

Z ZAGADNIENÍ STATYKI TARCZ O ŚREDNIEJ GRUBOŚCI

EUGENIUSZ BARON

Politechnika Śląska, Gliwice

1. Wstęp

W pracy przedłożono pewną propozycję podejścia do zagadnień z zakresu teorii tarcz sprężystych, w których stan naprężenia nie może być aproksymowany stanem płaskim, a więc i stosowanie metod opartych na teorii klasycznej jest niemożliwe. Korzystając z założeń mechaniki analitycznej kontinuum materialnego z więzami, przetestowano pewną klasę zagadnień z zakresu teorii tarcz. Do opisu tarcz o średniej grubości zaproponowano model nazwany pseudopłaskim stanem równowagi [1], dla którego klasyczny płaski stan naprężenia jest przypadkiem asymptotycznym. Model ten umożliwia sprowadzenie rozwiązania zagadnień przestrzennych, w ramach liniowej teorii tarcz, do rozwiązania płaskiego zagadnienia granicznego. Podobnie – i na ym głównie skoncentrowano się w niniejszej pracy – model ten pozwala sprowadzić rozwiązanie klasycznego zagadnienia płaskiego do rozwiązania zagadnienia granicznego przy jednej zmiennej niezależnej, czyli rozwiązania układu równań różniczkowych zwyczajnych zamiast cząstkowych.

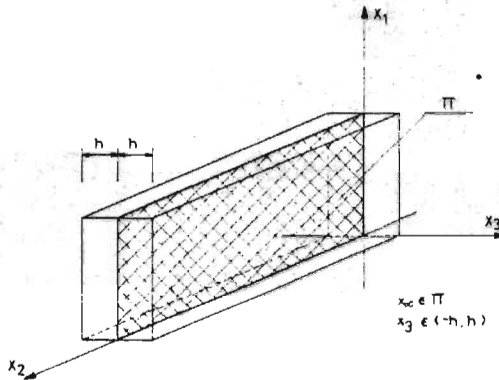
Spis oznaczeń

- α, β — wskaźniki przebiegające ciąg 1,2,
- i, j — wskaźniki przebiegające ciąg 1,2,3,
- X_i — składowe sił masowych,
- $2h$ — grubość tarczy,
- λ, μ — stałe Lamé'go,
- ν — współczynnik Poissona,

$$k^2 = \frac{12 \lambda + \mu}{h^2 \lambda + 2\mu},$$

$$\kappa_0 = \frac{\lambda + 2\mu}{\lambda}, \quad \kappa = \frac{3\lambda + 2\mu}{2\lambda}, \quad \bar{\kappa} = \frac{5\lambda + 6\mu}{2\lambda}, \quad \kappa_0 = \bar{\kappa} - \kappa.$$

2. Pseudopłaski stan równowagi sprężystej dla tarczy izotropowej



Rys. 1.

Ciało będące w stanie naturalnym (rys.1) utożsamiamy będziemy z regularnym obszarem Ω w przestrzeni R^3 parametryzowanej prostokątnym kartezjańskim układem współrzędnych $\{x_i\}$. Obszar Ω da się przedstawić w postaci iloczynu kartezjańskiego $\Omega = \Pi \times L$ regularnych obszarów $\Pi \in R^2$, $L = \langle -h, h \rangle \subset R$.

Deformacja ciała opisywana będzie wektorem przemieszczenia w o składowych $w_i = w_i(x_\alpha, x_3)$, a stan naprężenia symetrycznym tensorem naprężenia $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(x_\alpha, x_3)$.

Na składowe wektora przemieszczenia zostały narzucone więzy geometryczne:

$$\begin{aligned} w_\alpha &= u_\alpha(x_\beta), \\ w_3 &= \varepsilon(x_\alpha)x_3. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Jest to najprostsza postać więzów geometrycznych sprowadzająca przestrzenną deformację do płaskiego zagadnienia granicznego. Wyraża ona hipotezę, że włókno materialne równoległe do tworzących brzegu $\partial\Pi \times L$, ograniczających ciało w konfiguracji wyjściowej, pozostają równoległe do tych tworzących w każdej konfiguracji i doznają tylko jednorodnych odkształceń podłużnych [1].

Korzystając z założeń mechaniki analitycznej kontinuum materialnego z więzami [6], wprowadzamy do równania idealności więzów geometrycznych zależności wynikające z równań równowagi wewnętrznej (przy $X_3 \equiv 0$) i kinetycznych warunków brzegowych. Uwzględniając następnie równania konstytutywne oraz równania (2.1), po formalnych przekształceniach i wykorzystaniu lematu du Bois-Reymonda dochodzimy do następujących, przemieszczeniowych równań

równowagi w obszarze Π :

$$\mu \nabla_1^2 u_\alpha + (\lambda + \mu) u_{\beta, \alpha \beta} + \lambda \varepsilon_{, \alpha} + \frac{1}{2h} \int_{-h}^h X_\alpha dx_3 = 0,$$

$$\mu \frac{h^2}{3} \nabla_1^2 \varepsilon - (\lambda + 2\mu) \varepsilon - \lambda u_{\beta, \beta} = 0, \quad (2.2)$$

oraz kinetycznych warunków brzegowych na $\partial \Pi$:

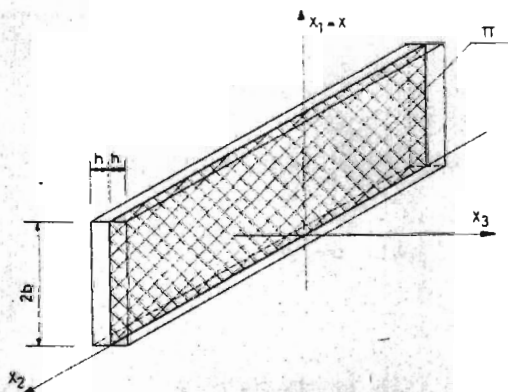
$$\mu (u_{\alpha, \beta} + u_{\beta, \alpha}) n_\beta + \lambda u_{\beta, \beta} n_\alpha + \lambda \varepsilon n_\alpha = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h q_\alpha dx_3,$$

$$\mu \varepsilon_{, \alpha} n_\alpha = \frac{3}{2h^3} \int_{-h}^h q_3 x_3 dx_3, \quad (2.3)$$

gdzie n_α są składowymi wektora normalnego do $\partial \Pi \times L$ [1],[3].

Do równań (2.3) należy dołączyć geometryczne warunki brzegowe.

3. Pasma tarczowe o średniej grubości obciążone równomiernie



Rys. 2.

Równania (2.2) i (2.3) zastosowano do rozwiązania pasma tarczowego (rys.2) o szerokości $2b$ i grubości $2h$, rozciągającego się nieograniczenie w kierunku dodatnim

i ujemnym osi x_2 . Przyjęto obciążenie zewnętrzne stałe, równomiernie rozłożone na grubości tarczy, o jednej niezerowej składowej:

$$q_1 = q = \text{const.},$$

przyłożone w płaszczyznach $x_1 = 0$ lub $x_1 = 2b$.

Założono dalej, że także siły masowe są stałe i posiadają jedną niezerową składową:

$$X_1 \equiv X = \text{const.}$$

Przy takich założeniach przemieszczenia, odkształcenia i naprężenia są niezależne od zmiennej x_2 .

Oznaczając $x_1 \equiv x$ oraz $\frac{\partial f(x)}{\partial x} = f'(x)$, $\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} = f''(x)$, układ równań (2.2) redukuje się do układu równań różniczkowych zwyczajnych:

$$(\lambda + 2\mu)u_1'' + \lambda\varepsilon' - X = 0,$$

$$u_2'' = 0, \quad (3.1)$$

$$\mu \frac{h^2}{3} \varepsilon'' - (\lambda + 2\mu)\varepsilon - \lambda u_1' = 0,$$

z kinetycznymi warunkami brzegowymi:

$$(\lambda + 2\mu)u_1' + \lambda\varepsilon = -q,$$

$$u_2' = 0, \quad (3.2)$$

$$\varepsilon' = 0,$$

dla $x = 0$ lub $x = 2b$.

Rozwiązaniem układu równań (3.1) są funkcje:

$$u_1 = c_1 - \kappa_0 c_2 x - \frac{1}{\kappa_0 k} c_3 \sinh kx - \frac{1}{\kappa_0 k} c_4 \cosh kx - \frac{1}{2} \kappa_0 \tilde{X} x^2,$$

$$u_2 = D_1 + D_2 x, \quad (3.3)$$

$$\varepsilon = c_2 + c_3 \cosh kx + c_4 \sinh kx - \tilde{X} x,$$

gdzie $\tilde{X} = \frac{\lambda}{4\mu(\lambda + \mu)} X$.

Z warunku symetrii i (3.3)₂ wynika, że $D_1 = D_2 = 0$, a więc i $u_2 = 0$. Składowe tensora naprężenia określamy ze wzorów:

$$\sigma_{11} = (\lambda + 2\mu)u_1' + \lambda\varepsilon,$$

$$\sigma_{13} = \mu\varepsilon' x_3,$$

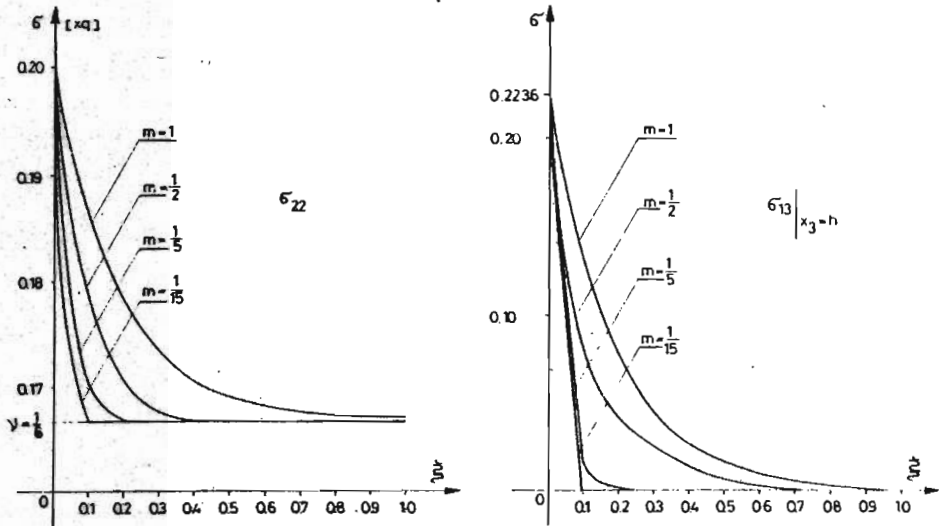
$$\sigma_{22} = \lambda(u_1' + \varepsilon),$$

$$\sigma_{23} = \sigma_{12} = 0. \quad (3.4)$$

$$\sigma_{33} = \lambda u_1' + (\lambda + 2\mu)\varepsilon,$$

Pomijając dla uproszczenia wpływ sił masowych (tzn. przyjmując $X \equiv 0$), uzyskane rozwiązanie (3.3) posłużyć może do oceny konsekwencji często stosowanej zamiany geometrycznych warunków brzegowych na kinetyczne. Jeśli na płaszczyznach $x = 0$ i $x = 2b$ wystąpią wyłącznie kinetyczne warunki brzegowe (3.2), na podstawie zależności (3.3) i (3.4) otrzymamy rozwiązanie klasyczne, czyli $\sigma_{11} = -q$, $\sigma_{22} = -\nu q$ [5], a pozostałe składowe tensora naprężenia będą równe zeru.

Natomiast przyjmując, że tarcza (rys.2) jest utwierdzona w płaszczyźnie $x = 0$,



Rys. 3.

co pociąga za sobą geometryczne warunki brzegowe:

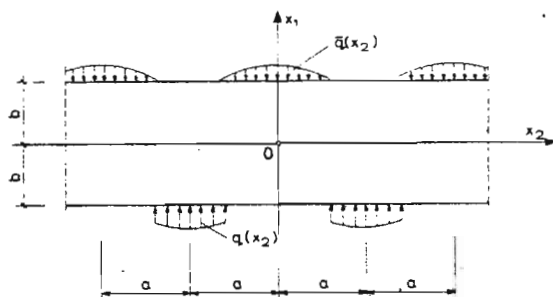
$$u_1 = u_2 = \varepsilon = 0 \quad \text{dla } x = 0,$$

a na płaszczyźnie $x = 2b$ wystąpią kinetyczne warunki brzegowe w postaci (3.2), otrzymamy następujące wartości składowych tensora naprężenia:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= -q, \\ \sigma_{12} &= \sigma_{23} = 0, \\ \sigma_{22} &= \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \left[1 + \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \frac{\cosh k(2b - x)}{\cosh 2kb} \right] q, \\ \sigma_{13} &= \left[\frac{\lambda}{4(\lambda + \mu)} \frac{\sinh k(2b - x)}{\sinh 2kb} \right] q k x_3, \\ \sigma_{33} &= - \left[\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \frac{\cosh k(2b - x)}{\cosh 2kb} \right] q. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Wprowadzając we wzorach (3.5) współrzędną bezwymiarową $\xi = \frac{x}{2b}$, $\xi \in < 0, 1 >$ i wyodrębniając parametr $m = \frac{h}{b}$, można przeanalizować rozkład naprężeń σ_{22} , σ_{13} i σ_{33} na szerokości tarczy w zależności od m i określić zasięg strefy zaburzeń wywołanej utwierdzeniem tarczy. dla materiału o współczynniku Poissona $\nu = \frac{1}{6}$ rozkład naprężeń σ_{22} i σ_{13} (dla $x_3 = h$) przedstawia rysunek 3.

4. Pasma tarczowe obciążone periodycznie



Rys. 4.

Pasma tarczowe grubości $2h$ jest ograniczone brzegami $x_1 = \pm b$ i ciągnie się w nieskończoność w kierunku $\pm x_2$ (rys.4). Obciążenie jest normalne do brzegów $x_1 = \pm b$, symetryczne względem $x_2 = 0$ i ma okres $L = 2a$. W granicach każdego okresu obciążenie \bar{q} na brzegu górnym i q na brzegu dolnym wzajemnie się równoważą. Obciążenie przedstawiamy w postaci szeregów Furiera:

$$\begin{aligned} \bar{q}(x_2) &= \frac{1}{2} \bar{a}_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \bar{a}_m \cos \alpha_m x_2, \\ q(x_2) &= \frac{1}{2} a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos \alpha_m x_2, \\ \alpha_m &= \frac{m\pi}{a}, \quad m = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (4.1)$$

Oznaczając dodatkowo:

$$\beta_m = \sqrt{k^2 + \lambda_m^2}, \quad d = \frac{\lambda}{8\mu(\lambda + \mu)} a_0,$$

otrzymamy rozwiązanie równań (2.2), z pominięciem sił masowych, w następującej

postaci:

$$\begin{aligned}
 u_1 &= d\kappa_0 x_1 - \sum_{m=1}^{\infty} \left[\left(\frac{\bar{\kappa}}{\alpha_m} B_m + F_m \right) \sinh \alpha_m x_1 + \left(\frac{\bar{\kappa}}{\alpha_m} A_m + E_m \right) \cosh \alpha_m x_1 + \right. \\
 &\quad - \kappa A_m x_1 \sinh \alpha_m x_1 - \kappa B_m x_1 \cosh \alpha_m x_1 + \frac{1}{\kappa_0 k^2} (\alpha_m A_m \cosh \alpha_m x_1 + \\
 &\quad \left. + \alpha_m B_m \sinh \alpha_m x_1 + \beta_m C_m \cosh \beta_m x_1 + \beta_m D_m \sinh \beta_m x_1) \right] \cos \alpha_m x_2, \\
 u_2 &= \sum_{m=1}^{\infty} \left[E_m \sinh \alpha_m x_1 + F_m \cosh \alpha_m x_1 - \kappa B_m x_1 \sinh \alpha_m x_1 + \right. \\
 &\quad - \kappa A_m x_1 \cosh \alpha_m x_1 + \frac{\alpha_m}{\kappa_0 k^2} (A_m \sinh \alpha_m x_1 + B_m \cosh \alpha_m x_1 + \\
 &\quad \left. + C_m \sinh \beta_m x_1 + D_m \cosh \beta_m x_1) \right] \sin \alpha_m x_2, \\
 \varepsilon &= d + \sum_{m=1}^{\infty} (A_m \sinh \alpha_m x_1 + B_m \cosh \alpha_m x_1 + C_m \sinh \beta_m x_1 + \\
 &\quad + D_m \cosh \beta_m x_1) \cos \alpha_m x_2.
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

Stałe A_m , B_m , C_m , D_m , E_m , F_m wyznaczono z warunków brzegowych na płaszczyznach $x_1 = \pm b$, czyli:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{,1} &= 0, \\
 u_{1,2} + u_{2,1} &= 0 \quad \text{dla } x_1 = \pm b, \\
 (\lambda + 2\mu)u_{1,1} + \lambda u_{2,2} + \lambda \varepsilon &= -\bar{q} \quad \text{dla } x_1 = +b, \\
 (\lambda + 2\mu)u_{1,1} + \lambda u_{2,2} + \lambda \varepsilon &= -q \quad \text{dla } x_1 = -b.
 \end{aligned}$$

Wartości tych stałych są następujące:

$$\begin{aligned}
 F_m &= -\frac{1}{2\alpha_m} (\kappa_0 - 2\kappa\alpha_m b \coth \alpha_m b) B_m, \\
 E_m &= -\frac{1}{2\alpha_m} (\kappa_0 - 2\kappa\alpha_m b \tanh \alpha_m b) A_m, \\
 D_m &= -\frac{\alpha_m \sinh \alpha_m b}{\beta_m \sinh \beta_m b} B_m, \\
 C_m &= -\frac{\alpha_m \cosh \alpha_m b}{\beta_m \cosh \beta_m b} A_m, \\
 B_m &= \frac{1}{2\mu} (\bar{a}_m + a_m) R_m, \\
 A_m &= \frac{1}{2\mu} (\bar{a}_m - a_m) S_m,
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

gdzie:

$$\frac{1}{S_m} = \frac{\kappa}{\cosh \alpha_m b} (\sinh 2\alpha_m b - 2\alpha_m b) - \frac{2\alpha_m^2}{\kappa_0 k^2} \cosh \alpha_m b \left(\tanh \alpha_m b - \frac{\alpha_m}{\beta_m} \tanh \beta_m b \right),$$

$$\frac{1}{R_m} = \frac{\kappa}{\sinh \alpha_m b} (\sinh 2\alpha_m b + 2\alpha_m b) - \frac{2\alpha_m^2}{\kappa_0 k^2} \sinh \alpha_m b (\coth \alpha_m b - \frac{\alpha_m}{\beta_m} \coth \beta_m b).$$

Znając wartości przemieszczeń, korzystając z równań konstytutywnych i równań Cauchy'ego, łatwo można już obliczyć składowe tensora naprężenia ze wzorów:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= (\lambda + 2\mu)u_{1,1} + \lambda u_{2,2} + \lambda \varepsilon, \\ \sigma_{22} &= (\lambda + 2\mu)u_{2,2} + \lambda u_{1,1} + \lambda \varepsilon, \\ \sigma_{33} &= \lambda(u_{1,1} + u_{2,2}) + (\lambda + 2\mu)\varepsilon, \\ \sigma_{12} &= \mu(u_{1,2} + u_{2,1}), \\ \sigma_{13} &= \mu \varepsilon_{,1} x_3, \quad \sigma_{23} = \mu \varepsilon_{,2} x_3. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Dla przykładu:

$$\sigma_{33} = - \sum_{m=1}^{\infty} [(\bar{a}_m + a_m)R_m \cosh \beta_m x_1 + (\bar{a}_m - a_m)S_m \sinh \beta_m x_1] \cos \alpha_m x_2.$$

5. Tarcza pierścieniowa o średniej grubości

Równania pseudopłaskiego stanu równowagi wewnętrznej (2.2), zapisane w prostokątnym kartezjańskim układzie współrzędnych, przetransformowano na układ współrzędnych walcowych r, θ, z . Równania więzów geometrycznych przedstawiono w postaci następującej:

$$\begin{aligned} w_r &= u_r(r, \theta), \\ w_\theta &= u_\theta(r, \theta), \\ w_z &= \varepsilon(r, \theta)z. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Postępując identycznie jak opisano w punkcie 1, oznaczając dodatkowo pochodne cząstkowe względem r i θ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial r} &= f_{,1}, & \frac{\partial f}{\partial \theta} &= f_{,2}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} &= f_{,11}, & \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} &= f_{,22}, & \frac{\partial^2 f}{\partial r \partial \theta} &= f_{,12}, \end{aligned}$$

wyprowadzono równania równowagi tarczy pierścieniowej o grubości $2h$ we współrzędnych walcowych:

$$(\lambda + 2\mu)(u_{r,1} + \frac{1}{r}u_r)_{,1} + \mu \frac{1}{r^2}u_{r,22} + (\lambda + \mu)\frac{1}{r}u_{\theta,12} - (\lambda + 3\mu)\frac{1}{r^2}u_{\theta,2} + \lambda \varepsilon_{,1} = 0,$$

$$\begin{aligned}
 (\lambda + \mu) \frac{1}{r} u_{r,12} + (\lambda + 3\mu) \frac{1}{r^2} u_{r,2} + (\lambda + 2\mu) \frac{1}{r^2} u_{\Theta,22} + \mu (u_{\Theta,1} + \frac{1}{r} u_{\Theta})_{,1} + \\
 + \lambda \frac{1}{r} \varepsilon_{,2} = 0, \quad (5.2)
 \end{aligned}$$

$$-\lambda (u_{r,1} + \frac{1}{r} u_r) - \lambda \frac{1}{r} u_{\Theta,2} + \mu \frac{h^2}{3} (\varepsilon_{,11} + \frac{1}{r^2} \varepsilon_{,22} + \frac{1}{r} \varepsilon_{,1}) - (\lambda + 2\mu) \varepsilon = 0,$$

z kinetycznymi warunkami brzegowymi na $\partial\Pi \times L$:

$$\begin{aligned}
 [(\lambda + 2\mu) u_{r,1} + \lambda \frac{1}{r} u_r + \lambda \frac{1}{r} u_{\Theta,2}] n_r &= \frac{1}{2h} \int_{-h}^h q_r dz, \\
 \mu (\frac{1}{r} u_{r,2} + u_{\Theta,1} - \frac{1}{r} u_{\Theta}) n_r &= \frac{1}{2h} \int_{-h}^h q_{\Theta} dz, \quad (5.3)
 \end{aligned}$$

$$\mu \varepsilon_{,1} n_r = \frac{3}{2h^3} \int_{-h}^h q_z z dz.$$

Równania (5.2) i (5.3) zastosowano do rozwiązania tarczy pierścieniowej obciążonej na $\partial\Pi \times L$ obciążeniem symetrycznym względem osi z . W tym przypadku składowe wektora przemieszczenia są niezależne od zmiennej Θ ; rozwiązaniem równania (5.2)₂ jest $u_{\Theta} = 0$, a cały układ równań (5.2) redukuje się do układu równań różniczkowych zwyczajnych. Oznaczając $u_r \equiv u$, $r \equiv x$ otrzymamy następujące równania równowagi tarczy pierścieniowej obciążonej symetrycznie osiowo:

$$\begin{aligned}
 [(\lambda + 2\mu) (u_{,1} + \frac{1}{x} u) + \lambda \varepsilon]_{,1} &= 0, \\
 \varepsilon_{,11} + \frac{1}{x} \varepsilon_{,1} - k^2 \varepsilon &= 0, \quad (5.4)
 \end{aligned}$$

oraz kinetyczne warunki brzegowe na $\partial\Pi \times L$:

$$\begin{aligned}
 [(\lambda + 2\mu) u_{,1} + \lambda \frac{1}{x} u + \lambda \varepsilon] n_x &= \frac{1}{2h} \int_{-h}^h q_x dz, \\
 \mu \varepsilon_{,1} n_x &= \frac{2}{3h^3} \int_{-h}^h q_z z dz, \quad (5.5)
 \end{aligned}$$

gdzie n_x jest składową wektora normalnego do $\partial\Pi \times L$.

Rozwiązaniem układu równań (5.4) są funkcje:

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{\kappa_0 k} [-c_1 I_1(kx) + c_2 K_1(kx)] - \frac{1}{2} \kappa_0 c_3 x + c_4 \frac{1}{x}, \\ \varepsilon &= c_1 I_0(kx) + c_2 K_0(kx) + c_3, \end{aligned} \quad (5.6)$$

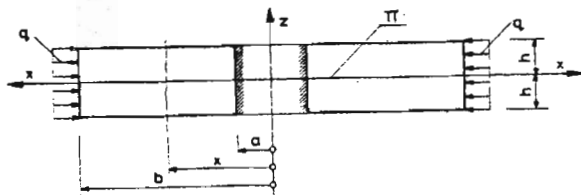
gdzie I_0 , I_1 , K_0 , K_1 są zmodyfikowanymi funkcjami Bessela (argumentu rzeczywistego) rodzaju pierwszego i drugiego.

Po wyznaczeniu stałych c_1 , c_2 , c_3 , c_4 z równań (5.6), do których należy dołączyć geometryczne warunki brzegowe, obliczamy składowe tensora naprężenia z relacji:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= 2\mu \left\{ \frac{1}{\kappa_0 k x} [c_1 I_1(kx) - c_2 K_1(kx)] - \kappa c_3 - c_4 \frac{1}{x^2} \right\}, \\ \sigma_{\theta\theta} &= 2\mu \left\{ \frac{1}{\kappa_0} [c_1 I_0(kx) + c_2 K_0(kx)] - \frac{1}{\kappa_0 k x} [c_1 I_1(kx) + \right. \\ &\quad \left. - c_2 K_1(kx)] - \kappa c_3 + c_4 \frac{1}{x^2} \right\}, \\ \sigma_{zz} &= 2\mu \frac{1 + \kappa_0}{\kappa_0} [c_1 I_0(kx) + c_2 K_0(kx)], \\ \sigma_{r\theta} &= \sigma_{\theta z} = 0, \\ \sigma_{rz} &= \mu [c_1 I_1(kx) - c_2 K_1(kx)] k x. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Rozwiązanie ogólne (5.6) posłużyło do analizy stanu przemieszczenia i naprężenia w tarczy pierścieniowej, przy uwzględnieniu geometrycznych warunków brzegowych.

5.1. Tarcza pierścieniowa ściskana osiowo - symetrycznie, utwierdzona na brzegu $x = a$ (rys. 5)



Rys. 5.

Uwzględniając warunki brzegowe wg rys.5:

$$\frac{1}{\kappa_0 k b} [c_1 I_1(kb) - c_2 K_1(kb)] - \kappa c_3 - \frac{c_4}{b^2} = -\frac{q}{2\mu},$$

$$c_1 I_1(kb) - c_2 K_1(kb) = 0, \quad (5.8)$$

$$u|_{x=a} = 0,$$

$$\varepsilon|_{x=a} = 0.$$

Oznaczając dodatkowo:

$$\alpha = \frac{b}{a}, \quad s = a\left(\frac{1}{2}\kappa_0 + \kappa\alpha^2\right), \quad \bar{q} = q\frac{a\alpha^2}{2\mu}\kappa_0 k,$$

$$W = I_1(ka)K_1(kb) - I_1(kb)K_1(ka) - k\kappa_0 s [I_0(ka)K_1(kb) + I_1(kb)K_0(ka)],$$

otrzymamy wyrażenia na stałe całkowania:

$$\begin{aligned} c_1 &= \bar{q} \frac{K_1(kb)}{W}, \\ c_2 &= \bar{q} \frac{I_1(kb)}{W}, \\ c_3 &= -\bar{q} \frac{I_0(ka)K_1(kb) + I_1(kb)K_0(ka)}{W}, \\ c_4 &= \bar{q} \frac{a \frac{1}{\kappa_0} [I_1(ka)K_1(kb) - I_1(kb)K_1(ka)] - \frac{1}{2}\kappa_0 [I_0(ka)K_1(kb) + I_1(kb)K_0(ka)]ka}{W}. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Korzystanie z wzorów (5.9), z uwagi na występowanie funkcji Bessela, nastęrcza pewne trudności. Można jednak w niektórych przypadkach zastąpić funkcje Bessela ich rozwinięciami asymptotycznymi:

$$\begin{aligned} I_0(kx) &= I_1(kx) = \sqrt{\frac{1}{2\pi kx}} e^{kx}, \\ K_0(kx) &= K_1(kx) = \sqrt{\frac{\pi}{2kx}} e^{-kx}. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Przyjmuje się, że korzystanie z wzorów (5.10) jest uzasadnione przy wartości argumentu funkcji Bessela większym od 10, łatwo można obliczyć przy jakiej wartości $\frac{a}{h}$, dla danego materiału, można stosować rozwinięcia asymptotyczne:

$$\begin{aligned} ka &= \frac{a}{h} \sqrt{6 \frac{1}{1-\nu}} > 10, \\ \frac{a}{h} &> 10 \sqrt{\frac{1-\nu}{6}}. \end{aligned}$$

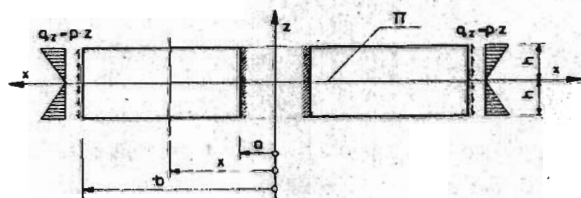
Na przykład: przy $\nu = 0$, powinno być $\frac{a}{h} > 4.1$, a przy $\nu = 0.5$ $\frac{a}{h} > 2.9$.

Kombinacje funkcji Bessela występujące w (5.9), przy uwzględnieniu (5.10) dadzą się przedstawić następująco:

$$\begin{aligned} I_0(ka)K_1(kb) + I_1(kb)K_0(ka) &= \frac{1}{k\sqrt{ab}} \cosh k(b-a), \\ I_1(ka)K_1(kb) - I_1(kb)K_0(ka) &= -\frac{1}{k\sqrt{ab}} \sinh k(b-a). \end{aligned} \quad (5.11)$$

Wart podkreślenia jest także fakt, że w przypadku wyłącznie kinetycznych warunków brzegowych, np. obciążenia q_a na brzegu $x = a$ i obciążenia q_b na brzegu $x = b$ otrzymujemy $C_1 = C_2 = 0$, a uzyskane na podstawie (5.7) relacje na naprężenia σ_{rr} i $\sigma_{\theta\theta}$ (pozostałe składowe są równe zero) pokrywają się ze znanymi wzorami Lamé'go [2], [4].

5.2. Tarcza pierścieniowa obciążona obciążeniem stycznym, utwierdzona na brzegu $x = a$ (rys. 6)



Rys. 6.

Uwzględniając warunki brzegowe dla tarczy na rysunku 6:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\kappa_0 kb} [c_1 I_1(kb) - c_2 K_1(kb)] - \kappa c_3 - \frac{c_4}{b^2} &= 0, \\ \mu k [c_1 I_1(kb) - c_2 K_1(kb)] &= p, \\ u|_{x=a} &= 0, \\ \varepsilon|_{x=a} &= 0, \end{aligned} \quad (5.12)$$

otrzymamy następujące wyrażenia na stałe całkowania:

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{p}{\mu k} \frac{\alpha K_1(kb) - K_1(ka) - k\kappa_0 s K_0(ka)}{W}, \\ c_2 &= \frac{p}{\mu k} \frac{\alpha I_1(kb) - I_1(ka) + k\kappa_0 s I_0(ka)}{W}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 c_3 &= \frac{p}{\mu k} \frac{\frac{1}{ka} - \alpha [I_0(ka)K_1(kb) + I_1(kb)K_0(ka)]}{W}, \\
 c_4 &= \frac{p}{\mu k} \frac{\alpha a}{k} \left\{ \frac{\frac{1}{\kappa_0} [I_1(ka)K_1(kb) - I_1(kb)K_1(ka)]}{W} + \right. \\
 &\quad \left. \frac{-\frac{1}{2}\kappa_0 a k [I_0(ka)K_1(kb) + I_1(kb)K_0(ka)] - \kappa \alpha}{W} \right\}.
 \end{aligned} \tag{5.13}$$

Do obliczenia wartości tych stałych, przy odpowiednich $\frac{a}{h}$, można stosować rozwinięcia asymptotyczne funkcji Bessela (5.10).

6. Uwagi końcowe

Przedstawione w paracy rozwiązania pewnych zagadnień z zakresu statyki tarcz sprężystych o średniej grubości, stanowić mogą podśawę do dalszej analizy i rozwiązania szeregu istotnych zagadnień inżynierskich. Bardzo łatwo można np. uwzględnić podatność podpór. Istotnym zagadnieniem jest także zagadnienie tarczy prostokątnej. Przyjmując, że funkcje u_α we wzorach (2.1) posiadają potencjał, tzn., że:

$$u_\alpha = \Phi_{,\alpha},$$

otrzymamy z relacji (2.2), przy pominięciu sił masowych, następujące przemieszczeniowe równania równowagi tarczy w obszarze Π :

$$(\nabla_1^2 \Phi + \frac{1}{\kappa_0} \varepsilon)_{,\alpha} = 0,$$

$$\nabla_1^2 \varepsilon - k^2 \varepsilon = c, \tag{6.1}$$

gdzie c jest pewną stałą.

Układ równań (6.1), przy mieszanych warunkach brzegowych, można rozwiązać z wykorzystaniem metod numerycznych.

Przytoczone w pracy rozwiązania pewnych przykładów z zakresu teorii tarcz, uwzględniają także geometryczne warunki brzegowe. Uzyskane wyniki można porównać z rozwiązaniami klasycznej teorii tarcz, uwzględniającymi tylko kinetyczne warunki brzegowe (z często stosowaną zamianą warunków geometrycznych na kinetyczne). Występowanie parametru h (grubość tarczy) umożliwia, po przetestowaniu odpowiednio szerokiej klasy zagadnień, ustalenie ścisłego kryterium podziału na tarcze "cienkie" i tarcze o średniej grubości.

Literatura

1. BOJDA K.H., *Teoria uogólnionych pseudopłaskich stanów równowagi sprężystej*, Zeszyty Naukowe Pol.Śl. nr 516, Gliwice 1977
2. FUNG Y.C., *Podstawy mechaniki ciała stałego*, PWN, Warszawa 1969
3. KUBIEŃ P., BARON E., *Formułowanie płaskich zagadnień granicznych niektórych przestrzennych problemów liniowej teorii sprężystości, cz.I i II*, Zeszyty Naukowe Pol.Śl. nr 603, Gliwice 1980
4. NOWACKI W., *Dźwigary powierzchniowe*, PWN, Warszawa 1979
5. TIMOSCHENKO S., GOODIER J.N., *Teoria sprężystości*, Arkady, Warszawa 1962
6. WOŹNIAK Cz., *Elastokinetyka form konstrukcyjnych*, w pracy zbiorowej: *Dźwigary powierzchniowe*, Ossolineum, Wrocław 1975

Summary

The paper introduced a new approach to certain problems of the theory of elastic plates in pseudoplane state of stress. The pseudoplane state of stress has been adopted to describe the behaviour of the middle thickness plates taking into account that the classical plane state of stress is the asymptotic case of the state considered throughout the paper.

The proposed approach is illustrated by a number of solutions to special problems.

Резюме

В работе представлены некоторые предложения подхода к вопросам теории упругих пластинок, в которых существует псевдоплоское напряженное состояние. Для рассмотрения пластинок средней толщины была принята модель псевдоплоского состояния напряжения, для которого классическое состояние напряжения является асимптотическим случаем. Представлено предложение иллюстрировано несколькими примерами решения некоторых проблем.

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 7 grudnia 1988 roku