MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
2, 29, 1991

SUR UN MILIEU DÉNOMBRABLE

Roman Nagórski

Piotr Wiśniakowski

L'École Politechnique de Varsovie

1. Introduction

Dans le travail [1] a présenté une conception de la mécanique des milieux dénombrables, i.e. des systèmes matériels dont des configurations peuvent-être déterminées à l'aide des suites (généralisées). Sous les hypothèses de la mécanique classique déterministe on a introduit des définitions du milieu dénombrable, de l'espace de configuration et de l'espace des fonctions du mouvement ainsi que des notions et des équations fondamentales de la cinématique et de la dynamique des milieux dénombrables. La forme de ces notions et équations est une généralisation sur des espaces vectoriels des suites infinies de la forme des notions et des équations connues de la mécanique analitique des systèmes à nombre fini des degrés de liberté. On a présenté aussi la génèse du thème, on a discuté quelques problèmes importants de nature mathématique et on a indiqué sur des possibilités d'applications de tels milieux.

Le travail [2] contient certain développement des idés exposées dans l'article [1]. En cas des espaces normés des configurations et des fonctions du mouvement deux fois continûment dérivables (par rapport à la variable temporelle) on a présenté des éléments de la cinématique et la dynamique des milieux dénombrables. Les considérations théoriques du mémoire [2] on a illustré dans [3] d'un exemple du système infini (linéaire) des particules isolées avec des intéractions et des liaisons intérieures. Pour cet exemple on a démontré quelques théorèmes sur l'existence et l'unicité de la solution du problème de Cauchy ainsi que sur l'approximation de cette solution dans un espace de dimension finie.

Dans ce travail nous proposons un dévéloppement ultérieur de conception [1] de la mécanique des milieux dénombrables. Comme l'espace de configuration nous posons un espace de Hilbert mais comme l'espace des fonctions du mouvement un espace des fonctions integrables au sens de Lebegue-Bochner sur l'intervalle de temps et dérivables au sens généralisé. Nous allons présenter cette propositon sur un exemple original du milieu matériel mais, à notre avis, des considérations contenues aux paragraphes suivants peuvent-être traitées comme réprésentatives pour certaine classe des systèmes matériels. Ce milieu n'est ni continu ni discret mais infini et borné. Il se compose des particules dont les coordonnées dans une configuration de référence forment un ensemble dénombrable, dense et borné sur l'axe réel.

Nous allons prouver l'existence et l'unicité de la solution du problème de Cauchy pour le milieu en question ainsi que nous allons montrer un théorème sur l'approximation de cette solution par la solution pour un système fini ce qui rend possible d'éffectuer une analyse quantitative du milieu. Pour cela nous allons appliquer les méthodes abstractives de l'analyse fonctionnelle ainsi que nous allons suivre respecivement les méthodes des espaces de Sobolev car analyse qualitative du milieu en question est presque analogiques comme pour des milieux continus.

En vue de la densité de coordonnées des particules du milieu dénombrable dans l'intérvalle numérique nous allons le comparer en cas particulier avec un milieu continu à une dimension respectivement choisi. Cette comparison conduit aux conclusions intéréssantes. Malgré que le milieu dénombrable a été inventé à la façon rationnelle (speculative) il a des bonnes propriétés à modeler des milieux matériels solides (physiques). Pour les "longues ondes" de déformation il se comporte similairement comme des milieux continus et pour les "courtes ondes" de déformation son comportement paraît-être plus proche de matériaux réels.

Le but de ce travail est la présentation et l'étude fondamental du milieu dénombrable en question. Cet étude n'épuise pas de sujet et doit-être continué et approfondi. Nous croyons quand-même que des résulats déja obtenus et exposés dans les paragraphes suivants sont originaux et intéréssants.

2. Équations et rélations fondamentales

Considérons un système matériel, schematisé, sur la fig.1. Il se compose des particules $p(\alpha^*)$ avec

$$\begin{gathered}\alpha^* = (j, i + \frac{\mu_j}{2^j}), \qquad i = 0,1,2,...,I, \quad j = 0,1,..., \\ \mu_j = 0,1,2,...,2^j - 1 \text{ si } i < I, \quad \mu_j = 0 \text{ si } i = I.\end{gathered} \tag{2.1}$$

La particule $p(\alpha^*)$ possède la masse $m(\alpha^*)$ et elle est liée avec la suivante par un ressort à caracteristique $k(\alpha^*)$. En outre, les particules aux niveaux $j, j+1, j+2, ...$ et de mêmes coordonnées $i+\mu_j/2^j$ sont jointes par des tiges rigides de coordonnées

$$\alpha = i + \frac{\nu_j}{2^j}, \qquad i = 0,1,...,I, \quad j = 0,1,...,$$

$$\nu_j = 0 \text{ si } j = 0 \text{ ou } i = I, \quad \nu_j = 1, 3, 5, ..., 2^j - 1 \text{ si } j > 0. \tag{2.2}$$

Tout système se compose des travées "$i - i + 1$" avec $i = 0, 1, ..., I - 1$ (sur la fig.1: $I = 2$).

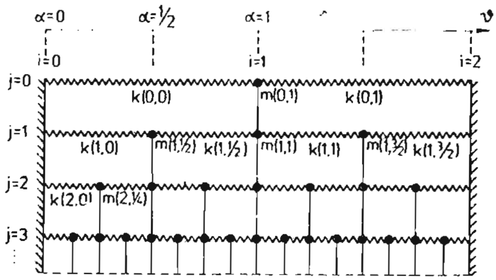

Fig. 1.

Par le milieu dénombrable ($\mathcal{D}$) nous comprenons l'ensemble des particules $p(\alpha^*)$. Notons que les ressorts peuvent-être interpretés comme des interactions entre les particules et les tiges comme des liaisons intérieures réalisantes la compatibilité de déplacements des particules situées sur la même tige.

Admettons que sous l'absence des forces extérieures le milieu est en état d'équilibre naturel et que le mouvement possible des particules $p(\alpha^*)$ s'accomplit le long des directions "j".

Désignos par $x(t, \alpha^*)$ le déplacement de $p(\alpha^*)$ en instant t et par $Q(t, \alpha^*)$ la force de direction "j" agissante sur $p(\alpha^*)$ en instant t avec

$$t \in \mathcal{T} = [0, T]. \tag{2.3}$$

Soit $x(t, \alpha)$ le déplacement de la tige de coordonnée α. Alors pour toutes les particules liées à lui on a (v.(2.1),(2.2) et fig.1)

$$x(t, (s, \alpha)) = x(t, \alpha), \qquad s = j, j+1, j+2, ..., \quad (t \in \mathcal{T}). \tag{2.4}$$

Admettons encore que les tiges de coordonnées $\alpha = 0$ et $\alpha = I$ sont fixées, i.e.

$$x(t, 0) = x(t, I), \qquad t \in \mathcal{T}. \tag{2.5}$$

Notons que les considérations ultérieures restent valables (aprés des petites modifications au plus) aussi en cas de l'une des tiges fixée et l'autre libre.

Soit $\mathcal{D} = \{\alpha\}$ (v.(2.2)). Nous pouvons traiter $\mathcal{D}$ comme une configuration de référence du milieu ($\mathcal{D}$). Remarquons que $\mathcal{D}$ est dense dans l'intervalle $[0, I]$.

En écrivant les équations du mouvement (de Newton) pour toute particule du milieu ($\mathcal{D}$) et ensuite en tenant compte de (2.4),(2.5) et eliminant les reactions causées par les tiges nous arrivons aux équations suivantes du mouvement de $(\mathcal{D})$ (i.e. équations du mouvement des tiges avec des particules de coordonnées α)

$$\sum_{s=j}^{\infty} m(s,\alpha)\ddot{x}(t,\alpha) - \sum_{s=j}^{\infty}\Big\{k(s,\alpha)[x(t,\alpha+\frac{1}{2^s}) - x(t,\alpha)]+$$

$$- k(s,\alpha-\frac{1}{2^s})[x(t,\alpha) - x(t,\alpha-\frac{1}{2^s})]\Big\} = P(t,\alpha), \tag{2.6}$$

$$x(t,0) = x(t,I) = 0, \qquad \alpha \in \mathcal{D}, \quad t \in \mathcal{T}$$

où

$$P(t,\alpha) = \sum_{s=j}^{\infty} Q(t,(s,\alpha)). \tag{2.7}$$

Adjoignons aux équations (2.6) les conditions initiales

$$x(0,\alpha) = \overset{\circ}{x}(\alpha), \qquad \dot{x}(0,\alpha) = \overset{\circ}{v}(\alpha), \tag{2.8}$$

où $\overset{\circ}{x}(\alpha)$, $\overset{\circ}{v}(\alpha)$ sont donnés pour $\alpha \in \mathcal{D}$ (par $\dot{x}(t,\alpha)$ et $\ddot{x}(t,\alpha)$ nous avons noté la première et la deuxième dérivée de $x(t,\alpha)$ par rapport à t).

Multiplitinos formèllement les équations (2.6) par $y(\alpha)$ et additionnons les pour tout $\alpha \in \mathcal{D}$. En vue de (2.1) – (2.5) nous obtenons

$$\sum_{i=0}^{I-1}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{\mu_j} m(j,i+\frac{\mu_j}{2^j})\ddot{x}(t,i+\frac{\mu_j}{2^j})y(i+\frac{\mu_j}{2^j})+$$

$$+\sum_{i=0}^{I-1}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{\mu_j}\Big\{k(j,i+\frac{\mu_j}{2^j})\Big[x(t,i+\frac{\mu_j}{2^j}+\frac{1}{2^j}) - x(t,i+\frac{\mu_j}{2^j})\Big]\cdot \tag{2.9}$$

$$\cdot\Big[y(i+\frac{\mu_j}{2^j}+\frac{1}{2^j}) - y(i+\frac{\mu_j}{2^j})\Big]\Big\} = \sum_{i=0}^{I-1}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{\nu_j} P(t,i+\frac{\nu_j}{2^j})y(i+\frac{\nu_j}{2^j}), \quad t \in \mathcal{T}.$$

L'équation (2.9) est dite l'équation du mouvement (du milieu $(\mathcal{D})$) en forme variationnelle. En cas statique il suffit poser dans (2.6),(2.7) et (2.9)

$$x(t,\alpha) = x(\alpha), \qquad P(t,\alpha) = P(\alpha), \qquad Q(t,\alpha^*) = Q(\alpha^*) \tag{2.10}$$

et omettre les conditions initiales (2.8).

Dans la suite nous nous occupons du cas dynamique. Le cas statique sera etudié séparément.

3. Problème de Cauchy

3.1. Notions et propositions auxiliaires

Soit l'ensemble des suites infinies (généralisées)

$$X = \left\{ x = (x(\alpha)) = \{x(\alpha) \in \mathcal{R}; \alpha \in \mathcal{D}\};\ x(0) = x(I) = 0 \right\} \tag{3.1}$$

étant espace vectoriel sur le corps $\mathcal{R}$ avec les lois de compositon suivantes

$$x + y = (x(\alpha) + y(\alpha)), \qquad ax = (ax(\alpha)) \tag{3.2}$$

pour tout $x = (x(\alpha))$, $y = (y(\alpha))$ de X et $a \in \mathcal{R}$. Les éléments x de X nous allons appeler les configurations du milieu $(\mathcal{D})$.
Proposition 1. Le sous-espace linéaire de X

$$H = \left\{ x \in X : \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{\nu_j} \frac{1}{4^j} |x(i + \frac{\nu_j}{2^j})|^2 < \infty \right\} \tag{3.3}$$

est un espace de Hilbert par rapport au produit scalaire

$$< x, y >_H = \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{\nu_j} \frac{1}{4^j} x(i + \frac{\nu_j}{2^j}) y(i + \frac{\nu_j}{2^j}) \tag{3.4}$$

et par rapport à la norme

$$\|x\|_H = < x, x >_H^{\frac{1}{2}} = \Big(\sum_{\alpha \in \mathcal{D}} \frac{1}{4^j} |x(\alpha)|^2 \Big)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.5}$$

De plus H est séparable•
Preuve. Les conditions de définition du produit scalaire sont évidentes. Montrons brèvement que H est complet.

Soit $\{x_{(n)}\}$ une suite de Cauchy des éléments de H. Alors $\forall \varepsilon > 0\ \exists N$ tel que $\|x_{(n)} - x_{(m)}\|_H < \varepsilon$ pour tout $n, m > N$. En vue de (3.5) on a

$$\sum_{i=0}^{I-1} \sum_{j=0}^{J} \sum_{\nu_j} \frac{1}{4^j} |x_{(n)}(i + \frac{\nu_j}{2^j}) - x_{(m)}(i + \frac{\nu_j}{2^j})|^2 < \varepsilon^2, \quad n, m > N,\ J \in \mathcal{N} \tag{3.6}$$

($\mathcal{N}$ – l'ensemble des entiers positifs) et

$$\frac{1}{4^j} |x_{(n)}(\alpha) - x_{(m)}(\alpha)|^2 < \varepsilon^2, \qquad n, m > N, \quad \alpha \in \mathcal{D}. \tag{3.7}$$

De (3.5) il découle qu'il existe

$$x(\alpha) = \lim_{n\to\infty} x_{(n)}(\alpha), \qquad \alpha \in \mathcal{D}.$$

En passant avec m et puis avec J vers l'infini dans (3.6) nous déduisons que

$$\|x - x_{(n)}\| \leq \varepsilon, \qquad n > N$$

d'où $x = (x(\alpha)) \in H$ et $\lim_{n\to\infty} x_{(n)} = x$.

L'espace H est séparable car les suites à composantes

$$u(\alpha) = \begin{cases} 0, & j > J, \\ & \qquad \alpha \in \mathcal{D}, \\ \in \mathcal{Q}, & j \leq J, \end{cases} \tag{3.8}$$

($J \in \mathcal{N}$, $\mathcal{Q}$ - l'ensemble des rationnels) forment l'ensmble dénombrable et dense dans H•

Remarque 1. L'espace

$$l^{\infty}(X) = \left\{x \in X; \sup_{\alpha\in\mathcal{D}} |x(\alpha)| < \infty\right\} \tag{3.9}$$

est un sous-espace linéaire de H•

Proposition 2. Soit

$$V = \left\{x \in H;\ \sum_{i=0}^{I-1}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{\mu_j} |x(i + \frac{\mu_j}{2^j} + \frac{1}{2^j}) - x(i + \frac{\mu_j}{2^j})| < \infty\right\}. \tag{3.10}$$

Alors V est un sous-espace dense dans H•

Remarque 2. Soit $\xi = \xi(\vartheta)$ une fonction de classe C^1 sur $[0, I] \subset \mathcal{R}$ et telle que $\xi(0) = \xi(I) = 0$. Si $x = (\xi(\alpha))$, alors $x \in V$•

En effet, comme $\sup_{[0,I]} |\xi(\vartheta)| < \infty$, donc en vertu de la remarque 1 $x \in H$. Puis, $\lambda = \sup_{[0,I]} |\xi'(\vartheta)| < \infty$ entraîne

$$\sum_{i=0}^{I-1}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{\mu_j} |x(i + \frac{\mu_j}{2^j} + \frac{1}{2^j}) - x(i + \frac{\mu_j}{2^j})|^2 \leq 2I\lambda^2.$$

Preuve de la proposition 2. Posons

$$\tilde{x}(\alpha) = \begin{cases} x(\alpha), & j \leq J \\ & \qquad \alpha \in \mathcal{D},\ J \in \mathcal{N}. \\ 0, & j > J \end{cases} \tag{3.11}$$

Alors en vue de (3.5)

$$\|x - \tilde{x}\|_H^2 = \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{j=J+1}^{\infty} \sum_{\nu_j} \frac{1}{4^j} |x(i + \frac{\nu_j}{2^j})|^2 \tag{3.12}$$

on peut faire arbitrairement petit pour J suffisamment grand.

Soit ensuite $\{x_{\tilde{\alpha}}\} \subset V$ l'ensemble fini (pour J fixé) des suites

$$x_{\tilde{\alpha}}(\alpha) = x(\tilde{\alpha})\xi_{\tilde{\alpha}}(\alpha), \qquad \tilde{\alpha} \in \tilde{\mathcal{D}} = \{\alpha = \frac{\nu_j}{2^j} \in \mathcal{D};\ j \leq J\} \tag{3.13}$$

où $\xi_{\tilde{\alpha}} = \xi_{\tilde{\alpha}}(\vartheta)$ est de classe C^1 sur $[0, I]$ à support $S_n = [\tilde{\alpha} - \frac{1}{2^n}, \tilde{\alpha} + \frac{1}{2^n}]$ et à valeurs dans l'intervalle $[0,1]$ avec $\xi_{\tilde{\alpha}}(\tilde{\alpha}) = 1$. Pour J fixé on peut trouver n_0 tel que si $n > n_0$ on a $S_n \subset]0, I[$ et

$$\|\tilde{x} - \sum_{\tilde{\alpha}\in\mathcal{D}} x_{\tilde{\alpha}}\|_H^2 \leq \sum_{\tilde{\alpha}\in\mathcal{D}} |x(\tilde{\alpha})|^2 \sum_{\tilde{\alpha}\neq\alpha\in\mathcal{D}} \frac{1}{4^j} |\xi_{\tilde{\alpha}}(\alpha)|^2 \leq$$

$$\leq \sum_{\tilde{\alpha}\in\mathcal{D}} |x(\tilde{\alpha})| \sum_{\tilde{\alpha}\neq\alpha\in S_n} \frac{1}{4^j} = 2\Big(\sum_{\tilde{\alpha}\in\mathcal{D}} |x(\tilde{\alpha})|^2\Big)\frac{1}{2^n}. \tag{3.14}$$

De (3.12)–(3.14) il découle que pour tout $x \in H$ on peut choisir $\sum_{\tilde{\alpha}\in\tilde{\mathcal{D}}} x_{\tilde{\alpha}} \in V$ (v. rem. 2) arbitrairement prés au sens de norme $\|\cdot\|_H$•

Propposition 3. Soit

$$< x, y >_V = \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{\mu_j} [x(i + \frac{\mu_j}{2^j} + \frac{1}{2^j}) - x(i + \frac{\mu_j}{2^j})][y(i + \frac{\mu_j}{2^j} + \frac{1}{2^j}) - y(i + \frac{\mu_j}{2^j})],$$

$$|x|_V = < x, x >_V^{\frac{1}{2}}, \qquad x, y \in V. \tag{3.15}$$

Alors:
(i) $< \cdot, \cdot >$ est un produit scalaire et $|\cdot|$ est une norme sur V,
(ii) $\|x\|_H \leq c|x|_V$ pour tout $x \in V$ ($c =$const> 0)•

Preuve. (i) Le produit (3.15) est évidement bien défini, bilinéaire et symetrique (en vertue de sa définition et de (3.10)). Puis, $< x, x >_V \geq 0$ pour tout $x \in V$. Supposons que $< x, x >_V = 0$. Alors quelque soit $\alpha \in \mathcal{D}$ on à $x(\alpha + \frac{1}{2^j}) = x(\alpha)$. Comme $x(0) = 0$ on peut successivement montrer que $x(\alpha) = 0$ pour tout $\alpha \in \mathcal{D}$.
(ii) Montrons cette inégalité importante pour $I = 1$. Mais on peut facilement généraliser la démonstration pour I arbitraire.

Nous avons
– pour $j = 0$:

$$0 = x(1) = x(1) - x(0), \qquad 0 = |x(1) - x(0)|^2,$$

– pour $j = 1$:

$$0 = x(1) = [x(1) - x(\frac{1}{2})] + [x(\frac{1}{2}) - x(0)], \qquad x(\frac{1}{2}) = x(\frac{1}{2}) - x(0),$$

$$0 \leq \frac{2}{4^1}[|x(1) - x(\frac{1}{2})|^2 + |x(\frac{1}{2}) - x(0)|^2],$$

$$\frac{1}{4^1}|x(\frac{1}{2})|^2 \leq \frac{1}{4^1}|x(\frac{1}{2}) - x(0)|^2,$$

$$\frac{1}{4^1}|x(\frac{1}{2})|^2 \leq |x(\frac{1}{2}) - x(0)|^2 + |x(1) - x(\frac{1}{2})|^2,$$

– pour $j = J$:

$$0 = x(1) = [x(1) - x(\frac{2^J - 1}{2^J})] + \ldots + [x(\frac{1}{2^J}) - x(0)],$$

$$x(\frac{\lambda_J}{2^J} + \frac{1}{2^J}) = [x(\frac{\lambda_J}{2^J} + \frac{1}{2^J}) - x(\frac{\lambda_J}{2^J})] + \ldots + [x(\frac{1}{2^j}) - x(0)],$$

$$(\lambda_J = 0, 1, 2, \ldots, 2^J - 1),$$

$$0 \leq \frac{2^J}{4^J}[|x(1) - x(\frac{2^J - 1}{2^J})|^2 + \ldots + |x(\frac{1}{2^J}) - x(0)|^2],$$

$$\frac{1}{4^J}|x(\frac{\lambda_J}{2^J} + \frac{1}{2^J})|^2 \leq \frac{\lambda_J + 1}{4^J}[|x(\frac{\lambda_J}{2^J} + \frac{1}{2^J}) - x(\frac{\lambda_J}{2^J})|^2 + \ldots + |x(\frac{1}{2^J}) - x(0)|^2],$$

$$\frac{1}{4^J}|x(\frac{1}{2^J})|^2 \leq \frac{1}{4^J}|x(\frac{1}{2^J}) - x(0)|^2,$$

$$\frac{1}{4^J}\sum_{\mu_J}|x(\frac{\mu_J}{2^J})|^2 \leq \frac{1 + 2 + \ldots + 2^J}{4_J}\sum_{\mu_J}|x(\frac{\mu_J}{2^J} + \frac{1}{2^J}) - x(\frac{\mu_J}{2^J})|^2 \leq$$

$$\leq \sum_{\mu_J}|x(\frac{\mu_J}{2^J} + \frac{1}{2^J}) - x(\frac{\mu_J}{2^J})|^2, \qquad (\mu_J = 0, 1, \ldots, 2^J - 1),$$

d'où

$$\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{\mu_j}\frac{1}{4^j}|x(\frac{\mu_j}{2^j})|^2 \leq \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{\mu_j}|x(\frac{\mu_j}{2^j} + \frac{1}{2^j}) - x(\frac{\mu_j}{2^j})|^2.$$

En apercevant que la somme à gauche est égale à $\frac{4}{3}\|x\|_H^2$ (v.(2.1), (2.2), (3.4), (3.5) et la somme à droite est égale $|x|_V^2$ (v.(3.15)) nous arrivons à l'inégalité énoncée avec $c = \sqrt{3}/2$.

Il est à noter que pour I arbitraire on obtient $c = c'I$ $(c' > 0)$ •

Remarque 3. La norme $|\cdot|_V$ n'est pas équivalente à $\|\cdot\|_H$ car pour la suite $\{x_{(n)}\}$ telle que

$$x_{(n)}(\alpha) = \begin{cases} 2^n\alpha, & \alpha \in [0, \frac{1}{2^n}] \\ 2^n(\frac{2}{2^n} - \alpha), & \alpha \in [\frac{1}{2^n}, \frac{2}{2^n}], \quad (\alpha \in \mathcal{D}) \\ 0, & \alpha > \frac{2}{2^n} \end{cases} \tag{3.16}$$

on a (v.(3.5) et rem. 1)

$$\|x_{(n)}\|_H^2 = \sum_{\alpha \in \mathcal{D} \cap [0, \frac{2}{2^n}]} \frac{1}{4^j} |x_{(n)}(\alpha)|^2 \leq \sum_{j=n-1}^{\infty} \frac{2^j}{4^j} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

et (v.(3.15) et rem.2)

$$|x_{(n)}|_V^2 = \sum_{j=n}^{\infty} \sum_{\mu_j} |x(\frac{\mu_j}{2^j} + \frac{1}{2^j}) - x(\frac{\mu_j}{2^j}) = 2\sum_{j=n}^{\infty} 2^{j-n} |2^{n-j}|^2 = 4 \bullet$$

Proposition 4. Soit

$$\ll x, y \gg_V = < x, y >_V + < x, y >_H, \qquad x, y \in V, \tag{3.17}$$

et

$$\|x\|_V = \ll x, x \gg_V^{\frac{1}{2}} = (|x|_V^2 + \|x\|_H^2)^{\frac{1}{2}}, \qquad x \in V. \tag{3.18}$$

Alors:
(i) les normés $\|\cdot\|_V$ et $|\cdot|_V$ sont équivalentes,
(ii) l'espace V est de Hilbert par rapport au produit scalaire $\ll \cdot, \cdot \gg_V$,
(iii) l'espace V est séparable•

Preuve. (i) En vertu de (3.18) et de thèse (ii) de la proposition 3 nous déduisons

$$c_V \|x\|_V \leq |x|_V \leq \|x\|_V \tag{3.19}$$

avec $c_V = 1/(1 + c^2)^{1/2}$.
(ii) Comme $< \cdot, \cdot >_H$ et $< \cdot, \cdot >_V$ sont des produits scalairs sur V (v. propositions 1 et 3, $V \subset H$) alors $\ll \cdot, \cdot \gg_V$ est un produit scalaire également. La démonstration du complet de V est analogique a celle de la proposition 1.
(iii) Montrons d'abord que l'ensemble des éléments $\tilde{x} = (\tilde{x}(\alpha))$ tels que

$$\tilde{x}(i + \frac{\nu_j}{2^j}) = x(i + \frac{\mu_J}{2^J}) + 2^J[x(i + \frac{\mu_J}{2^J} + \frac{1}{2^J}) - x(i + \frac{\mu_J}{2^J})](\frac{\nu_j}{2^j} - \frac{\mu_J}{2^J}), \tag{3.20}$$

$$\frac{\nu_j}{2^j} \in [\frac{\mu_J}{2^J}, \frac{\mu_J}{2^J} + \frac{1}{2^J}], \qquad \mu_J = 0, 1, ..., 2^J - 1, \quad J \in \mathcal{N}$$

avec $x = (x(i + \frac{\nu_j}{2^j})) \in V$ est dense dans V ($\tilde{x} = \tilde{x}(\alpha)$ est linéaire par morceaux). En effet, comme $\tilde{x}(i + \frac{\nu_j}{2^j}) = x(i + \frac{\nu_j}{2^j})$ si $j \leq J$ on a (v.(3.15))

$$|x - \tilde{x}|_V^2 = \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{j=J+1}^{\infty} \sum_{\mu_j} |[x(i + \frac{\mu_j}{2^j} + \frac{1}{2^j}) - x(i + \frac{\mu_j}{2^j})]+$$

$$-[\tilde{x}(i + \frac{\mu_j}{2^j} + \frac{1}{2^j}) - \tilde{x}(i + \frac{\mu_j}{2_j})]|^2 \leq 2\sum_{i=0}^{I-1} \sum_{j=J+1}^{\infty} \sum_{\mu_j} |x(i + \frac{\mu_j}{2^j} + \frac{1}{2^j}) - x(i + \frac{\mu_j}{2^j})|^2+$$

$$+2\sum_{i=0}^{I-1} \sum_{j=J+1}^{\infty} \sum_{\mu_j} 2^{j-J} |\frac{2^J}{2^j}[x(i + \frac{\mu_J}{2^J} + \frac{1}{2^J}) - (i + \frac{\mu_J}{2^J})]|^2 =$$

$$= 2\sum_{i=0}^{I-1} \sum_{j=J}^{\infty} \sum_{\mu_j} |[x(i + \frac{\mu_J}{2^J} + \frac{1}{2^j}) - x(i + \frac{\mu_J}{2^J})|^2$$

d'où $|x - \tilde{x}|_V \to 0$ si $J \to \infty$. Puisque $\tilde{x}$ est déterminé par le nombre fini des coefficients $x(i + \frac{\nu_j}{2^j})$ $(j = 0, 1, ..., J)$ alors approchant les respectivement par des nombres rationnels nous pouvons construire un ensemble dénombrable dense dans V•

Corollaire 1. La conclusion immédiate des propositions 2–4 est

$$V \subset H \subset V' \tag{3.21}$$

où V' est l'espace adjoint à V. Si nous notons par $< \cdot, \cdot >$ le produit dual

$$< x', x >= x'(x), \qquad x' \in V', \quad x \in V, \tag{3.22}$$

correspondant au produit scalaire $< \cdot, \cdot >$, i.e.

$$< x', x >=< x', x >_H, \qquad x' \in H, \quad x \in V \tag{3.23}$$

alors

$$\|x'\|_{V'} = \sup_{\|x\|_V \leq 1} | < x', x > |, \qquad x \in V \tag{3.24}$$

est une norme sur V'•

Proposition 5. Soit

$$\mathcal{M}(x, y) = \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{\mu_j} m(j, i + \frac{\mu_j}{2^j}) x(i + \frac{\mu_j}{2^j}) y(i + \frac{\mu_j}{2^j}). \tag{3.25}$$

Si

$$m(j, i + \frac{\mu_j}{2^j}) = \frac{1}{4^j} m'(j, i + \frac{\mu_j}{2^j}), \qquad 0 < m_* \leq m'(j, i + \frac{\mu_j}{2^j}) \leq m^* < \infty \tag{3.26}$$

(v.(2.1)) alors $\mathcal{M} : H \times H \to \mathcal{R}$ est une forme bilinéaire, symétrique, continue et strictement positive avec

$$c_* \|x\|_H^2 \le \mathcal{M}(x,x) < c^* \|x\|_H^2, \qquad (c_* = \frac{4}{3} m_*, \quad c^* = \frac{4}{3} m^*). \tag{3.27}$$

Nous allons l'appeler la forme d'inertie du milieu $(\mathcal{D})$•

Preuve. La thèse découle de la forme de $\mathcal{M}$ et du fait qu'en vertue de (2.1), (2.2) et de (3.4) on a

$$\sum_{i=0}^{I-1} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{\mu_j} \frac{1}{4^j} |x(i + \frac{\mu_j}{2^J})|^2 = \frac{4}{3} \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{\nu_j} \frac{1}{4^j} |x(i + \frac{\nu_j}{2^J})|^2 = \frac{4}{3} \|x\|_H^2 \bullet \tag{3.28}$$

Remarque 4. Si les conditions (3.26) sont remplies la masse totale d'une "travee" $[i, i+1[$ du milieu $(\mathcal{D})$ (v. fig. 2.1) est finie et égale à

$$m_i = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{\mu_j} m(j, i + \frac{\mu_j}{2^j}), \qquad (2m_* < m_i < 2m^*) \bullet \tag{3.29}$$

Corollaire 2. Comme $\mathcal{M}$ verifie les conditions de définition du produit scalaire, l'espace $\tilde{H} = H$ muni de produit $\mathcal{M}$ est un espace de Hilbert car la norme

$$\|x\|_{\tilde{H}} = (\mathcal{M}(x,x))^{\frac{1}{2}}, \qquad x \in H \tag{3.30}$$

est, en vue de (3.27), équivalente à la norme $\|\cdot\|_H$.

Notons par (x', x) $(x' \in V', \ x \in V)$ le produit dual correspondant au produit scalaire $\mathcal{M}$, i.e.

$$(x', x) = \mathcal{M}(x', x), \qquad x' \in H, \quad x \in V \bullet \tag{3.31}$$

Corollaire 3. La forme $\mathcal{M}$ définit uniquement l'opérateur $M : H \in H$ dit l'opérateur d'inertie de $(\mathcal{D})$ tel que

$$\mathcal{M}(x,y) = < Mx, y >_H, \qquad x, y \in H, \tag{3.32}$$

i.e. (v.(3.4) et (3.25))

$$(Mx)(\alpha) = \Big(\sum_{s=j}^{\infty} m(s, i + \frac{\nu_j}{2^j})\Big) 4^j x(\alpha), \qquad (\alpha = i + \frac{\nu_j}{2^j} \in \mathcal{D}). \tag{3.33}$$

Cet opérateur est continu, strictement positif et symétrique, i.e. (v.(3.27) et (3.32))

$$c_* \|x\|_H \le \|Mx\|_H \le c^* \|x\|_H, \qquad < Mx, y >_H = < x, My >_H \bullet \tag{3.34}$$

Proposition 6. Soit

$$\mathcal{K}(x,y) = \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{\mu_j} k(j, i + \frac{\mu_j}{2^j})[x(i + \frac{\mu_j}{2^j} + \frac{1}{2^j}) - x(i + \frac{\mu_j}{2^j})][y(i + \frac{\mu_j}{2^j} + \frac{1}{2^j}) - y(i + \frac{\mu_j}{2^j})]. \tag{3.35}$$

Si
$$0 < k_* \leq k(j, i + \frac{\mu_j}{2^j}) \leq k^* < \infty \tag{3.36}$$
(v.(2.1)) alors $\mathcal{K} : V \times V \to \mathcal{R}$ est une formé bilinéaire, symétrique, continue et strictement positive avec
$$k_* |x|_V \leq \mathcal{K}(x, x) \leq k^* |x|_V \qquad (x \in V)\bullet \tag{3.37}$$
Elle est dite la formé de rigidité (où d'élasticité).

La preuve découle immediatement de (3.15), (3.35) et de (3.36). Appercevons qu'en vue de (3.19) on peut remplacer la norme $|\cdot|_V$ dans les inégalités (3.37) par la norme $\|\cdot\|_V$.

Proposition 7. Soit $K : V_K \in H$ l'epérateur linéaire suivant
$$\begin{aligned}(Kx)(\alpha) &= 4^j \sum_{s=j}^{\infty} \{k(s, \alpha)[x(\alpha + \frac{1}{2^s}) - x(\alpha)] + \\ &- k(s, \alpha - \frac{1}{2^s})[x(\alpha) - x(\alpha - \frac{1}{2^s})]\}, \quad x \in V_K \subset H \quad (\alpha \in \mathcal{D}).\end{aligned} \tag{3.38}$$
Si $k(j, i + \frac{\mu_j}{2^j})$ vérifient la condition (3.36) et
$$|k(j, i + \frac{\mu_j}{2^j} + \frac{1}{2^j}) - k(j, i + \frac{\mu_j}{2^j})| \leq \tilde{k}\frac{1}{2^j} \qquad (\tilde{k} = \text{const} > 0), \tag{3.39}$$
alors V_K est un sous-espace linéaire dense dans H, $V_K \subset V$ et
$$< Kx, y >_H = -\mathcal{K}(x, y), \qquad x \in V_K, \quad y \in V\bullet \tag{3.40}$$
Preuve. En vertu de (2.1), (2.2), (3.4), (3.35) et de (3.39) nous avons
$$< Kx, y >_H = \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{\nu_j} \frac{1}{4^j}(Kx)(i + \frac{\nu_j}{2^j}) y(i + \frac{\nu_j}{2^j}) = -\mathcal{K}(x, y).$$
Soit $\xi = \xi(\vartheta)$ une fonction de classe C^2 sur $[0, I]$ telle que $\xi(0) = \xi(I) = 0$. Si $x = (\xi(\alpha))$, alors $x \in V_K$. En effet, comme $\xi = \xi(\vartheta)$ est bornée sur $[0, I]$ donc en vue de la remarque 1, $x \in H$. Puis, en vertu de la formule de Taylor, de (3.36) et de (3.39)
$$|k(s, \alpha)[x(\alpha + \frac{1}{2^s}) - x(\alpha)] - k(s, \alpha - \frac{1}{2^s})[x(\alpha) - x(\alpha - \frac{1}{2^s})]| \leq \lambda \frac{1}{4^s}$$
avec $\lambda = k^* \frac{1}{2} \sup\limits_{[0,I]} |\xi''(\vartheta)| + \tilde{k} \sup\limits_{[0,I]} |\xi'(\vartheta)|$. Alors (v.(3.40))
$$|(Kx)(\alpha)| \leq \sum_{s=j}^{\infty} 4^{j-s}\lambda = \frac{4}{3}\lambda$$

d'où $Kx \in H$ (v. rem.1)., i.e. $x \in V_K$.

L'ensemble des éléments x tels que $x(\alpha) = \xi(\alpha)$ avec $\xi = \xi(\vartheta)$ de classe C^2 et $\xi(0) = \xi(I) = 0$ est dense dans V et dans H (au sens de norme $\|\cdot\|_H$). La démonstration est analogique à celle de la preuve de la proposition 2•

Proposition 8. Soit

$$P(\alpha) = \frac{1}{4^j}P'(\alpha), \qquad \alpha = i + \frac{\nu_j}{2^j} \in \mathcal{D} \tag{3.41}$$

où $P' = (P'(\alpha)) \in H$. Alors

$$\mathcal{P}(x) = \sum_{\alpha\in\mathcal{D}} P(\alpha)x(\alpha) =< P', x >_H \tag{3.42}$$

définit une forme linéaire et continue sur H et sur V•

En effet, car en vertu de (3.44) et de la these (ii) de proposition 3 nous avons

$$|\mathcal{P}(x)| = |< P', x >_H| \le \|P'\|_H \|x\|_H \le c\|P'\|_H |x|_V.$$

Soit U un espace de Banach (où de Hilbert) avec une norme $\|\cdot\|_U$ (où avec un produit scalaire $< \cdot, \cdot >_U$) et soit U' l'espace adjoint à U. Les espaces suivants des fonctions $u : \mathcal{T} \to U$ intégrables au sens de Lebèsgue – Bochner sur $\mathcal{T} = [0, T]$

$$\begin{aligned} L^p(\mathcal{T}, U) &= \{u = u(t); |||u|||_p = (\int_0^T \|u(t)\|_U^p dt)^{\frac{1}{p}} < \infty\}, \qquad 1 \le p < \infty \\ L^\infty(\mathcal{T}, U) &= \{u = u(t); |||u|||_\infty = \sup_{t\in\mathcal{T}} \mathrm{ess}\|u(t)\|_U < \infty\}, \qquad p = \infty \end{aligned} \tag{3.43}$$

sont des espaces de Banach pour tout p $(1 \le p \le \infty)$ et de Hilbert pour $p = 2$ avec le produit scalaire

$$((u, v)) = \int_0^T < u(t), v(t) >_U dt \tag{3.44}$$

si U est de Hilbert (les fonctions égales presque partoût nous comptons comme des éléments égaux dans $L^P(\mathcal{T}, U)$.

3.2. Théorèmes sur l'existence et l'unicité

Formulons le problème de Cauchy pour le milieu dénombrable ($\mathcal{D}$). En tenant compte de (3.1), (3.25), (3.35), (3.42) nous pouvons formèllement écrire l'équation (2.9) sous la forme

$$\mathcal{M}(\ddot{x}(t), y) + \mathcal{K}(x(t), y) = \mathcal{P}(t)(y), \qquad t \in \mathcal{T} \tag{3.45}$$

où bien (en vue de (3.31), (3.32)) comme suit

$$(\ddot{x}(t), y) + \mathcal{K}(x(t), y) =< \mathcal{P}(t), y >, \quad t \in \mathcal{T}. \tag{3.46}$$

Les conditions initiales (2.8) s'écrivent dans la forme

$$x(0) = \overset{\circ}{x}, \quad \dot{x}(0) = \overset{\circ}{v}. \tag{3.47}$$

Par le problème de Cauchy nous allons comprendre le problème suivant: trouver une fonction du mouvement $x : \mathcal{T} \to V$ qui vérifie dans $\mathcal{T}$ l'équation (3.46) pour tout $y \in V$ et en $t = 0$ les conditions initiales (3.47). Le couple $(\overset{\circ}{x}, \overset{\circ}{v})$ ainsi que la fonction $\mathcal{P} = \mathcal{P}(t)$ $(t \in \mathcal{T})$ sont donnés. Les derivées $\dot{x}$ (d'ordre un) et $\ddot{x}$ d'ordre deux) de x par rapport à t nous allons comprendre au sens généralisé, i.e. comme des fonctions $\dot{x} : \mathcal{T} \to V'$, $\ddot{x} : \mathcal{T} \to V'$ telles que

$$\begin{gathered}\int_0^T (\dot{x}(t), \varphi(t))dt = -\int_0^T (x(t), \varphi(t))dt = -\int_0^T \mathcal{M}(x(t), \dot{\varphi}(t))dt, \\ \int_0^T (\ddot{x}(t), \psi(t))dt = -\int_0^T (\dot{x}(t), \dot{\psi}(t))dt,\end{gathered} \tag{3.48}$$

pour toutes $\varphi = \varphi(t)$ et $\psi = \psi(t)$ de classe $C'(\mathcal{T}, V)$ avec $\varphi(0) = \psi(0) = \varphi(T) = \psi(T) = 0$.

Theoreme 1. Si

(1) $0 < m_* \leq 4^j m(j, i + \frac{\mu_j}{2^j}) \leq m^* < \infty, 0 < k_* \leq k(j, i + \frac{\mu_j}{2^j}) \leq k^* < \infty$
pour tout $\alpha^* = (j, i + \frac{\mu_j}{2^j})$ (v.(2.1)),

(2) $\overset{\circ}{x} \in V$, $\overset{\circ}{v} \in H$, $\mathcal{P}, \dot{\mathcal{P}} \in L^2(\mathcal{T}, V')$,

alors il existe la solution unique du problème de Cauchy (3.46), (3.47) telle que

$$x \in L^\infty(\mathcal{T}, V), \quad \dot{x} \in L^\infty(\mathcal{T}, H), \quad \ddot{x} \in L^\infty(\mathcal{T}, V')\bullet \tag{3.49}$$

Preuve. Le théorème énoncé decoule immédiatement d'un théorème démontré dans l'ouvrage [4] (chap.II, par.4) car en vertu des propositions 1–6 ses assumptions sont remplies•

Remarque 5. La solution du problème de Cauchy (3.46), (3.47) dont l'existence découle du théorème 1 est une solution généralisée (contrairement à la solution classique de classe $C^2(\mathcal{T}, V)$). De plus elle est dite faible car elle est la limite faible d'une suite des éléments de l'espace $L^\infty(\mathcal{T}, V)$•

Dans le paragraph 3.3 nous allons utiliser la proposition suivante qui sous des hypothèses plus fortes qu'au théorème 1 assure une regularité amplifiée de la solution du problème de Cauchy (3.46), (3.47).

Theoreme 2. Si
(1) $0 < m_* \leq 4^j m(j, i + \frac{\mu_j}{2^j}) \leq m^* < \infty, \qquad 0 < k_* \leq k(j, i + \frac{\mu_j}{2^j}) \leq k^* < \infty,$

$$|k(j, i + \frac{\mu_j}{2^j} + \frac{1}{2^j}) - k(j, i + \frac{\mu_j}{2^j})| \leq \tilde{k}\frac{1}{2^j}$$

pour tout $\alpha^* = (j, i + \frac{\mu_j}{2^j})$ (v.(2.1); $m_*, m^*, k_*, k^*, \tilde{k}$ – constantes positives),
(2) $\overset{\circ}{x} \in V_K, \quad \overset{\circ}{v} \in V,$
(3) $P(t,\alpha) = \frac{1}{4^j}P'(t,\alpha)$ $(t \in \mathcal{T}, \alpha \in \mathcal{D})$ et $P' = P'(t) = (P'(t,\alpha))$ est de classe $C^1(\mathcal{T}, H)$,
alors le problème de Cauchy (3.45), (3.47) a la solution unique telle que

$$x \in C(\mathcal{T}, V), \qquad \dot{x} \in L^\infty(\mathcal{T}, V), \qquad \ddot{x} \in L^\infty(\mathcal{T}, H) \tag{3.50}$$

Preuve. Pour démontrer ce théorème il suffit modifier un peu la preuve du théorème de l'ouvrage [4] (chap. II, par.4) en utilisant les propriétés des espaces H et V ainisi que des formes $\mathcal{M}, \mathcal{K}$ et $\mathcal{P}$ nommées aux propositions 1–8.

3.3. Approximation à l'aide d'un système fini

Le but de ce paragraph est de montrer que la solution du problème de Cauchy pour le milieu dénombrable $(\mathcal{D})$ (v.fig.1) peut-être (sous certaines hypothèses) déterminée d'une manière approchée de la solution pour le système fini $(\mathcal{D}_J)$, composé des éléments de $(\mathcal{D})$ situés sur les niveaux (les "couches") $j = 0, 1, ..., J$. Autrement dit, nous allons prouver que les solutions obtenues pour $(\mathcal{D}_J)$ tendent vers la solution exacte pour $(\mathcal{D})$ si J tend vers l'infini. Ce fait est trés important car il rend possible d'obtenir effectivement des solutions des problèmes de Cauchy pour le milieu $(\mathcal{D})$ avec l'exactitude arbitraire (au sens précisé plus loin). De plus, pour trouver la solution du problème de Cauchy pour le système $(\mathcal{D}_J)$ nous utilisons l'une des méthodes d'analyse propes aux systèmes à nombre fini des dégrés de liberté. Mais nous ne sommes pas obligés construire l'appareil special d'approximationn comme pour des mileux continus. Il suffit profiter immédiatement des équations du mouvement de $(\mathcal{D})$ en "coupant" les respectivement au niveau $j = J$.

Soit (v.(2.2))

$$\mathcal{D}_J = \{\alpha_J = i + \frac{\nu_j}{2^j} \in \mathcal{D};\ j \leq J\} \tag{3.51}$$

et soit l'espace vectoriel (de dimension finie)

$$H_J = \{\xi = (\xi(\alpha_J)) = \{\xi(\alpha_J) \in R;\ \alpha_J \in \mathcal{D}_J\};\ \xi(0) = \xi(I) = 0\} \tag{3.52}$$

muni des normes

$$\begin{aligned} \|\xi\|_J &= \Big(\sum_{i=0}^{I-1}\sum_{j=0}^{J}\sum_{\nu_j}\frac{1}{4^j}|\xi(i+\frac{\nu_j}{2^j})|^2\Big)^{\frac{1}{2}}, \\ |\xi|_J &= \Big(\sum_{i=0}^{I-1}\sum_{j=0}^{J}\sum_{\mu_j}|\xi(i+\frac{\mu_j}{2^j}+\frac{1}{2^j})-\xi(i+\frac{\mu_j}{2^j})|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \tag{3.53}$$

et du produit scalaire

$$<\xi,\eta>_J=\sum_{i=0}^{I-1}\sum_{j=0}^{J}\sum_{\nu_j}\frac{1}{4^j}\xi(i+\frac{\nu_j}{2^j})\eta(i+\frac{\nu_j}{2^j}), \qquad (<\xi,\xi>_J=\|\xi\|_J^2). \tag{3.54}$$

Il existe une constante $c>0$ ne dépendant pas de J telle que (v.la preuve de la proposition 3)

$$\|\xi\|_J\le c|\xi|_J, \qquad \xi\in H_J. \tag{3.55}$$

Soit ensuite

$$\mathcal{M}_J: H_J\times H_J\to\mathcal{R}; \qquad \mathcal{M}_J(\xi,\eta)=\sum_{i=0}^{I-1}\sum_{j=0}^{J}\sum_{\mu_j}m(j,i+\frac{\mu_j}{2^j})\xi(i+\frac{\mu_j}{2^j})\eta(i+\frac{\mu_j}{2^j}),$$

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_J: H_J\times H_J\to\mathcal{R}; \qquad \mathcal{K}_J(\xi,\eta)&=\sum_{i=0}^{I-1}\sum_{j=0}^{J}\sum_{\mu_j}k(j,i+\frac{\mu_j}{2^j})[\xi(i+\frac{\mu_j}{2^j}+\frac{1}{2^j})+ \\ &-\xi(i+\frac{\mu_j}{2^j})][\eta(i+\frac{\mu_j}{2^j}+\frac{1}{2^j})-\eta(i+\frac{\mu_j}{2^j})], \end{aligned} \tag{3.56}$$

$$\mathcal{P}_J: H_J\to\mathcal{R}; \qquad \mathcal{P}_J(\xi)=\sum_{i=0}^{I-1}\sum_{j=0}^{J}\sum_{\nu_j}P(i+\frac{\nu_j}{2^j})\xi(i+\frac{\nu_j}{2^j})$$

(la signification de $m(j,i+\frac{\mu_j}{2^j})$, $k(j,i+\frac{\mu_j}{2^j})$ et de $P(i+\frac{\nu_j}{2^j})$ a été expliquée au par.2).

Les formes $\mathcal{M}_J$, $\mathcal{K}_J$ sont bilinéaires, symétriques et positives la forme $\mathcal{P}_J$ est linéaire. En outre, sous les hypothèses (3.26), (3.36) elles ont les propriétés suivantes (v.(3.27), (3.37))

$$\begin{aligned} c_*\|\xi\|_J &\le \mathcal{M}_J(\xi,\xi)\le c^*\|\xi\|_J^2, \\ k_*|\xi|_J &\le \mathcal{K}_J(\xi,\xi)\le k^*|\xi|_J^2 \end{aligned} \tag{3.57}$$

ainsi que (v. le corollaire 3 et les propositions 7 et 8)

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_J(\xi,\eta) &= <M_J\xi,\eta>_J, \\ \mathcal{K}_J(\xi,\eta) &= -<K_J\xi,\eta>_J, \\ \mathcal{P}_J(\xi) &= (\mathcal{P}_J,\xi)=<P_J',\xi>_J, \end{aligned} \tag{3.58}$$

où

$$M_J : H_J \to H_J; \qquad (M_J\xi)(\alpha_J) = \Big(\sum_{s=j}^{J} m(s,\alpha_J)\Big)4^j\xi(\alpha_J),$$

$$K_J : H_J \to H_J; \qquad (K_J\xi)(\alpha_J) = \sum_{s=j}^{J} 4^j\{k(s,\alpha_J)[\xi(\alpha_J + \frac{1}{2^s}) - \xi(\alpha_J)] +$$
$$-k(s,\alpha_J - \frac{1}{2^s})[\xi(\alpha_J) - \xi(\alpha_J - \frac{1}{2^s})]\}, \tag{3.59}$$

$$P'_J(\alpha_J) = 4^j P_J(\alpha_J) \qquad (\alpha_J = (i + \frac{\nu_j}{2^j}) \in \mathcal{D}_J).$$

Remarque 6. Si $J \to \infty$ l'espace H_J, les normes $\|\cdot\|_J$, $|\cdot|_J$ et les formes $\mathcal{M}_J$, $\mathcal{K}_J$, $\mathcal{P}_J$ deviennent H, $\|\cdot\|_H$, $|\cdot|_V$, $\mathcal{M}$, $\mathcal{K}$, $\mathcal{P}$ respectivement (v. par.3.1)•

Les équations du mouvement pour le système $(\mathcal{D}_J)$ peuvent-être écrites sous la forme (v.(2.6) et (3.59))

$$M_J\ddot{\xi}(t) - K_J\xi(t) = P'_J(t), \qquad t \in \mathcal{T}, \tag{3.60}$$

où $\xi = \xi(t)$ est la fonction du mouvement, $P' = P'(t)$ – la fonction (donnée) des forces extérieures agissantes sur $(\mathcal{D}_J)$.

La forme variationnelle de (3.60) est

$$\mathcal{M}_J(\ddot{\xi}(t),\eta) + \mathcal{K}_J(\xi(t),\eta) = (\mathcal{P}_J(t),\eta), \qquad \eta \in H_J, \quad t \in \mathcal{T}. \tag{3.61}$$

Aux équations du mouvement nous adjoignons des conditions initiales

$$\xi(0) = \overset{\circ}{\xi}, \qquad \dot{\xi}(0) = \overset{\circ}{\eta}. \tag{3.62}$$

Remarque 7. Le problème de Cauchy (3.61), (3.62) a la solution unique car le système des équations différentialles ordinaires de deuxiéme ordre (3.60) est fini, linéaire, à coefficients constants et M_J est nonsingulier•

Soit l'application linéaire définie comme suit:

$$H \ni x \to x^* \in H_J; \qquad x^*(\alpha_J) = x(\alpha_J). \tag{3.63}$$

Théorème 3. Si

(1) $\quad 0 < m_* \le 4^j m(j, i + \frac{\mu_j}{2^j}) \le m^* < \infty, \qquad 0 < k_* \le k(j, i + \frac{\mu_j}{2^j}) \le k^* < \infty,$

$$|k(j, i + \frac{\mu_j}{2^j} + \frac{1}{2^j}) - k(j, i + \frac{\mu_j}{2^j})| \le \tilde{k}\frac{1}{2^j},$$

pour tout $\alpha^* = (j, i + \frac{\mu_j}{2^j})$ (v.(2.1); $m_*, m^*, k_*, k^*, \tilde{k}$ – constantes positives),

(2) $\quad \overset{\circ}{x} \in V_K, \quad \overset{\circ}{v} \in V, \quad \overset{\circ}{\xi} = \overset{\circ}{x}^*, \quad \overset{\circ}{\eta} = \overset{\circ}{v}^*, \quad \|K_J \overset{\circ}{\xi}\|_J \le \kappa \|K \overset{\circ}{x}\|_H \quad (\kappa > 0),$

(3) $P' \in C^1(\mathcal{T}, H)$, $P'_J(t) = P'^*(t) \quad (t \in \mathcal{T})$
alors

$$\lim_{J\to\infty} [\sup_{t\in\mathcal{T}}(\|\dot{\xi}(t) - \dot{x}^*(t)\|_J^2 + |\xi(t) - x^*(t)|_J^2)] = 0, \tag{3.64}$$

où $\xi = \xi(t)$ est la solution du problème de Cauchy (3.61), (3.62) et $x = x(t)$ - la solution du problème de Cauchy (3.45), (3.47)•
Preuve. Pour démontrer ce théorème nous utilisons les propriétés des espaces H, V et H_J, des formes $\mathcal{M}, \mathcal{K}$ et $\mathcal{P}$ ainsi que des formes $\mathcal{M}_J, \mathcal{K}_J$ et $\mathcal{P}_J$ prouvées dans le par.3.1 et au dessus. En soustrayant les équations (3.41) et (3.61) nous dérivons une estimation énergétique qui après avoir appliqué l'inégalité de Gronwall conduit à la these (3.64). Le raisonnement est semblable à ceux des preuves de convergence pour la méthode de Galerkin (v. e.g.[5])•
Remarque 8. Il vaut mentionner que les méthodes de démonstration des théorèmes 1-3 sont assez typiques et connues dans la littérature consacrée aux équations différentialles dans les espaces vectoriels abstraits. Il suffisait les suivre et adopter au cas considéré dans ce travail en prouvant d'abord les propositions 1-8 du par. 3.1.

4. Exemple des vibrations

En général, la détermination exacte de la solution du problème de Cauchy (où d'autres problèmes) pour le milieu $(\mathcal{D})$ est impossible. C'est pourquoi nous allons chercher une solution approchée en utilisant le théorème 3 du paragraph 3.3. Pour la trouver nous allons appliquer l'une des méthodes numériques, par exemple le schema de Crank-Nicolson (v. e.g. [6]) qui se présente comme suit:

$$\xi^0 = \overset{\circ}{\xi}, \qquad \xi^1 = \overset{\circ}{\xi} + \Delta t \, \overset{\circ}{\eta} + \frac{1}{2}(\Delta t)^2 M_J^{-1}(K_J \, \overset{\circ}{\xi} + P_J^0),$$

$$\frac{1}{(\Delta t)^2} M_J(\xi^{l-1} - 2\xi^l + \xi^{l+1}) - \frac{1}{2} K_J(\xi^{l-1} + \xi^{l+1}) = P_J^l, \tag{4.1}$$

$$(l = 1, 2, ..., \bar{l}; \quad \bar{l} \cdot \Delta t = T),$$

où

$$\xi^l = \xi(l \cdot \Delta t), \qquad P_J^l = P'_J(l \cdot \Delta t), \qquad l = 1, ..., \bar{l}. \tag{4.2}$$

Il est de deuxiéme ordre d'approximation (par rapport à Δt), implicite mais absolument stable.

À titre d'exemple nous considérons le cas:

$$\overset{\circ}{x}(\alpha) = 0, \qquad \overset{\circ}{v}(\alpha) = v_0 \sin \frac{\pi\alpha}{I}, \qquad P(t, \alpha) = 0 \quad (\alpha \in \mathcal{D}, t \in \mathcal{T}) \tag{4.3}$$

et (v.(2.1), (2.2))

$$m(j, i + \frac{\mu_j}{2^j}) = \frac{1}{4^j} m_0, \qquad k(j, i + \frac{\mu_j}{2^j}) = k_0, \tag{4.4}$$

vérifiant les hypothèses des théorèmes 2 et 3 du par.3.

Comme solution de référence $x_R = x_R(t)$ nous prenons la solution de l'équation

$$m\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - k\frac{\partial^2 x}{\partial \vartheta^2} = 0, \qquad \vartheta \in [0, I], \quad t \in \mathcal{T} \tag{4.5}$$

avec les conditions

$$x(t, 0) = x(t, I) = 0, \qquad x(0, \vartheta) = 0, \qquad \dot{x}(0, \vartheta) = v_0 \sin\frac{\pi\vartheta}{I}, \tag{4.6}$$

i.e.

$$x(t, \vartheta) = v_0 \frac{I}{\pi}\sqrt{\frac{m}{k}} \sin\sqrt{\frac{m}{k}}\frac{\pi t}{I} \sin\frac{\pi\vartheta}{I}. \tag{4.7}$$

Notons que c'est la solution de l'équation variationnelle (v.(3.45))

$$\mathcal{M}(\ddot{x}(t), y) + \mathcal{K}(x(t), y) = 0, \qquad y \in V, \quad t \in \mathcal{T} \tag{4.8}$$

avec les conditions (4.6) où maintenant (v. e.g.[4],[5])

$$V = H_0^1([0, I]), \qquad H = L^2([0, I]), \tag{4.9}$$

$$\mathcal{M}(x, y) = \int_0^I m x(\vartheta) y(\vartheta) d\vartheta, \qquad \mathcal{K}(x, y) = \int_0^I k \frac{\partial x}{\partial \vartheta}(\vartheta)\frac{\partial y}{\partial \vartheta}(\vartheta) d\vartheta.$$

Nous avons choisi cette solution car elle décrit les vibrations d'un élément élastique (par exemple d'une barre) dont le modéle mathématique, dit continu, est répésenté par l'équation (4.5). Remarquons que les équations (2.6) peuvent-être traitées aussi comme les équations d'un modéle mathématique (appelé dénombrable) des vibrations longitudinales d'un élément matériel. Notamment, en projetant les particules du milieu $(\mathcal{D})$ sur le segment de niveau $j = 0$ ou bien passant vers zero avec les longueurs des tiges joignant les masses de $(\mathcal{D})$ nous obtenons une structure à une dimension dont la configuration de référence est l'ensemble $\mathcal{D}$ dense dans l'inervalle $[0, I]$.

Prenons m_0 et k_0 dans (4.4) de telle façon pour que la masse totale d'une "travée" soit m et sa rigidité effective (globale) $\sum_{j=0}^{\infty} k_0/2^j$ soit k. Alors

$$m_0 = \frac{m}{2}, \qquad k_0 = \frac{k}{2}. \tag{4.10}$$

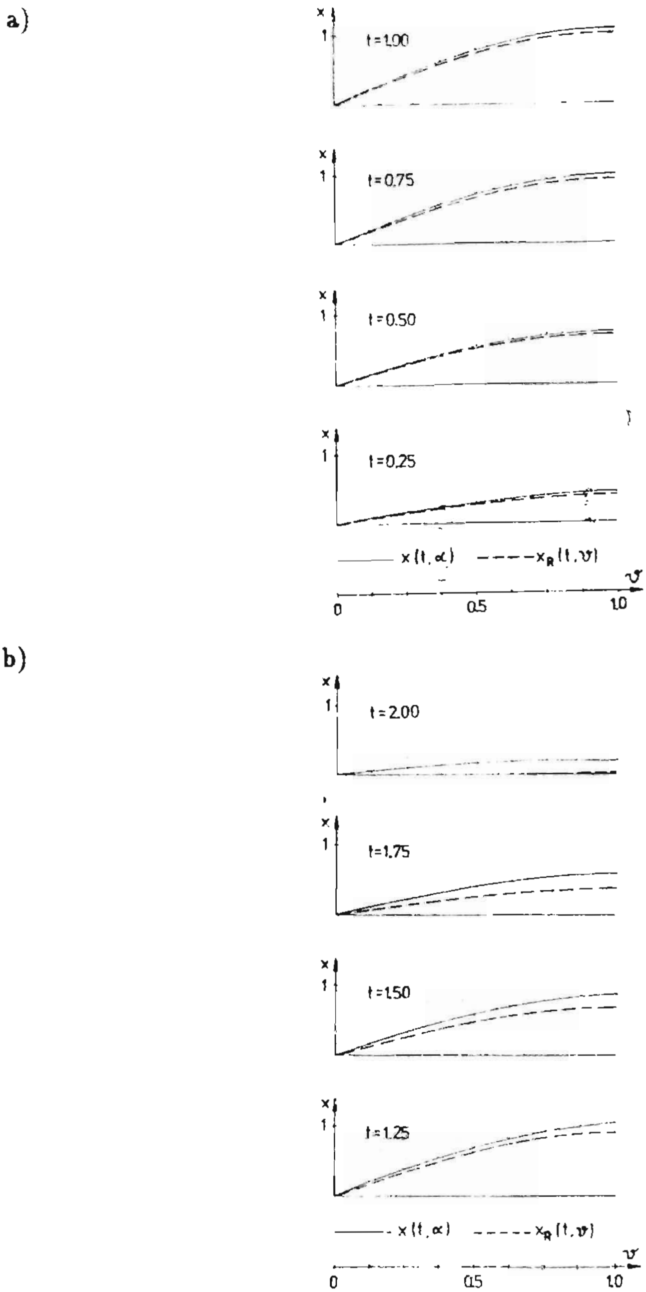
a)
x
1
t=1.00
t=0.75
t=0.50
t=0.25
x(t,α)
$x_R(t,\vartheta)$
ϑ
0
0.5
1.0
b)
t=2.00
t=1.75
t=1.50
t=1.25

Fig. 2.

Pour des calculs posons

$$m = 1, \qquad k = 1, \qquad I = 2, \qquad v_0 = \frac{\pi}{2}, \qquad T = 2. \tag{4.11}$$

Des épreuves ont montré que l'exactitude des calculs est suffisante pour $\Delta t = 0.125$ ($\tilde{l} = 16$) ainsi que des résultats numériques se stabilisent à partir de $J = 4$.

Sur la figure 2 on à présenté les configurations du milieu $(\mathcal{D})$ et du milieu continu en quelques instants successifs (en vue de symétrie on n'a envisagé que la travée [0,1]).

On voit que la fonction $x = x(t,\alpha)$ est "presque sinusoidale" par rapport à α, les déplacements $x(t,\alpha)$ et $x_R(t,\alpha)$ se diffèrent pas trop et on observe un certain retard des vibrations de $(\mathcal{D})$ par rapport au milieu continu. Les résultats semblables on obtient aussi en cas des conditions initiales

$$x(0,\alpha) = \sin\frac{\pi\alpha}{2}, \qquad \dot{x}(0,\alpha) = 0 \qquad (\alpha \in \mathcal{D}). \tag{4.12}$$

Il est à noter que si nous augmentons I de telle façon pour que $mI = 2$ et $k/I = 1/2$, i.e. pour que la masse totale et la rigidite globale ne changent pas les déplacements $x(t,\alpha)$ et $x_R(t,\alpha)$ deviennent pratiquement (physiquement) indistincts.

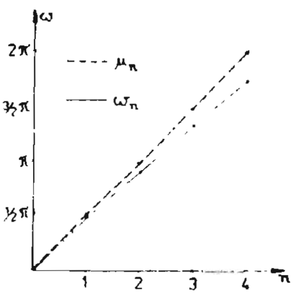

Fig. 3.

Alors il paraît qu'on peut formuler le corollaire que le milieu denombrable $(\mathcal{D})$ est un bon modéle mathématique des vibrations de certains milieux matériels.

Il faut mentionner encore qu'il a le spectre dénombrable, comme le milieu continu. Mais ce que $(\mathcal{D})$ est importnant, le spectre de $(\mathcal{D})$ s'accorde pratiquement avec celui du milieu continu de référence pour des premiéres fréquences et ensuite les fréquences de $(\mathcal{D})$ tendent vers l'infini plus lentement que du milieu continu.

Sur la figure 3 on à présenté quelques premières fréquences des vibrations propres de tous les deux milieux en question, calculées pour les valeurs (4.11) des paramètres du problème. Les fréquences de $(\mathcal{D})$ nous avons trouvé approchément en calculant les pour le système $(\mathcal{D}_J)$ fini avec $J = 4$. Les valeurs numériques de

$i = 1, 2, 3$) commencent à se stabiliser à partir de $J = 3$. Pour le milieu continu on a (v. (4.5))

$$\mu_n = \frac{\pi n}{2} \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{4.13}$$

Si nous augmentons I de telle façon pour que $mI = 2$ et $k/2 = 1/2$ les différences entre des premières valeurs de ω_n et μ_n diminueront.

Bien sûr les propriétés mécaniques et le comportement du milieu $(\mathcal{D})$ demandent encore d'un étude approfondi, mais il nous paraît que les résultats déja obtenus et présentés dans ce travail sont intéréssants.

Références

1. NAGÓRSKI R., *Sur une conception de la mécanique des milieux dénombrables,* Mech. Teor. i Stos. (Mec.Theor. et Appl.), 1, 27, 1989
2. NAGÓRSKI R., *Mécanique des milieux dénombrables. Problèmes généraux,* Mech. Teor. i Stos., 1, 29, 1991
3. NAGÓRSKI R., WIŚNIAKOWSKI P., *Mécanique des milieux dénombrables. Milieux infinis discrets,* Mech.Teor. i Stos., 1, 29, 1991
4. DUVAUT G., LIONS J.-L., *Les inéquations en mécanique et en physique,* Dunod, Paris 1972
5. GAJEWSKI H., GRÖGER K., ZACHARIAS K., *Nichtlineare Operatorgleichungen,* Mathematische Lehrbücher und Monographien, II Abteilung. Mathematische Monographien, Band 38, Academic-Verlag, Berlin 1974
6. MARTCHOUK G., *Méthodes numériques d'analyse des équations de la physique mathématique* (en russe), Science, Moscou 1981

Ce travail a été éffectué dans le cadre du Problème Central des Recherches Fondamentales 02.05

Streszczenie

Praca dotyczy układu materialnego złożonego z "przeliczalnej liczby" cząstek, zwanego ośrodkiem przeliczalnym. Cząstki są zawarte w ograniczonym odcinku, ale na nieskończenie wielu "wewnętrznych poziomach" w ten sposób, że ich współrzędne w pewnej konfiguracji odniesienia tworzą zbiór przeliczalny i gęsty w ograniczonym przedziale liczbowym. Cząstki te są połączone w pewien określony sposób elementami liniowo–sprężystymi i sztywnymi łącznikami symbolizującymi odpowiednio wewnętrzne oddziaływania i sztywne więzy. Przedstawione rozważania zawierają rozwinięcie koncepcji [1] modelowania ośrodków materialnych (w ramach założeń mechaniki klasycznej) za pomocą układów o przeliczalnej "liczbie" stopni swobody. Podstawowym celem pracy jest zaprezentowanie oryginalnego ośrodka przeliczalnego, który nie jest ani ciągły ani dyskretny, ale nieskończony i ograniczony, a następnie wykazanie, że jest on matematycznie poprawny; m.in. istnieje jednoznaczne rozwiązanie zagadnienia początkowego. Wykazano także istnienie metody przybliżonej analizy ilościowej powyższego ośrodka, tj. metody aproksymacji skończenie wymiarowej rozwiązania zagadnienia początkowego. Warto przy tym nadmienić, że analizę jakościową (w aspekcie matematycznym) przeprowadzono za pomocą metod analizy funkcjonalnej podobnych do metod przestrzeni Sobolewa w mechanice ośrodków ciągłych.

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 15 czerwca 1988 roku