\dot{\mathbf{S}}\cdot\bar{\mathbb{K}}[\mathbf{M}])^2 \le \frac{1}{4}\{\beta^2(\mathbf{M}\cdot\bar{\mathbb{K}}[\mathbf{M}])^2 + 2(\mathbf{M}\cdot\bar{\mathbb{K}}[\mathbf{M}])(\dot{\mathbf{S}}\cdot\bar{\mathbb{K}}[\dot{\mathbf{S}}]) + \\
&+ \beta^{-2}(\dot{\mathbf{S}}\cdot\bar{\mathbb{K}}[\dot{\mathbf{S}}])^2\}.
\end{aligned}
\tag{3.25}
$$

Przyjmując w nierówności (3.25):

$$
\beta^2 = \frac{\dot{\mathbf{S}}\cdot\bar{\mathbb{K}}[\dot{\mathbf{S}}]}{\mathbf{M}\cdot\bar{\mathbb{K}}[\mathbf{M}]},
\tag{3.26}
$$

dostaniemy:

$$
(\dot{\mathbf{S}}\cdot\mathbf{A})^2 \le (\mathbf{M}\cdot\bar{\mathbb{K}}[\mathbf{M}])(\dot{\mathbf{S}}\cdot\bar{\mathbb{K}}[\dot{\mathbf{S}}]).
\tag{3.27}
$$

Słuszne są też następujące nierówności:

$$
C^{-1}|(\mathrm{div}\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}}\cdot\boldsymbol{e}_r^0| \le \frac{1}{2}[(\mathrm{div}\boldsymbol{q})^2 + C^{-2}(\dot{\boldsymbol{q}})^2],
\tag{3.28}
$$

$$
C^{-1}|(\mathrm{div}\mathbf{S})\cdot(\dot{\mathbf{S}}\boldsymbol{e}_r^0)| \le \frac{1}{2}[(\mathrm{div}\mathbf{S})^2 + C^{-2}(\dot{\mathbf{S}}\boldsymbol{e}_r^0)^2],
\tag{3.29}
$$

$$
\begin{aligned}
C^{-1}|(\mathbf{A}\cdot\dot{\mathbf{S}})\dot{\boldsymbol{q}}\cdot\boldsymbol{e}_r^0| &= \Theta_0|(\mathbf{A}\cdot\dot{\mathbf{S}})(C^{-1}\Theta_0^{-1}\dot{\boldsymbol{q}}\cdot\boldsymbol{e}_r^0)| \le \\
&\le \frac{1}{2}\Theta_0[(\mathbf{A}\cdot\dot{\mathbf{S}})^2\xi^{-1} + \Theta_0^{-2}C^{-2}\xi|\dot{\boldsymbol{q}}|^2],
\end{aligned}
\tag{3.30}
$$

gdzie $\dim\xi = 1$ oraz:

$$
\boldsymbol{e}_r^0 = |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0|^{-1}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) \qquad \forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_0 \in E^3.
\tag{3.31}
$$

Nierówność (3.30) dla:

$$\xi = \left(1 - \frac{C_E}{C_S}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{C_S}{C_E}, \tag{3.32}$$

oraz po uwzględnieniu nierówności (3.27) przyjmuje postać:

$$\begin{aligned} |C_S^{-1}C^{-1}(\mathbf{A}\cdot\dot{\mathbf{S}})\dot{\boldsymbol{q}}\cdot\boldsymbol{e}_r^0| \leq & \frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{C_E}{C_S}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{C_E}{C_S}\dot{\mathbf{S}}\cdot\bar{\mathbf{K}}[\dot{\mathbf{S}}] + \right. \\ & \left. + \Theta_0^{-1}C_E^{-1}C^{-2}\left(1-\frac{C_E}{C_S}\right)^{\frac{1}{2}}|\dot{\boldsymbol{q}}|^2\right\}. \end{aligned} \tag{3.33}$$

Definicja $\bar{\mathbf{K}}'$ (por [5]) oraz nierówność (3.27) implikują, że:

$$\dot{\mathbf{S}}\cdot\bar{\mathbf{K}}'[\dot{\mathbf{S}}] \geq \frac{C_E}{C_S}\dot{\mathbf{S}}\cdot\bar{\mathbf{K}}[\dot{\mathbf{S}}]. \tag{3.34}$$

Na mocy definicji funkcji $g(\boldsymbol{x}, s)$ oraz nierówności (3.28), (3.29) i (3.33) możemy funkcję podcałkową występującą w trzecim członie po prawej stronie równania (3.23) oszacować w następujący sposób:

$$\begin{aligned} & -\rho^{-1}(\mathrm{div}\mathbf{S})\cdot(\dot{\mathbf{S}}\nabla g) - \Theta_0^{-1}C_S^{-1}(\mathrm{div}\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}}\cdot\nabla g - C_S^{-1}(\mathbf{A}\cdot\dot{\mathbf{S}})\dot{\boldsymbol{q}}\cdot\nabla g = \\ & = C^{-1}g_\delta'\left\{\rho^{-1}(\mathrm{div}\mathbf{S})\cdot(\dot{\mathbf{S}}\boldsymbol{e}_r^0) + \Theta_0^{-1}C_S^{-1}(\mathrm{div}\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}}\cdot\boldsymbol{e}_r^0 + C_S^{-1}(\mathbf{A}\cdot\dot{\mathbf{S}})\dot{\boldsymbol{q}}\cdot\boldsymbol{e}_r^0\right\} \leq \\ & \leq \frac{1}{2}g_\delta'\left\{\rho^{-1}(\mathrm{div}\mathbf{S})^2 + \rho^{-1}C^{-2}(\dot{\mathbf{S}}\boldsymbol{e}_r^0)^2 + \Theta_0^{-1}C_S^{-1}(\mathrm{div}\boldsymbol{q})^2 + \Theta_0^{-1}C_S^{-1}C^{-2}(\dot{\boldsymbol{q}})^2 + \right\} \\ & + \left(1-\frac{C_E}{C_S}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{C_E}{C_S}\dot{\mathbf{S}}\cdot\bar{\mathbf{K}}[\dot{\mathbf{S}}] + \Theta_0^{-1}C_E^{-1}C^{-2}\left(1-\frac{C_E}{C_S}\right)^{\frac{1}{2}}|\dot{\boldsymbol{q}}|^2\Big\}. \end{aligned} \tag{3.35}$$

Nierówność (3.35) oraz związki (3.5) i (3.6) (por. też odsyłacze 6 – 8) i definicja (3.1) oraz nierówność (3.34) implikują:

$$\begin{aligned} & -\rho^{-1}(\mathrm{div}\mathbf{S})\cdot(\dot{\mathbf{S}}\nabla g) - \Theta_0^{-1}C_S^{-1}(\mathrm{div}\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}}\cdot\nabla g - C_S^{-1}(\mathbf{A}\cdot\dot{\mathbf{S}})\dot{\boldsymbol{q}}\cdot\nabla g \leq \\ & \leq \frac{1}{2}g_\delta'\{\rho^{-1}(\mathrm{div}\mathbf{S})^2 + C_m^2C^{-2}\dot{\mathbf{S}}\cdot\bar{\mathbf{K}}[\dot{\mathbf{S}}] + \Theta_0^{-1}C_S^{-1}C^{-2}(\dot{\boldsymbol{q}})^2 + \\ & + \Theta_0^{-1}C_S^{-1}(\mathrm{div}\boldsymbol{q})^2 + \left(1-\frac{C_E}{C_s}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{C_E}{C_S}\dot{\mathbf{S}}\cdot\bar{\mathbf{K}}[\dot{\mathbf{S}}] + \\ & + \Theta_0^{-1}C_E^{-1}C^{-2}\left(1-\frac{C_E}{C_S}\right)^{\frac{1}{2}}|\dot{\boldsymbol{q}}|^2\Big\} \leq g_\delta'\eta. \end{aligned} \tag{3.36}$$

Z określenia funkcji $g(\boldsymbol{x}, s)$ wynika, że:

$$g_\delta' = -\dot{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{x}, s). \tag{3.37}$$

Stąd oraz z nierówności (3.36) wnosimy, że suma drugiej i trzeciej całki występującej po prawej stronie równania (3.23) jest niedodatnia. Zatem:

$$\int_B (g\eta)(\boldsymbol{x},t)dV + \Theta_0^{-1}\int_0^t ds \int_B (g\dot{\boldsymbol{q}}\cdot\mathbf{\Lambda}\dot{\boldsymbol{q}})(\boldsymbol{x},s)dV \leq \int_B (g\eta)(\boldsymbol{x},0)dV +$$
$$+\int_0^t ds \int_B \{g(\mathbf{B}\cdot\dot{\mathbf{S}} + \Theta_0^{-1}\boldsymbol{r}\cdot\dot{\boldsymbol{q}})\}(\boldsymbol{x},s)dV + \int_0^t ds \int_{\partial B}\{g(\rho^{-1}\dot{\mathbf{S}}(\mathrm{div}\mathbf{S}) +$$
$$+\Theta_0^{-1}C_S^{-1}(\mathrm{div}\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}} + C_S^{-1}(\mathbf{A}\cdot\dot{\mathbf{S}})\dot{\boldsymbol{q}})\}(\boldsymbol{x},s)\cdot\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})da. \tag{3.38}$$

Przy $\delta \rightarrow 0$, g w granicy zmierza do funkcji charakterystycznej zbioru Σ (por (3.11), a przejście ($\delta \rightarrow 0$) do granicy jest dopuszczalne w całkach nierówności (3.38). Stąd przechodząc w (3.38) z δ do zera dostaniemy nierówność (3.7). to kończy dowód lematu.

4. Twierdzenie o obszarze wpływu dla pary $\mathbf{S}$, $\boldsymbol{q}$

W tej części udowodnimy, że jeżeli termomechaniczne obciążenie w problemie (2.1) – (2.4) posiada ograniczony nośnik dla ustalonego czasu $t > 0$, to rozwiązanie tego problemu znika na zewnątrz ograniczonego obszaru $B^*(t)$. W tym celu oznaczmy przez $B(t)$, $t > 0$ nośnik termomechanicznego obciążenia w problemie (2.1) – (2.4) tj. zbiór punktów $x \in B$ takich, że:

1) $\boldsymbol{x} \in B \Rightarrow \mathbf{S}_0 \neq \mathbf{0}$ lub $\dot{\mathbf{S}}_0 \neq \mathbf{0}$ lub $\boldsymbol{q}_0 \neq \mathbf{0}$ lub $\dot{\boldsymbol{q}}_0 \neq \mathbf{0}$ lub $\exists\, s \in [0,t] :\ \mathbf{B}(\boldsymbol{x},s) \neq \mathbf{0}$ lub $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{x},s) \neq \mathbf{0}$,
2) $x \in \partial B \Rightarrow \exists\, s \in [0,t] :\ \boldsymbol{s}(\boldsymbol{x},s) \neq \mathbf{0}$ lub $\boldsymbol{q}(\boldsymbol{x},s) \neq \mathbf{0}$.

Obszarem wpływu termomechanicznego obciążenia w problemie (2.1) – (2.4) w chwili $t > 0$ będziemy nazywali zbiór:

$$B^*(t) = \{\boldsymbol{x}_0 \in \bar{B} :\ B(t) \cap \bar{S}(\boldsymbol{x}_0, Ct) \neq \emptyset\}, \tag{4.1}$$

gdzie C jest określone wzorem (3.6). Prawdziwe jest następujące twierdzenie:
Twierdzenie (o obszarze wpływu).

Niech para $(\mathbf{S},\boldsymbol{q})$ będzie rozwiązaniem problemu (2.1) – (2.4). Wtedy:

$$\mathbf{S} = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{q} = \mathbf{0} \ \text{ na } [\bar{B} - B^*(t)] \times [0,t]. \tag{4.2}$$

Dowód:

Niech $x_0 \in \bar{B} - B^*(t)$ i $\lambda \in [0, t]$. Jeśli zastosujemy oszacowanie (3.7) dla $t = \lambda$ i $R = C(t - \lambda) > 0$, wtedy otrzymamy następującą nierówność:

$$\int\limits_{B[x_0, C(t-\lambda)]} \eta(x, \lambda) dV + \theta_0^{-1} \int\limits_0^\lambda ds \int\limits_{B[x_0, C(t-s)]} (\dot{q} \cdot A\dot{q})(x, s) dV \leq$$

$$\leq \int\limits_{B(x_0, Ct)} \eta(x, 0) dV + \theta_0^{-1} \int\limits_0^\lambda ds \int\limits_{B[x_0, C(t-s)]} (r \cdot \dot{q} + \mathbf{B} \cdot \dot{\mathbf{S}})(x, s) dV +$$

$$+ \int\limits_0^\lambda ds \int\limits_{\partial B \cap S[x_0, C(t-s)]} [\rho^{-1} \dot{\mathbf{S}}(\mathrm{div}\mathbf{S}) + (C_S \theta_0)^{-1} (\mathrm{div} q) \dot{q} +$$

$$+ C_S^{-1} (\mathbf{A} \cdot \dot{\mathbf{S}}) \dot{q}](x, s) \cdot n(x) da. \tag{4.3}$$

Z określenia obszaru wpływu wynika, że prawa strona powyższej nierówności zeruje się. Ponieważ $\eta(x, \lambda)$ jest ciągła i nieujemna (por.(3.1)), to stąd wnosimy, że $\eta(x, \lambda) = 0$ na $B(x_0, R)$. Ze względu na to, że (x_0, λ) był dowolnie wybranym punktem z $[\bar{B} - B^*(t)] \times [0, t]$, to wnioskujemy, że prawdziwe są relacje (4.2), c.b.d.o.

Autor wyraża serdeczne podziękowanie prof.dr hab.J.Ignaczakowi z IPPT PAN w Warszawie za cenne uwagi i wskazówki, które przyczyniły się do powstania niniejszego artykułu.

Literatura

1. IGNACZAK J., CARBONARO B., RUSSO R., *Domain of influence theorem in thermoelasticity with one relaxation time,* J. of Thermal Stresses, vol 9, pp. 79-91, 1986

2. CARBONARO B., IGNACZAK J., *Some theorems in temperature-rate dependent thermoelasticity for unbounded domains,* J. of Thermal Stresses, vol 10, No 3, pp. 193-220, 1987

3. IGNACZAK J., *Generalized Thermoelasticity and its applications,* in: Thermal Stresses III, edit. by R.B.Hetnarski, Elsevier Science Publishers B.V., 1988

4. GURTIN M.E., *The linear theory of elasticity,* in: S.Flugge (ed.), Encyklopedia of Physics, Mech. of Solids II, vol V—a—2, Springer, Berlin 1972

5. NICKELL R.E., SACKMAN J.L., *Variational Principles for Linear Coupled Thermoelasticity,* Q. Appl. Math., vol 26, pp. 11-26, 1968

Summary

The domain of influence theorem for a conventional displacement-temperature, initial-boundary value problem of the linear generalized thermoelasticity was formulated in work [1].

The domain of influence theorem for a unonconventional natural stressflux-initial-boundary value problem of the generalized thermoelasticity has been proved in the present paper. In the considered case the initial thermoelastc states than to the class of initial displacement-temperature states.

The method of proof employed in the present paper is similar to that used in work [1] and is based on the notion of a tensor which is a counterpart of the acoustic tensor of the isothermal theory of elasticity.

Резюме

Теорема об области влияния для традиционной перемещенно-температурной начально-краевой задачи линейной анизотропной неоднородной обобщённой термоупругости была сформулирована в работе [1].

В настоящей работе доказывается теорема области влияния для нетрадиционной естественной напряжённо-поточной начально-краевой задачи обобщённой термоупругости.

В рассматриваемом случае началное термоупругое состаяние тела принадлежит к определённому более широкому классу состаяний термопругости чем класс состояний началных перемещённо-температурных.

Метод доказательства теоремы использованый в работе [1] и основан на понятии тензора второго ранга полученного из тензора податливости, которой является эквивалентом акустического тензора изотермической теории упругости.

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 29 listopada 1988 roku