MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
29, 1, 1991

O WSPÓŁDZIAŁANIU OBIEKTU Z PODŁOŻEM SPRĘŻYSTYM PODDANYM WPŁYWOM SZKÓD GÓRNICZYCH

MICHAŁ ŻUKOWSKI

Politechnika Łódzka

1. Sformułowanie problemu

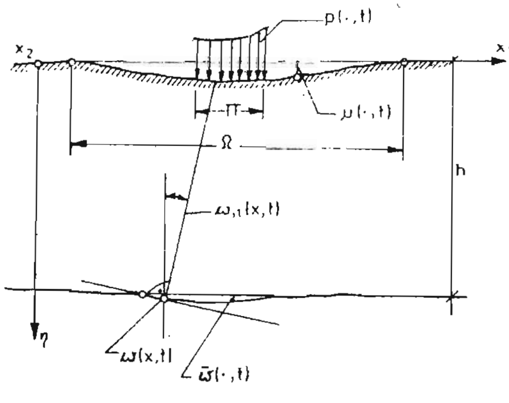
Statyczne i dynamiczne obliczenia obiektów (np. płyt lub belek) spoczywających na podłożu sprężystym wymagają uprzedniej znajomości warunków współdziałania obiektów z podłożem. Warunki te, mówiąc ogólnie, określają związek między siłami działania obiektu na podłoże (lub równymi im co do wielkości a przeciwnymi co do znaku reakcjami podłoża) a przemieszczeniami podłoża bezpośrednio pod obiektem. Najprostszym przykładem takiego związku jest liniowa zależność między naciskiem obiektu na podłoże z ugięciem podłoża, w której współczynnikiem proporcjonalności jest znany współczynnik Winklera. Bardziej ogólne podejście do formułowania takiej zależności podano w monografii [2], gdzie wprowadzono tzw. wieloparametrowe modele sprężystego podłoża, w przeciwieństwie do jednoparametrowego modelu Winklera.

W pracy tej wprowadzamy odpowiednie związki między obciążeniami a przemieszczeniami podłoża przy uwzględnieniu faktu, że samo podłoże może podlegać zmiennym w czasie deformacjom wywołanym ruchem górotworu. Z takimi sytuacjami spotykamy się na terenach szkód górniczych. Schemat zagadnienia przedstawia rys.1. Obiekt posadowiony jest na warstwie sprężystej o grubości h. Obszar kontaktu między obiektem a podłożem (jest to obszar na płaszczyźnie $0x_1x_2$) oznaczmy przez Π. Rozpatrywany dalej problem sformułujemy poniżej.
Przy założeniu, że są dane[1].

1. przemieszczenia pionowe punktów podłoża w chwili t, $t \in [t_0, t_f]$ na głębokości $\eta = h$, wywołane ruchem górotworu,

2. własności liniowo-sprężyste oraz bezwładne warstwy gruntu powiązanej na głębokości $\eta = h$ z poruszającym się górotworem

[1] Wskaźniki α, β, γ, σ przebiegają ciąg 1,2,3 natomiast wskaźniki k, l, m, n przebiegać będą ciąg 1,2. Symbol w_α oznacza składowe wektora $\mathbf{w}$ w układzie $0x_1x_2\eta$, natomiast w_k – pierwsze dwie składowe tego wektora (por.rys.1). Podobnie oznaczamy składowe tensorów.



Rys. 1.

znaleźć związek między obciążeniami $p_\alpha(x,t)$, $x \in \Pi$, $t \in [t_0, t_f]$, podłoża przez obiekt a przemieszczeniami $w_\alpha(x,t)$, $x \in \Pi$, $t \in [t_0, t_f]$, podłoża wywołanymi tymi obciążeniami.

2. Więzy kinematyczne

Rozwiązanie powyższego problemu uzyskamy stosując metodę więzów, omówioną między innymi w [1], wykorzystując pewne rezultaty podane w [2]. Podstawą rozważań będzie hipoteza kinematyczna (więzy) narzucona na składowe przemieszczeń cząstek warstwy gruntu stanowiącej walec o podstawie Ω na płaszczyźnie $0x_1x_2$, i o wysokości h (gdzie $\Pi \in \Omega$), przy czym dla $x \in R^2 \backslash \Omega$ przemieszczenie w warstwie dla $t \in [t_0, t_f]$ możemy przyjąć jako równe zeru.

Oznaczmy przez $\bar{w}(x,t)$, $x \in \Omega$, $t \in [t_0, t_f]$ przemieszczenie pionowe punktów podłoża leżących na głębokości $\eta = h$, które są wywołane ruchem górotworu (poniżej tej głębokości) dla $R^2 \backslash \Omega$ przyjmujemy $\bar{w}(x,t) = 0$. Niech punkt podłoża o współrzędnych $x = (x_1, x_2) \in \Omega$, $\eta \in [0, h]$, po deformacji podłoża wywołanej tak ruchem górotworu jak i obciążeniem $p_\alpha(x,t)$, $x \in \Pi$, części obszaru Π, $\Pi \in \Omega$ oraz ciężarem własnym gruntu przyjmie w chwili t położenie $z = (z_1, z_2, z_3)$, gdzie $z_k = z_k(x, \eta, t)$. Przy tak przyjętych oznaczeniach wprowadzimy do rozważań poniższą hipotezę kinematyczną (więzy).

Zakładamy, że przemieszczenia punktów warstwy są dane przez:

$$
\begin{aligned}
z_k - x_k &= [\bar{w}_k(x,t) + w_k(x,t)]\varphi(\eta), \\
z_3 - \eta &= \bar{w}(x,t) + w(x,t)\varphi(\eta),
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

$$\eta \in [0,h], \quad x \in \Omega, \quad t \in [t_0,t_f],$$

gdzie:

$$\varphi(\eta) = \frac{h-\eta}{h}, \qquad \bar{w}_k(x,t) = h\bar{w}_{,k}(x,t), \tag{2.2}$$

oraz gdzie $w(x,t), w_k(x,t), t \in [t_0,t_f]$ są dowolnymi dostatecznie regularnymi funkcjami, przyjmującymi wartości zerowe dla $x \in R^2\backslash\Omega$.

Powyższa hipoteza kinematyczna jest uogólnieniem jednej z hipotez dyskutowanych w [2]. Ponieważ $\varphi(x) = 0$, przeto zgodnie z (2.1) i (2.2) wielkości $\bar{w}_k(x,t) + w_k(x,t)$, $\bar{w}(x,t) + w(x,t)$ są przemieszczeniem $u_\alpha(x,t)$ punktów płaszczyzny granicznej $\eta = 0$:

$$\begin{aligned} u_k(x,t) &= \bar{w}_k(x,t) + w_k(x,t), \\ u_3(x,t) &= \bar{w}(x,t) + w(x,t). \end{aligned} \tag{2.3}$$

Formuła (2.3) wobec $\bar{w}_k = h\bar{w}_{,k}$ dostarcza interpretacji funkcji $w_k(x,t)$, $w(x,t)$ pojawiających się w hipotezie kinematycznej.

3. Równanie ruchu

Oznaczmy przez $T_{\alpha\beta}(x,\eta,t)$ składowe tensora naprężenia przez $\rho(x,\eta)$ – gęstość masy oraz przez $b_\alpha(x,\eta,t)$ – składowe sił masowych w warstwie; przyjmiemy z reguły $b_k(x,\eta,t) = 0$, $b_3(x,\eta,t) = 1$. Równanie ruchu warstwy napiszemy w postaci wariacyjnej:

$$\begin{aligned} \int_\Omega \int_0^h T_{\alpha\beta}(x,\eta,t) v_{\alpha,\beta}(x,\eta) d\eta dA &= \int_\Pi p_\alpha(x,t) v_\alpha(x,0) dA + \\ &+ \int_\Omega \int_0^h \rho(x,\eta)[b_\alpha(x,\eta,t) - \ddot{z}_\alpha(x,\eta,t)] d\eta v_\alpha(x,\eta) dA, \end{aligned} \tag{3.1}$$

gdzie: $dA = dx_1 dx_2$.
Równanie (3.1) może być spełnione, zgodnie z przyjętymi więzami (2.1), (2.2) dla:

$$v_\alpha(x,\eta) = \tilde{v}_\alpha(x)\varphi(\eta),$$

gdzie $\tilde{v}_\alpha(x)$, $x \in \Omega$ są dowolnymi funkcjami takimi, że $\tilde{v}_\alpha(x) = 0$ dla $x \in \partial\Omega$.

Po wprowadzeniu oznaczeń:

$$H_{kl}(x,t) \equiv \int_0^h 3T_{k,l}\varphi d\eta, \qquad h_k(x,t) \equiv \int_0^h T_{3k}\varphi d\eta,$$

$$
\begin{aligned}
G_k(x,t) &\equiv -\frac{1}{h}\int_0^h T_{3k}d\eta, \qquad g(x,t) \equiv -\frac{1}{h}\int_0^h T_{33}d\eta,\\
\bar{b}_k(x,t) &\equiv \int_0^h \rho b_k\varphi d\eta, \qquad b(x,t) \equiv \int_0^h \rho b_3\varphi d\eta, \qquad (3.2)\\
\tilde{\rho}(x) &\equiv \int_0^h \rho\varphi d\eta,
\end{aligned}
$$

wykorzystaniu twierdzenia o diwergencji i zastosowaniu tematu du Bois-Reymonda, otrzymamy:

$$
\begin{aligned}
-H_{k,l,l} + G_k &= p_k + b_k - \tilde{\rho}\ddot{w}_k,\\
-h_{k,k} + g &= p_3 + \bar{b} - \rho\ddot{w}, \qquad (3.3)
\end{aligned}
$$

przy dodatkowym założeniu, że siły inercji związane z ruchem górotworu można pominąć jako niewielkie. Wszystkie wielkości w (3.3) zależą tylko od $x = (x_1, x_2) \in \Pi$ oraz $t \in [t_0, t_f]$.

4. Związki konstytutywne

Przyjmujemy, że materiał warstwy jest liniowo-sprężysty o własnościach określonych równaniami:

$$
\begin{aligned}
T_{kl} &= C_{klmn}E_{mn} + C_{kl33}E_{33},\\
T_{3k} &= 2C_{3k3l}E_{3l}, \qquad (4.1)\\
T_{33} &= C_{33kl}E_{kl} + C_{3333}E_{33},
\end{aligned}
$$

gdzie $E_{\alpha\beta} = u(\alpha,\beta) + \bar{u}(\alpha,\beta)$ jest tensorem małego odkształcenia oraz $C_{\alpha\beta\gamma\delta}$ są modułami sprężystości. Zgodnie z (2.1), (2.2) mamy:

$$
\begin{aligned}
E_{kl} &= (\bar{w}_k + w_k)_{,l}\varphi,\\
2E_{k3} &= -\frac{1}{h}(\bar{w}_k + w_k) + \bar{w}_{,k} + w_{,k}\varphi, \qquad (4.2)\\
E_{33} &= -\frac{1}{h}w.
\end{aligned}
$$

Po wykorzystaniu (4.1) i (4.2) równania (3.2) po wprowadzeniu oznaczeń:

$$
C^{(n)}_{\alpha\beta\gamma\delta} \equiv \int_0^h C_{\alpha\beta\gamma\delta}(\varphi)^n d\eta, \qquad n = 0,1,2
$$

prowadzą do:

$$
\begin{aligned}
H_{kl} &= C^{(2)}_{klmn}(\bar{w}_m + w_m)_{,k} - C^{(1)}_{kl33}\frac{w}{h}, \\
h_k &= \frac{1}{2}C^{(1)}_{3k3l}\frac{w_k}{h} + \frac{1}{2}C^{(2)}_{3k3l}w_{,l}, \\
G_k &= \frac{1}{2h}C^{(1)}_{3k3l}\frac{w_l}{h} - \frac{1}{2h}C^{(2)}_{3k3l}w_{,l}, \\
g &= \frac{1}{h}C^{(0)}_{3333}\frac{w}{h} - \frac{1}{h}C^{(1)}_{33kl}(\bar{w}_k + w_k)_{,l}.
\end{aligned}
\tag{4.3}
$$

Wszystkie wielkości w (4.3) zależą tylko od $x = (x_1, x_2) \in \Pi$ oraz $t \in [t_0, t_f]$. W dalszym ciągu będziemy dodatkowo zakładać, że moduł sprężystości $C_{\alpha\beta\gamma\delta}$ zależy tylko od zmiennej η, $\eta \in [0, h]$.

5. Warunki współdziałania

Równania (3.3) i (4.3) prowadzą bezpośrednio do związku między obciążeniami $p(x,t)$, $x \in \Pi$, a deformacją tego podłoża. Deformacja ta jest określona przemieszczeniem $w(x,t)$, $x \in \Pi$, wywołanym ruchem górotworu oraz dodatkowym przemieszczeniem podłoża $w_\alpha(x,t)$, $x \in \Pi$, $t \in [t_0, t_f]$ zgodnie z (2.3).
Po wprowadzeniu oznaczeń:

$$
\begin{aligned}
\kappa &\equiv \frac{1}{h^2}C^{(0)}_{3333}, & H_{kl} &\equiv \frac{1}{2}C^{(2)}_{3k3l}, \\
G_{kl} &\equiv \frac{1}{2h}C^{(1)}_{3k3l} + \frac{1}{h}C^{(1)}_{33kl}, & \bar{H}_{kl} &\equiv C^{(1)}_{33kl}, \\
D_{kl} &\equiv \frac{1}{2h^2}C^{(1)}_{3k3l}, & F_{kl} &\equiv \frac{1}{h}C^{(1)}_{kl33} - \frac{1}{2h}C^{(2)}_{3k3l}, \\
J_{klmn} &\equiv C^{(2)}_{klmn}, & \bar{J}_{klmn} &\equiv hC^{(2)}_{klmn},
\end{aligned}
\tag{5.1}
$$

otrzymamy ostatecznie:

$$
\begin{aligned}
p_3 &= \kappa w - H_{kl}w_{,kl} - \bar{H}_{kl}\bar{w}_{,kl} - G_{kl}w_{k,l} + \bar{\rho}\ddot{\bar{w}} - b, \\
p_k &= D_{kl}w_l + F_{kl}w_{,l} - J_{klmn}w_{m,nl} - \bar{J}_{klmn}\bar{w}_{,mnl} + \tilde{\rho}\ddot{\bar{w}}_k - \bar{b}_k,
\end{aligned}
\tag{5.2}
$$

przy czym zgodnie z (2.2), (2.3) mamy tutaj:

$$
w = u_3 - \bar{w}, \qquad w_l = u_l - h\bar{w}_{,l}. \tag{5.3}
$$

Równania (5.2), (5.3), które moglibyśmy nazwać warunkami współdziałania obiektu z podłożem przy założeniu, że $\bar{w}(x,t)$, $x \in \Pi$, $t \in [t_0, t_f]$ jest znane, przedstawiają rozwiązania problemu sformułowanego we wstępie pracy.

W zagadnieniach, w których uwzględniamy tylko obciążenia prostopadłe do płaszczyzny ograniczającej niedokształcone podłoże (płaszczyzny $\eta = 0$), można uprościć dodatkowo hipotezę kinematyczną [2], przyjmując $w_k = 0$ (por. analogiczne założenie w [2]). Przeprowadzając wtedy ponownie rachunki analogiczne jak w p,p.2-4, otrzymamy zamiast (5.2), (5.3), po oznaczeniu $p = p_3$, $u = u_3$ oraz:

$$\bar{D}_{kl} = H_{kl} + \bar{H}_{kl},$$

formuły postaci:

$$\begin{aligned} p(x,t) &= \kappa u(x,t) - H_{kl} u_{,kl}(x,t) - \kappa \bar{w}(x,t) - \\ &- \bar{D}_{kl} \bar{w}_{,kl}(x,t) + \bar{\rho} \ddot{u}(x,t) - b(x,t). \end{aligned} \tag{5.4}$$

Dla warstwy gruntu o własnościach izotropowych, danych współczynnikami Léme $\mu(\eta)$, $\lambda(\eta)$, $\eta \in [0,h]$ z (5.4) po dodatkowych oznaczeniach:

$$\delta \equiv \frac{1}{2} \int_0^h [\varphi(\eta)]^2 \mu(\eta) d\eta, \qquad \bar{\delta} \equiv \int_0^h \varphi(\eta) \lambda(\eta) d\eta,$$

$$\kappa \equiv \frac{1}{h^2} \int_0^h [\lambda(\eta) + 2\mu(\eta)] d\eta,$$

otrzymamy:

$$p(x,t) = \kappa u(x,t) - \delta u_{,kk}(x,t) - \kappa \bar{w}(x,t) - (\delta - \bar{\delta}) \bar{w}_{,kk}(x,t) + \bar{\varphi} \ddot{u}(x,t) - \bar{b}(x,t). \tag{5.5}$$

Jak już poprzednio zaznaczono, równania (5.2), (5.3) lub (5.4) względnie (5.5) stanowią warunki współdziałania obiektu z podłożem przy założeniu, że znaczny jest rozkład przemieszczeń pionowych $\bar{w}(x,t)$, $x \in \Pi$, $t \in [t_0, t_f]$ na głębokości $\eta = h$ warstwy gruntu; przemieszczenia te są wywołane ruchem górotworu. Gdy znane są orientacyjne wielkości osiadania $\bar{u}(x,t)$ podłoża [2] na płaszczyźnie $\eta = 0$ to wielkości $\bar{w}(x,t)$ dla danych $\bar{u}(x,t)$ należałoby wyrugować. Odpowiedni jest tu model podłoża dany przez (5.4), a równanie dla $\bar{w}(x,t)$ ma postać:

$$D_{kl} \bar{w}_{kl} + \kappa \bar{w} = -H_{kl} \bar{u}_{,kl} + \kappa \bar{u} - \bar{b} - \bar{\rho} \ddot{\bar{u}}, \tag{5.6}$$

pozwalające na wyznaczenie $\bar{w}(x,t)$. Możliwa jest jednak tylko eliminacja $\bar{w}(x,t)$ z (5.4) za pomocą (5.6), prowadząca do:

$$\begin{aligned} p(x,t) &= \kappa[u(x,t) - \bar{u}(x,t)] - H_{kl}[u_{,kl}(x,t) - \bar{u}_{,kl}(x,t)] + \\ &+ \bar{\varphi}[\ddot{u}(x,t) - \ddot{\bar{u}}(x,t)]. \end{aligned} \tag{5.7}$$

[2] Należy pamiętać, że wielkości $\bar{u}(x,t)$ są liczone od stanu naturalnego, który nie jest znany

Podobnie formuła (5.5) daje:

$$
\begin{aligned}
p(x,t) &= \kappa[u(x,t) - \bar{u}(x,t) - \delta[u_{,kk}(x,t) - \bar{u}_{,kk}(x,t)] + \\
&+ \tilde{\varphi}[\ddot{u}(x,t) - \ddot{\bar{u}}(x,t)].
\end{aligned} \tag{5.8}
$$

Gdy na powierzchni $\eta = 0$ podłoża są znane nie tylko osiadania $\bar{u}_3(x,t)$ lecz także składowe przemieszczenia $u_k(x,t)$, wtedy postępując pod względem formalnym analogicznie jak powyżej, otrzymamy (dla uproszczenia pomijamy argumenty):

$$
\begin{aligned}
p_3 &= \kappa(u_3 - \bar{u}_3) - H_{kl}(u_{3,kl} - \bar{u}_{3,kl}) - G_{kl}(u_{k,l} - \bar{u}_{k,l}) + \tilde{\varphi}(\ddot{u}_3 - \ddot{\bar{u}}_3), \\
p_k &= D_{kl}(u_l - \bar{u}_l) - F_{kl}(u_{3,l} - \bar{u}_{3,l}) - J_{klmn}(u_{m,nl} - \bar{u}_{m,nl}) + \tilde{\rho}(\ddot{u}_k - \ddot{\bar{u}}_k).
\end{aligned} \tag{5.9}
$$

Należy zaznaczyć, że dla tego przypadku może nie istnieć funkcja $\bar{w}(x,t)$. Otrzymane równania (5.2), (5.3) oraz (5.4) lub (5.5) stanowią pewną propozycję wieloparametrowego modelu podłoża (w ogólności niejednorodnego i anizotropowego) poddanego wpływowi górotworu. Warunki (5.7) lub (5.8) względnie (5.9) uwzględniaja tylko osiadanie płaszczyzny $\eta = 0$ ograniczającej podłoże, przy czym wyznaczenie naprężeń w podłożu wymaga tutaj uprzedniego rozwiązania równania (5.6). Przykłady zastosowań otrzymanych warunków zostaną podane osobno.

Literatura

1. WOŹNIAK CZ.,KLEIBER M., *Nieliniowa mechanika konstrukcji*, PWN Warszawa 1982
2. CHUDEK M., *Mechanika górotworu*, Pol.Śląska, Gliwice 1976

Summary

The purpose of the paper is to derive the interrelation between the loadings and deformations in the subsoil subjected to the time dependdent mining damage. It has been assumed that the subsoil can be treated as elastic and its deformations are sufficiently small. The problem has been solved by the use of constraints method [1], and the results obtained generalize those given in [2], taking into account the motion of the ground.

Резюме

Целью работы является выведение зависимости между нагрузкой и деформацией основы подвергнутой изменяющемуся во времени влиянию повреждений наземных сооружений в результате горных работ. Принимается, что основы можно принять упругой, а ей деформации - довольно малы. Проблема решена с помощю метода связей [1], а полученные результаты является обобщением результатов данных в [2], на слычаи учитывающие движения горных пород, окружающих горные выработки.

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 29 czerwca 1988 roku