

## STOCHASTYCZNA LINEARYZACJA ZŁOŻONYCH UKŁADÓW DYNAMICZNYCH

MARIAN PAWLETA

*Politechnika Śląska, Katowice*

W pracy rozważono zastosowanie metody stochastycznej linearyzacji do analizy stochastycznych układów o wielu stopniach swobody, w których można wyróżnić powiązane ze sobą podukłady. Proponowana jest linearyzacja dwuetapowa – w pierwszym kroku linearyzacja podukładów, w drugim ich powiązań. Ocena dokładności i czasu obliczeń proponowanej metody, w odniesieniu do globalnej linearyzacji stochastycznej, zilustrowana została dla przykładu mechanicznego o dwóch stopniach swobody.

### 1. Wstęp

Jednym z ważnych problemów mechaniki jest analiza drgań stochastycznych układów dynamicznych. Związane jest to z charakterem części wymuszeń występujących w przyrodzie, takich jak działanie wiatru, fal morskich czy sił pochodzących od nierówności podłoża w przypadku analizy drgań pojazdów. Siły te muszą być brane pod uwagę np. przy projektowaniu budynków, platform wiertniczych, samolotów oraz zawieszonych pojazdów. Jednak większość układów pojawiających się w praktyce inżynierskiej jest nieliniowa.

W literaturze systemy takie analizowane były m.in. za pomocą metod równania Fokkera-Plancka przez Caughey'a (1971), perturbacji przez Crandall'a (1963), Tung'a (1967) oraz stochastycznej linearyzacji przez Atalik'a i Utku (1976) i Iwan'a i Yang'a (1972). W pracach Atalik'a i Utku (1976) i Iwan'a i Yang'a (1972) porównano wymienione metody, oraz podano ich błędy i obszary zastosowań. Wynika z nich, że metoda linearyzacji jest możliwa do zastosowania dla szerokiej klasy zagadnień, choć nie zawsze otrzymane wyniki są dobrą aproksymacją rozwiązania dokładnego. Wymaga ona rozwiązywania układu nieliniowych równań algebraicznych. Ilość równań rośnie gwałtownie wraz ze wzrostem liczby stopni swobody układu i wynosi  $N \cdot (2N + 2)$ , gdzie  $N$  jest liczbą stopni swobody układu. Mimo rozwiniętych już stosunkowo dobrze technik komputerowych zarówno dokładność otrzymanych wyników jak i czas obliczeń są w dalszym ciągu nie zadowalające.

Dlatego w niniejszej pracy zajmiemy się problemem stochastycznej linearyzacji złożonych systemów. Przez złożony system rozumiemy układ mający zdecentralizowaną strukturę. Oznacza to, że system składa się z dużej liczby wzajemnie powiązanych podukładów. Są dwie możliwości linearyzacji takich układów. Pierwsza polega na tym, że traktujemy system jako jeden układ, który linearyzujemy korzystając z całej wiedzy o systemie, druga polega na tym, że linearyzujemy każdy podukład niezależnie, a następnie łączymy podukłady zlinearyzowanymi powiązaniem. Linearyzując podukład korzystamy tylko ze zmiennych lokalnych. Celem niniejszej pracy jest porównanie obu metod tzn. porównanie rozbieżności wyników oraz czasów obliczeń numerycznych dla otrzymanych momentów rozwiązań stacjonarnych.

## 2. Opis układów i metody linearyzacji stochastycznej

### 2.1. Opis układów

Będziemy rozważać duży nieliniowy system opisany następującym stochastycznym równaniem różniczkowym:

$$\left(\sum_i\right) : dx_i = \varphi_i(x, t)dt + G_i dw_i, \quad i = 1, \dots, N, \quad (2.1)$$

gdzie:

$x = [x_1, x_2, \dots, x_N]^T$  jest wektorem stanu,

$x_i \in \mathcal{R}^{n_i}$  są wektorami stanu dla każdego podukładu,

$\varphi_i : \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}^{n_i}$  są nieliniowymi funkcjami,  $n = \sum_{i=1}^N n_i$ ,

$G_i$  są  $n_i$ -wymiarowymi wektorami intensywności szumu,

$w_i$  są standardowymi procesami Wienera,  $w_i$  i  $w_j$  są niezależnymi procesami dla  $i \neq j$ .

Zakładamy, że układ (2.1) można przedstawić jako  $N$  powiązanych ze sobą podukładów:

$$\left(\sum_i\right) : dx_i = \left(F_i(x_i) + D_i(x_1, \dots, x_N)\right)dt + G_i dw_i, \quad i = 1, \dots, N, \quad (2.1_i)$$

gdzie  $F_i : \mathcal{R}^{n_i} \rightarrow \mathcal{R}^{n_i}$ ,  $D_i : \mathcal{R}^{n_1} \times \mathcal{R}^{n_2} \times \dots \times \mathcal{R}^{n_N} \rightarrow \mathcal{R}^{n_i}$  są nieliniowymi funkcjami deterministycznymi. Funkcje  $D_i$  są funkcjami powiązań podukładów.

W przypadku liniowych powiązań funkcje  $\varphi_i$  są opisane następującym równaniem:

$$\varphi_i = F_i(x_i) + \sum_{j=1}^N C_{ij} x_j, \quad i = 1, \dots, N, \quad (2.2)$$

gdzie  $C_{ij}$  są deterministycznymi  $n_i \times n_j$ -wymiarowymi macierzami.

Wprowadzimy następujące oznaczenia:

$M$  oznacza  $n$ -wymiarowy wektor  $E[x]$ ,

$M_i$  oznacza  $n_i$ -wymiarowy wektor  $E[x_i]$ ,

$\Theta$  oznacza  $n \times n$ -wymiarową macierz  $E[(x - M)(x - M)^T]$ ,

$\Theta_{ij}$  oznacza  $n_i \times n_j$ -wymiarową macierz  $E[(x_i - M_i)(x_j - M_j)^T]$ .

## 2.2. Metoda stochastycznej linearyzacji

Celem stochastycznej linearyzacji jest zastąpienie nieliniowych funkcji  $\varphi_i$  linio-  
wymi, które przybliżają funkcje  $\varphi_i$ . Zmienne stanu oznaczmy w następujący  
sposób:

$$x_{i,r} = m_{i,r} + x_{i,r}^0, \quad i = 1, \dots, N, \quad r = 1, \dots, n_i, \quad (2.3)$$

gdzie  $m_{i,r}$  jest wartością oczekiwaną a  $x_{i,r}^0$  jest centrowanym procesem stochastycz-  
nym. Zlinearyzowaną funkcję  $\varphi_{i_s}$  można napisać następująco:

$$\varphi_{i_s}(x, t) = \varphi_{i_s}^0 + \sum_{j=1}^N \sum_{r=1}^{n_j} k_{i_s, jr} x_{j,r}^0, \quad (2.4)$$

gdzie:

$\varphi_{i_s}^0$  jest nieliniową funkcją momentów  $x_i$ ,

$k_{i_s, jr}$  są statystycznymi współczynnikami wzmocnienia.

Metoda stochastycznej linearyzacji była rozważana przez wielu autorów, np. Frie-  
drich'a (1974), Kazakow'a (1967), (1969), Zajdenberg'a (1964). Proponują oni  
różne metody obliczania statystycznych współczynników wzmocnienia. My wyli-  
czamy współczynniki tak, aby zminimalizować średnio-kwadratowy błąd aproksy-  
macji:

$$\delta = E \left[ \sum_{i=1}^N \sum_{s=1}^{n_i} \left( \varphi_{i_s} - \varphi_{i_s}^0 - \sum_{j=1}^N \sum_{r=1}^{n_j} k_{i_s, jr} x_{j,r}^0 \right)^2 \right]. \quad (2.5)$$

Korzystając z warunku koniecznego dla minimum funkcjonału  $\delta$  można napisać  
równania dla wielkości  $\varphi^0$  i  $k$ :

$$\varphi_{i_s}^0 = E[\varphi_{i_s}], \quad (2.6)$$

$$E[\varphi_{i_s} x_{j,r}^0] = \sum_{l=1}^N \sum_{t=1}^{n_l} k_{i_s, lt} E[x_{j,r}^0 x_{l,t}^0]. \quad (2.7)$$

Przy założeniu, że łączna gęstość rozwiązań jest Gaussowska, można współczynniki  
 $k_{i_s, lt}$  wyrazić w następujący sposób:

$$k_{i_s, lt} = \frac{\partial \varphi_{i_s}^0}{\partial m_{l,t}}. \quad (2.8)$$

### 3. Stochastyczna linearyzacja układów o wielu stopniach swobody

Teraz przedstawimy metody linearyzacji zdecentralizowanej oraz linearyzacji globalnej dla złożonych stochastycznych układów dynamicznych. Celem uproszczenia zapisu opuszczamy argumenty funkcji  $F_i$ ,  $D_i$ .

#### 3.1. Zdecentralizowana linearyzacja

W tym punkcie będziemy rozważać układ (2.1):

$$\left(\sum_i\right) : dx_i = \left(F_i(x_i) + D_i(x_1, \dots, x_N)\right)dt + G_i dw_i, \quad i = 1, \dots, N.$$

Izolowane podukłady (bez powiązań) opisane są następującymi stochastycznymi równaniami różniczkowymi:

$$dx_i = F_i(x_i)dt + G_i dw_i, \quad i = 1, \dots, N. \quad (3.1)$$

Współczynniki linearyzacji podukładów wyliczone na podstawie wzorów (2.6), (2.8) opisane są następującymi zależnościami od momentów rozwiązań:

$$\psi_{i_s}^0 = E[F_{i_s}], \quad i = 1, \dots, N, \quad s = 1, \dots, n_i, \quad (3.2)$$

$$\underline{k}_{i_s, i_r} = \frac{\partial \psi_{i_s}^0}{\partial m_{i_r}}, \quad i = 1, \dots, N, \quad s, r = 1, \dots, n_i. \quad (3.3)$$

W celu wyznaczenia wartości liczbowych współczynników linearyzacji podukładów należy z układu nieliniowych równań algebraicznych:

$$\psi_{i_s}^0(M_i, \Theta_{ii}) = 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad s = 1, \dots, n_i, \quad (3.4)$$

$$\sum_{l=1}^{n_i} \underline{k}_{i_s, i_l}(M_i, \Theta_{ii})\theta_{i_l, i_s} + \sum_{l=1}^{n_i} \underline{k}_{i_r, i_l}(M_i, \Theta_{ii})\theta_{i_l, i_r} + G_{i_s} G_{i_r} = 0, \\ i = 1, \dots, N, \quad s = 1, \dots, n_i, \quad r = s, \dots, n_i, \quad (3.5)$$

gdzie  $\theta_{k_i, i_s}$  jest kowariancją  $x_{i_s}$  i  $x_{k_i}$ , wyznaczyć momenty rozwiązania stacjonarnego (zlinearyzowanego podukładu) a następnie z zależności (3.2), (3.3) wyliczyć konkretne wartości współczynników linearyzacji podukładów.

Równania zlinearyzowanych podukładów są następujące:

$$dx_{i_s} = \left[\psi_{i_s} + \sum_{r=1}^{n_i} \underline{k}_{i_s, i_r} \cdot x_{i_r}^0\right]dt + G_{i_s} dw. \quad (3.6)$$

Natomiast współczynniki linearyzacji dla powiązań są następującej postaci (2.6), (2.8):

$$\rho_{i_s} = E[D_{i_s}], \quad i = 1, \dots, N, \quad s = 1, \dots, n_i, \quad (3.7)$$

$$\bar{k}_{i_s j_r} = \frac{\partial \rho_{i_s}}{\partial m_{j_r}}, \quad i = 1, \dots, N, \quad s, r = 1, \dots, n_i. \quad (3.8)$$

Ich wartości wyliczymy z równań:

$$\rho_{i_s}(\mathbf{M}, \Theta) = 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad s = 1, \dots, n_i, \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{l=1}^{n_i} (\underline{k}_{i_s i_l} + \bar{k}_{i_s i_l}(\mathbf{M}, \Theta)) \theta_{i_l j_r} + \sum_{l=1}^{n_j} (\underline{k}_{j_r j_l} + \bar{k}_{j_r j_l}(\mathbf{M}, \Theta)) \theta_{j_l i_s} + \\ & + \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^{n_k} \bar{k}_{i_s k_l}(\mathbf{M}, \Theta) \theta_{k_l j_r} + \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^{n_k} \bar{k}_{j_r k_l}(\mathbf{M}, \Theta) \theta_{k_l i_s} + G_{i_s} G_{j_r} \delta_{ij} = 0, \end{aligned}$$

$$i = 1, \dots, N, \quad j = i, \dots, N, \quad s = 1, \dots, n_i, \quad r = \begin{cases} 1, \dots, n_j & \text{dla } j \neq i, \\ s, \dots, n_i & \text{dla } j = i, \end{cases} \quad (3.10)$$

gdzie  $\underline{k}_{i_s i_l}$  wyliczone zostały na podstawie równań (3.2)–(3.5),  $\delta_{ij}$  oznacza symbol Kroeneckera a  $\theta_{k_l i_s}$  jest kowariancją  $x_{i_s}$  i  $x_{k_l}$ . Układ po zdecentralizowanej linearyzacji przyjmuje postać:

$$dx_{i_s} = \sum_{j=1}^N \sum_{r=1}^{n_j} (\underline{k}_{i_s j_r} + \bar{k}_{i_s j_r}) x_{j_r}^0 dt + G_{i_s} dw. \quad (3.11)$$

### 3.2. Globalna linearyzacja złożonych układów dynamicznych

Współczynniki linearyzacji dla całego układu wyrażają się następującymi zależnościami od momentów rozwiązań stacjonarnych:

$$\varphi_{i_s}^0 = E[F_{i_s}] + E[D_{i_s}], \quad i = 1, \dots, N, \quad s = 1, \dots, n_i, \quad (3.12)$$

$$k_{i_s j_r} = \frac{\partial \varphi_{i_s}^0}{\partial m_{j_r}}, \quad i, j = 1, \dots, N, \quad s = 1, \dots, n_i, \quad r = 1, \dots, n_j. \quad (3.13)$$

Aby wyznaczyć wartości liczbowe współczynników linearyzacji trzeba rozwiązać układ nieliniowych równań algebraicznych:

$$\varphi_{i_s}^0(\mathbf{M}, \Theta) = 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad s = 1, \dots, n_i, \quad (3.14)$$

$$\sum_{l=1}^{n_i} k_{i_s i_l}(\mathbf{M}, \Theta) \theta_{i_l j_r} + \sum_{l=1}^{n_j} k_{j_r j_l}(\mathbf{M}, \Theta) \theta_{j_l i_s} + \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^{n_k} k_{i_s k_l}(\mathbf{M}, \Theta) \theta_{k_l j_r} +$$

$$+ \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^{n_k} k_{j_r, k_l}(M, \Theta) \theta_{k_l i_s} + G_{i_s} G_{i_r} \delta_{ij} = 0, \quad (3.15)$$

$$i = 1, \dots, N, \quad j = i, \dots, N, \quad s = 1, \dots, n_i, \quad r = \begin{cases} 1, \dots, n_j & \text{dla } j \neq i, \\ s, \dots, n_i & \text{dla } j = i, \end{cases}$$

gdzie  $\delta_{ij}$  oznacza symbol Kroeneckera a  $\theta_{k_l i_s}$  jest kowariancją  $x_{i_s}$  i  $x_{k_l}$ .

Układ po linearyzacji przyjmuje postać:

$$dx_{i_s} = \sum_{j=1}^N \sum_{r=1}^{n_j} k_{i_s j_r} x_{j_r}^0 dt + G_{i_s} dw. \quad (3.16)$$

#### 4. Systemy z liniowymi powiązaniem

Teraz będziemy rozważać układ (2.1) z liniowymi powiązaniem tzn. funkcja  $\varphi_i$  wyraża się zależnością (2.2):

$$\varphi_i(x_1, \dots, x_N) = F_i(x_i) + \sum_{j=1}^N C_{ij} x_j, \quad i = 1, \dots, N.$$

Układ możemy przedstawić zatem w następujący sposób:

$$dx_{i_s} = \left[ F_{i_s}(x_{i_1}, \dots, x_{i_{n_i}}) + \sum_{j=1}^N \sum_{r=1}^{n_j} C_{i_s j_r} x_{j_r} \right] dt + G_{i_s} dw_i, \quad (4.1)$$

$$i = 1, \dots, N, \quad s = 1, \dots, n_i.$$

##### 4.1. Zdecentralizowana linearyzacja

W tym wypadku linearyzujemy podsystemy identycznie jak w poprzednim ogólnym przypadku (3.1) - (3.6). Natomiast linearyzując powiązania otrzymujemy:

$$\rho_{i_s} = \sum_{j=1}^N \sum_{r=1}^{n_j} C_{i_s j_r} m_{j_r}, \quad i = 1, \dots, N, \quad s = 1, \dots, n_i, \quad (4.2)$$

$$\bar{k}_{i_s j_r} = C_{i_s j_r}, \quad i, j = 1, \dots, N, \quad s = 1, \dots, n_i, \quad r = 1, \dots, n_j, \quad (4.3)$$

co kończy zdecentralizowaną linearyzację złożonych układów dynamicznych z liniowymi powiązaniem.

#### 4.2. Linearyzacja globalna układów z liniowymi powiązaniem

Teraz będziemy linearyzować cały układ (4.1). Współczynniki linearyzacji są następujące:

$$\varphi_{i_s}^0 = E[F_{i_s}] + \sum_{j=1}^N \sum_{r=1}^{n_j} C_{i_s j_r} m_{j_r}, \quad i = 1, \dots, N, \quad s = 1, \dots, n_i, \quad (4.4)$$

$$k_{i_s j_r} \equiv \begin{cases} k_{i_s j_r} + C_{i_s j_r} & \text{dla } j = i \\ C_{i_s j_r} & \text{dla } j \neq i \end{cases} \quad i, j = 1, \dots, N, \quad s = 1, \dots, n_i, \quad r = 1, \dots, n_j. \quad (4.5)$$

Należy podkreślić, że tożsamość (4.5) ma charakter tożsamości funkcji, nie równości wartości. Wartości współczynników linearyzacji wyznaczmy rozwiązując układ nieliniowych równań algebraicznych:

$$\varphi_{i_s}^0(M, \Theta) = 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad s = 1, \dots, n_i, \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^{n_i} k_{i_s i_l}(M, \Theta) \theta_{i_l j_r} + \sum_{l=1}^{n_j} k_{j_r j_l}(M, \Theta) \theta_{j_l i_s} + \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^{n_k} C_{i_s k_l} \theta_{k_l j_r} + \\ + \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^{n_k} C_{j_r k_l} \theta_{k_l i_s} + G_{i_s} G_{i_r} \delta_{ij} = 0, \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$i = 1, \dots, N, \quad j = i, \dots, N, \quad s = 1, \dots, n_i, \quad r = \begin{cases} 1, \dots, n_j & \text{dla } j \neq i, \\ s, \dots, n_i & \text{dla } j = i, \end{cases}$$

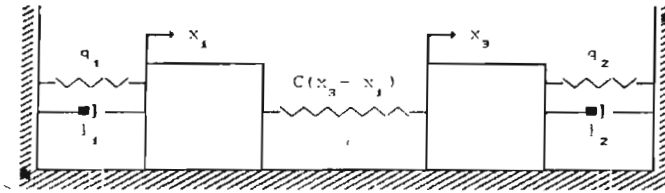
gdzie  $\delta_{ij}$  oznacza symbol Kroeneckera, a  $\theta_{k_l i_s}$  jest kowariancją  $x_{i_s}$  i  $x_{k_l}$ , natomiast zależności jakimi wyrażają się współczynniki  $k$  przedstawione zostały we wzorze (3.3).

Porównując  $n(n+3)/2$  - wymiarowy układ (4.6), (4.7) nieliniowych równań algebraicznych, które należy rozwiązać podczas linearyzacji globalnej i

$\left(\sum_{i=1}^N n_i(n_i+3)/2\right)$  - wymiarowy układ (3.4), (3.5), który należy rozwiązać podczas zdecentralizowanej linearyzacji dla złożonych układów z liniowymi powiązaniem, widać korzyści wynikające ze znacznego zmniejszenia ilości równań dla metody zdecentralizowanej linearyzacji.

#### 5. Analiza układu mechanicznego o dwóch stopniach swobody

Powyższe rozważania zilustrujemy następującym przykładem dynamicznym o dwóch stopniach swobody (rys.1):



Rys. 1.

Układ ten jest opisany następującymi stochastycznymi równaniami różniczkowymi:

$$d \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -q_1(x_1) & -l_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -q_2(x_3) & -l_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} dt +$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 \\ C(x_3 - x_1) - S_1(x_2) \\ 0 \\ C(x_1 - x_3) - S_2(x_4) \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} dw_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} dw_2, \quad (5.1)$$

gdzie sprężystości  $q_i$ ,  $C$ ,  $i = 1, 2$  mogą być liniowymi lub nieliniowymi oraz może występować suche tarcie  $S_i$ ,  $i = 1, 2$ .

Będziemy rozpatrywać cztery przypadki:

1) elementy sprężyste występujące w podukładach są nieliniowe, element sprężysty łączący podukłady jest liniowy, pomija się tarcie suche:

$$q_i(x_{2i-1}) = q_i + \varepsilon_i x_{2i-1}^2,$$

$$C(x_i - x_j) = C \cdot (x_i - x_j), \quad S_i(\cdot) = 0,$$

2) elementy sprężyste występujące w podukładach są nieliniowe, element sprężysty łączący podukłady jest nieliniowy, pomija się tarcie suche:

$$q_i(x_{2i-1}) = q_i + \varepsilon_i x_{2i-1}^2,$$

$$C(x_i - x_j) = \begin{cases} C_1 \cdot (x_i - x_j) & \text{dla } |x_i - x_j| \leq a \\ (C_1 + C_2) \cdot (x_i - x_j) - b & \text{dla } x_i - x_j > a \\ (C_1 + C_2) \cdot (x_i - x_j) + b & \text{dla } x_i - x_j < -a \end{cases},$$

$$S_i(\cdot) = 0, \quad b = C_2 a,$$



3) elementy sprężyste występujące w podukładach są liniowe, element sprężysty łączący podukłady jest liniowy, występuje suche tarcie:

$$q_i(x_{2i-1}) = q_i, \quad C(x_i - x_j) = C \cdot (x_i - x_j),$$

$$S_i(x_{2i}) = S_i \cdot \operatorname{sgn}(x_{2i}), \quad l_i = 0,$$

4) elementy sprężyste występujące w podukładach są liniowe, element sprężysty łączący podukłady jest nieliniowy, występuje suche tarcie:

$$q_i(x_{2i-1}) = q_i, \quad C(x_i - x_j) = \begin{cases} C_1 \cdot (x_i - x_j) & \text{dla } |x_i - x_j| \leq a \\ (C_1 + C_2) \cdot (x_i - x_j) - b & \text{dla } x_i - x_j > a \\ (C_1 + C_2) \cdot (x_i - x_j) + b & \text{dla } x_i - x_j < -a \end{cases},$$

$$b = C_2 a, \quad S_i(x_{2i}) = S_i \cdot \operatorname{sgn}(x_{2i}), \quad l_i = 0.$$

Rozwiązania stacjonarne otrzymane metodą linearyzacji globalnej spełniają następujący układ równań (3.14), (3.15):

$$\begin{aligned} 0 &= \varphi_1^0, \\ 0 &= \varphi_2^0, \\ 0 &= \varphi_3^0, \\ 0 &= \varphi_4^0, \end{aligned} \tag{5.2}$$

$$\begin{aligned} 0 &= \theta_{12}, \\ 0 &= \theta_{22} + k_{21}\theta_{11} + k_{22}\theta_{12} + k_{23}\theta_{13}, \\ 0 &= \theta_{23} + \theta_{14}, \\ 0 &= \theta_{24} + k_{41}\theta_{11} + k_{43}\theta_{13} + k_{44}\theta_{14}, \\ 0 &= 1 + 2k_{21}\theta_{12} + 2k_{23}\theta_{23} + 2k_{22}\theta_{22}, \\ 0 &= \theta_{24} + k_{21}\theta_{13} + k_{23}\theta_{33} + k_{22}\theta_{23}, \\ 0 &= k_{21}\theta_{14} + k_{23}\theta_{34} + k_{22}\theta_{24} + k_{41}\theta_{12} + k_{43}\theta_{23} + k_{44}\theta_{24}, \\ 0 &= \theta_{34}, \\ 0 &= \theta_{44} + k_{41}\theta_{13} + k_{43}\theta_{33} + k_{44}\theta_{34}, \\ 0 &= 1 + 2k_{43}\theta_{34} + 2k_{41}\theta_{14} + 2k_{44}\theta_{44}, \end{aligned} \tag{5.3}$$

gdzie  $k_{ij}$  są współczynnikami wzmocnienia będącymi nieliniowymi funkcjami momentów pierwszego i drugiego rzędu, których postacie zależą od linearyzowanej funkcji – będą one podane później. Wyliczając z układu równań nieliniowych (w ogólnym przypadku) dwa pierwsze momenty rozwiązań stacjonarnych otrzymujemy także wartości współczynników linearyzacji globalnej. Natomiast w przypadku linearyzacji zdecentralizowanej rozwiązujemy najpierw układ równań (3.4),

(3.5) dla każdego podukładu:

$$0 = \psi_1^0, \quad (5.4)$$

$$0 = \psi_2^0,$$

$$\Sigma_1 : 0 = \theta_{12},$$

$$0 = \theta_{22} + \underline{k}_{21}\theta_{11} + \underline{k}_{22}\theta_{12}, \quad (5.5)$$

$$0 = 1 + 2\underline{k}_{21}\theta_{12} + 2\underline{k}_{22}\theta_{22},$$

$$0 = \psi_3^0, \quad (5.6)$$

$$0 = \psi_4^0,$$

$$\Sigma_2 : 0 = \theta_{34},$$

$$0 = \theta_{44} + \underline{k}_{43}\theta_{33} + \underline{k}_{44}\theta_{34}, \quad (5.7)$$

$$0 = 1 + 2\underline{k}_{43}\theta_{34} + 2\underline{k}_{44}\theta_{44},$$

gdzie  $\underline{k}_{ij}$  są nieliniowymi funkcjami momentów zmiennych występujących w danym podukładzie. Z układów równań (5.4) – (5.7) wyznaczamy (najczęściej analitycznie) momenty rozwiązań stacjonarnych dla podukładów, a następnie współczynniki linearyzacji podukładów. W drugim kroku zdecentralizowanej linearyzacji uwzględniamy powiązania między podukładami. Otrzymujemy układ równań:

$$\begin{aligned} 0 &= \rho_1^0, \\ 0 &= \rho_2^0, \\ 0 &= \rho_3^0, \\ 0 &= \rho_4^0, \end{aligned} \quad (5.8)$$

$$\begin{aligned} 0 &= \theta_{12}, \\ 0 &= \theta_{22} + (\underline{k}_{21} + \bar{k}_{21})\theta_{11} + \underline{k}_{22}\theta_{12} + \bar{k}_{23}\theta_{13}, \\ 0 &= \theta_{23} + \theta_{14}, \\ 0 &= \theta_{24} + \bar{k}_{41}\theta_{11} + (\underline{k}_{43} + \bar{k}_{43})\theta_{13} + \underline{k}_{44}\theta_{14}, \\ 0 &= 1 + 2(\underline{k}_{21} + \bar{k}_{21})\theta_{12} + 2\bar{k}_{23}\theta_{23} + 2\underline{k}_{22}\theta_{22}, \\ 0 &= \theta_{24} + (\underline{k}_{21} + \bar{k}_{21})\theta_{13} + \bar{k}_{23}\theta_{33} + \underline{k}_{22}\theta_{23}, \\ 0 &= (\underline{k}_{21} + \bar{k}_{21})\theta_{14} + \underline{k}_{23}\theta_{34} + \underline{k}_{22}\theta_{24} + \bar{k}_{41}\theta_{12} + (\underline{k}_{43} + \bar{k}_{43})\theta_{23} + \underline{k}_{44}\theta_{24}, \\ 0 &= \theta_{34}, \\ 0 &= \theta_{44} + \bar{k}_{41}\theta_{13} + (\underline{k}_{43} + \bar{k}_{43})\theta_{33} + \underline{k}_{44}\theta_{34}, \\ 0 &= 1 + 2(\underline{k}_{43} + \bar{k}_{43})\theta_{34} + 2\bar{k}_{41}\theta_{14} + 2\underline{k}_{44}\theta_{44}, \end{aligned} \quad (5.9)$$

gdzie  $k_{ij}$  są liczbami otrzymanymi w poprzednim kroku linearyzacji zdecentralizowanej, natomiast  $\bar{k}_{ij}$  są współczynnikami wzmocnienia pochodzącymi od powiązań podukładów. Z układu (5.8) – (5.9) wyznaczmy momenty rozwiązań stacjonarnych, a następnie współczynniki zdecentralizowanej linearyzacji stochastycznej.

Z przedstawionego opisu wynika, że w przypadku linearyzacji zdecentralizowanej musimy rozwiązać dwa układy nieliniowych równań algebraicznych (5.4) – (5.7) po pięć równań oraz układ (5.8) – (5.9) czternastu nieliniowych równań algebraicznych, natomiast dla linearyzacji globalnej wystarczy rozwiązać układ (5.2) – (5.3) czternastu nieliniowych równań algebraicznych. Jednak struktura tych równań w przypadku linearyzacji zdecentralizowanej jest o wiele mniej złożona (w przypadku liniowej sprężyny łączącej układ czternastu równań (5.8) – (5.9) jest układem równań liniowych) niż dla linearyzacji globalnej, co powoduje skrócenie czasu obliczeń niezbędnych do wyliczenia współczynników linearyzacji.

Teraz dla czterech kolejnych postaci układu (5.1) wyznaczmy współczynniki linearyzacji jako funkcje momentów oraz współczynniki linearyzacji dla podukładów. Celem uproszczenia zapisu będziemy podawać tylko niezerowe współczynniki linearyzacji.

**Przypadek 1.** Sprężyny występujące w podukładach są nieliniowe, sprężyna łącząca jest liniowa, brak suchego tarcia:

$$q_i(x_{2i-1}) = q_i + \varepsilon_i x_{2i-1}^2,$$

$$C(x_i - x_j) = C \cdot (x_i - x_j), \quad S_i(\cdot) = 0,$$

Współczynniki występujące w układzie równań (5.2) – (5.3) mają postać:

$$\begin{aligned} \varphi_1^0 &= m_2, \\ \varphi_2^0 &= -3\varepsilon_1 m_1 \theta_{11} - \varepsilon_1 m_1^3 - q_1 m_1 - l_1 m_2 - C m_1 + C m_3, \\ \varphi_3^0 &= m_4, \\ \varphi_4^0 &= -3\varepsilon_2 m_3 \theta_{33} - \varepsilon_2 m_3^3 - q_2 m_3 - l_2 m_4 + C m_1 - C m_3, \\ k_{12} &= 1, \\ k_{21} &= -3\varepsilon_1 \theta_{11} - 3\varepsilon_1 m_1^2 - q_1 - C, \\ k_{22} &= -l_1, \\ k_{23} &= C, \\ k_{34} &= 1, \\ k_{41} &= C, \\ k_{43} &= -3\varepsilon_2 \theta_{33} - 3\varepsilon_2 m_3^2 - q_2 - C, \\ k_{44} &= -l_2. \end{aligned} \tag{5.10}$$

Rozwiązaniem układu równań algebraicznych (5.2), mającym fizyczny sens, przy współczynnikach danych wzorem (5.10) jest  $m_i = 0$ ,  $i = 1, \dots, 4$ . Następnie

rozwiązujemy numerycznie układ nieliniowych równań algebraicznych (5.3) z którego wyznaczamy wariancje rozwiązań stacjonarnych, a następnie współczynniki globalnej linearyzacji.

We wzorach (5.4) – (5.7) współczynniki  $\psi_i$  i  $\underline{k}_{ij}$  przyjmują postać:

$$\begin{aligned}\psi_1^0 &= m_2, \\ \psi_2^0 &= -3\varepsilon_1 m_1 \theta_{11} - \varepsilon_1 m_1^3 - q_1 m_1 - l_1 m_2, \\ \underline{k}_{12} &= 1, \\ \underline{k}_{21} &= -3\varepsilon_1 \theta_{11} - 3\varepsilon_1 m_1^2 - q_1, \\ \underline{k}_{22} &= -l_1,\end{aligned}\tag{5.11}$$

$$\begin{aligned}\psi_3^0 &= m_4, \\ \psi_4^0 &= -3\varepsilon_2 m_3 \theta_{33} - \varepsilon_2 m_3^3 - q_2 m_3 - l_2 m_4, \\ \underline{k}_{34} &= 1, \\ \underline{k}_{43} &= -3\varepsilon_2 \theta_{33} - 3\varepsilon_2 m_3^2 - q_2, \\ \underline{k}_{44} &= -l_2.\end{aligned}\tag{5.12}$$

Rozwiązanie układu równań algebraicznych (5.4) – (5.5) przy współczynnikach danych wzorem (5.11) jest następujące (układ (5.6) – (5.7) przy współczynnikach danych wzorem (5.12) ma analogiczne rozwiązanie):

$$\begin{aligned}m_1 = m_2 = 0, \quad \theta_{12} = 0, \\ \theta_{11} = \frac{-q_1 + (q_1^2 + \frac{6\varepsilon_1}{l_1})^{\frac{1}{2}}}{6\varepsilon_1}, \quad \theta_{22} = \frac{1}{2l_1}.\end{aligned}\tag{5.13}$$

Otrzymujemy w ten sposób wartość (nieznanych dotąd) współczynników linearyzacji dla podukładów:

$$\underline{k}_{21} = -\frac{q_1}{2} - \frac{1}{2}(q_1^2 + \frac{6\varepsilon_1}{l_1})^{\frac{1}{2}},\tag{5.14}$$

$$\underline{k}_{43} = -\frac{q_2}{2} - \frac{1}{2}(q_2^2 + \frac{6\varepsilon_2}{l_2})^{\frac{1}{2}}.\tag{5.15}$$

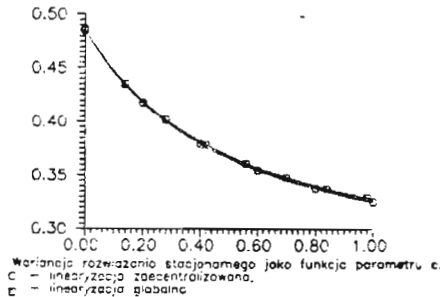
Następnie tworzymy układ równań (5.8) – (5.9). Współczynniki linearyzacji pochodzące od sprzężeń wyrażają się następującymi zależnościami od momentów rozwiązań:

$$\begin{aligned}\rho_1^0 &= 0, \\ \rho_2^0 &= -Cm_1 + Cm_3, \\ \rho_3^0 &= 0, \\ \rho_4^0 &= Cm_1 - Cm_3, \\ \bar{k}_{21} &= \bar{k}_{43} = -C, \\ \bar{k}_{23} &= \bar{k}_{41} = C.\end{aligned}\tag{5.16}$$

Rozwiązaniem układu (5.8) przy współczynnikach danych wzorem (5.16) jest  $m_i = 0$ ,  $i = 1, \dots, 4$ , bowiem rozwiązania niezerowe są niezgodne z fizyczną interpretacją rozważanego systemu. W tym momencie zakończyliśmy zdecentralizowaną linearyzację układu mechanicznego o dwóch stopniach swobody. Otrzymaliśmy następujące współczynniki stochastycznej linearyzacji (5.11), (5.12), (5.14) – (5.16):

$$\begin{aligned} \underline{k}_{12} &= 1, \\ \underline{k}_{21} &= -\frac{q_1}{2} - \frac{1}{2}\left(q_1^2 + \frac{6\varepsilon_1}{l_1}\right)^{\frac{1}{2}}, \\ \underline{k}_{22} &= -l_1, \\ \underline{k}_{34} &= 1, \\ \underline{k}_{44} &= -l_2, \\ \underline{k}_{43} &= -\frac{q_2}{2} - \frac{1}{2}\left(q_2^2 + \frac{6\varepsilon_2}{l_2}\right)^{\frac{1}{2}}, \\ \bar{k}_{21} &= \bar{k}_{43} = -C, \\ \bar{k}_{23} &= \bar{k}_{41} = C. \end{aligned}$$

Dla tego przypadku zdecentralizowaną linearyzację można przeprowadzić bez obliczeń numerycznych, natomiast linearyzacja globalna wymaga numerycznego rozwiązania układu nieliniowych równań algebraicznych (5.2) – (5.3). Wariancje rozwiązań stacjonarnych wyznaczamy z równań (5.3) dla linearyzacji globalnej i z równań (5.9) dla linearyzacji zdecentralizowanej. Porównanie wariancji rozwiązania stacjonarnego  $x_1$  uzyskanych za pomocą obu metod przedstawione zostało na wykresie.



Rys. 2.

**Przypadek 2.** Sprężyny występujące w podukładach są nieliniowe, sprężyna łącząca jest nieliniowa, brak suchego tarcia:

$$q_i(x_{2i-1}) = q_i + \varepsilon_i x_{2i-1}^2,$$

$$C(x_i - x_j) = \begin{cases} C_1 \cdot (x_i - x_j) & \text{dla } |x_i - x_j| \leq a \\ (C_1 + C_2) \cdot (x_i - x_j) - b & \text{dla } x_i - x_j > a \\ (C_1 + C_2) \cdot (x_i - x_j) + b & \text{dla } x_i - x_j < -a \end{cases},$$

$$S_i(\cdot) = 0, \quad b = C_2 a.$$

W poniższych wzorach przyjęto oznaczenie:

$$\sigma = \sqrt{\theta_{11}^2 + \theta_{33}^2 - 2\theta_{13}}. \quad (5.17)$$

Współczynniki występujące w układzie równań (5.2) - (5.3) mają postać:

$$\begin{aligned} \varphi_1^0 &= m_2, \\ \varphi_2^0 &= -3\varepsilon_1 m_1 \theta_{11} - \varepsilon_1 m_1^3 - q_1 m_1 - l_1 m_2 + (C_1 + C_2)(m_3 - m_1) + b + \\ &+ \frac{C_2(m_3 - m_1) - b}{2} \cdot \left[ \operatorname{erf}\left(\frac{a - m_3 + m_1}{\sqrt{2}\sigma}\right) + \operatorname{erf}\left(\frac{a - m_1 + m_3}{\sqrt{2}\sigma}\right) \right] + \\ &+ \frac{C_2\sigma}{\sqrt{2\pi}} \cdot \left[ \exp\left(-\frac{(a - m_3 + m_1)^2}{2\sigma^2}\right) - \exp\left(-\frac{(a - m_1 + m_3)^2}{2\sigma^2}\right) \right], \\ \varphi_3^0 &= m_4, \\ \varphi_4^0 &= -3\varepsilon_2 m_3 \theta_{33} - \varepsilon_2 m_3^3 - q_2 m_3 - l_2 m_4 + (C_1 + C_2)(m_1 - m_3) + b + \\ &+ \frac{C_2(m_1 - m_3) - b}{2} \cdot \left[ \operatorname{erf}\left(\frac{a - m_3 + m_1}{\sqrt{2}\sigma}\right) + \operatorname{erf}\left(\frac{a - m_1 + m_3}{\sqrt{2}\sigma}\right) \right] + \\ &+ \frac{C_2\sigma}{\sqrt{2\pi}} \cdot \left[ \exp\left(-\frac{(a - m_1 + m_3)^2}{2\sigma^2}\right) - \exp\left(-\frac{(a - m_3 + m_1)^2}{2\sigma^2}\right) \right]. \end{aligned}$$

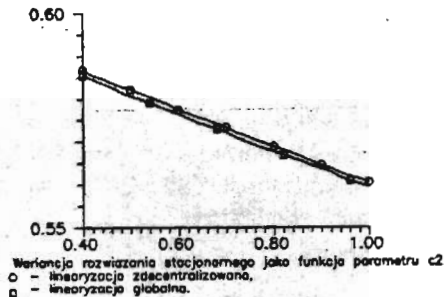
Rozwiązaniem układu równań algebraicznych (5.2) przy powyższych wartościach współczynników jest  $m_i = 0$ ,  $i = 1, \dots, 4$ . Współczynniki  $k_{ij}$  zostały wyznaczone dla tego rozwiązania.

$$\begin{aligned} k_{12} &= 1, \\ k_{21} &= -3\varepsilon_1 \theta_{11} - 3\varepsilon_1 m_1^2 - q_1 - (C_1 + C_2) + \\ &+ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{C_2 a}{\sigma} \exp\left(-\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) + C_2 \operatorname{erf}\left(\frac{a}{\sqrt{2}\sigma}\right), \\ k_{22} &= -l_1, \\ k_{23} &= (C_1 + C_2) - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{C_2 a}{\sigma} \exp\left(-\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) - C_2 \operatorname{erf}\left(\frac{a}{\sqrt{2}\sigma}\right), \\ k_{34} &= 1, \\ k_{41} &= (C_1 + C_2) - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{C_2 a}{\sigma} \exp\left(-\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) - C_2 \operatorname{erf}\left(\frac{a}{\sqrt{2}\sigma}\right), \\ k_{43} &= -3\varepsilon_2 \theta_{33} - 3\varepsilon_2 m_3^2 - q_2 - (C_1 + C_2) + \\ &+ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{C_2 a}{\sigma} \exp\left(-\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) + C_2 \operatorname{erf}\left(\frac{a}{\sqrt{2}\sigma}\right), \\ k_{44} &= -l_2. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Następnie rozwiązujemy numerycznie układ nieliniowych równań algebraicznych (5.3) przy współczynnikach danych wzorem (5.18).

Linearyzacja podukładów jest dokładnie taka sama jak w poprzednim przypadku (wzory (5.10) - (43)). Natomiast współczynniki linearyzacji pochodzące od sprzężeń wyrażają się następującymi zależnościami od momentów rozwiązań:

$$\begin{aligned}
 \rho_1^0 &= 0, \\
 \rho_2^0 &= (C_1 + C_2)(m_3 - m_1) + b + \\
 &\quad + \frac{C_2(m_3 - m_1) - b}{2} \cdot \left[ \operatorname{erf}\left(\frac{a - m_3 + m_1}{\sqrt{2}\sigma}\right) + \operatorname{erf}\left(\frac{a - m_1 + m_3}{\sqrt{2}\sigma}\right) \right] + \\
 &\quad + \frac{C_2\sigma}{\sqrt{2\pi}} \cdot \left[ \exp\left(-\frac{(a - m_3 + m_1)^2}{2\sigma^2}\right) - \exp\left(-\frac{(a - m_1 + m_3)^2}{2\sigma^2}\right) \right], \\
 \rho_3^0 &= 0, \\
 \rho_4^0 &= (C_1 + C_2)(m_1 - m_3) + b + \\
 &\quad + \frac{C_2(m_1 - m_3) - b}{2} \cdot \left[ \operatorname{erf}\left(\frac{a - m_3 + m_1}{\sqrt{2}\sigma}\right) + \operatorname{erf}\left(\frac{a - m_1 + m_3}{\sqrt{2}\sigma}\right) \right] + \\
 &\quad + \frac{C_2\sigma}{\sqrt{2\pi}} \cdot \left[ \exp\left(-\frac{(a - m_1 + m_3)^2}{2\sigma^2}\right) - \exp\left(-\frac{(a - m_3 + m_1)^2}{2\sigma^2}\right) \right], \\
 \bar{k}_{21} &= \bar{k}_{43} = -(C_1 + C_2) + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{C_2 a}{\sigma} \exp\left(-\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) + C_2 \operatorname{erf}\left(\frac{a}{\sqrt{2}\sigma}\right), \\
 \bar{k}_{23} &= \bar{k}_{41} = (C_1 + C_2) - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{C_2 a}{\sigma} \exp\left(-\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) - C_2 \operatorname{erf}\left(\frac{a}{\sqrt{2}\sigma}\right).
 \end{aligned} \tag{5.19}$$



Rys. 3.

Rozwiązaniem układu (5.8) przy współczynnikach danych wzorem (5.19) jest  $m_i = 0$ ,  $i = 1, \dots, 4$ , bowiem rozwiązania niezerowe są niezgodne z fizyczną interpretacją rozważanego systemu. Teraz wyznaczamy numerycznie drugie momenty rozwiązań z układu nieliniowych równań algebraicznych (5.8) - (5.9) przy

współczynnikach zadanych wzorem (5.19), a następnie wyliczamy współczynniki linearyzacji. Porównanie wariancji rozwiązania stacjonarnego  $x_1$  otrzymanych za pomocą obu metod przedstawione zostało na wykresie.

**Przypadek 3.** Sprężyny występujące w podukładach są liniowe, sprężyna łącząca jest liniowa, występuje suche tarcie:

$$q_i(x_{2i-1}) = q_i, \quad C(x_i - x_j) = C \cdot (x_i - x_j),$$

$$S_i(x_{2i}) = S_i \cdot \operatorname{sgn}(x_{2i}), \quad l_i = 0,$$

Współczynniki występujące w układzie równań (5.2) – (5.3) mają postać:

$$\begin{aligned} \varphi_1^0 &= m_2, \\ \varphi_2^0 &= -q_1 m_1 - C m_1 + C m_3 - S_1 \operatorname{erf}\left(\frac{m_2}{\sqrt{2}\sigma}\right), \\ \varphi_3^0 &= m_4, \\ \varphi_4^0 &= -q_2 m_3 + C m_1 - C m_3 - S_2 \operatorname{erf}\left(\frac{m_4}{\sqrt{2}\sigma}\right), \\ k_{12} &= 1, \\ k_{21} &= -q_1 - C, \\ k_{22} &= -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{S_1}{\sigma} \exp\left(-\frac{m_2^2}{2\sigma^2}\right), \\ k_{23} &= C, \\ k_{34} &= 1, \\ k_{41} &= C, \\ k_{43} &= -q_2 - C, \\ k_{44} &= -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{S_2}{\sigma} \exp\left(-\frac{m_4^2}{2\sigma^2}\right). \end{aligned} \tag{5.20}$$

Rozwiązaniem układu równań algebraicznych (5.2), mającym fizyczny sens, przy współczynnikach danych wzorem (5.20) jest  $m_i = 0$ ,  $i = 1, \dots, 4$ . Następnie numerycznie rozwiązujemy układ nieliniowych równań algebraicznych (5.3) z którego wyznaczamy wariancje rozwiązania stacjonarnego oraz współczynniki linearyzacji.

We wzorach (5.4) – (5.7) współczynniki  $\psi_i$  i  $k_{ij}$  przyjmują postać:

$$\begin{aligned} \psi_1^0 &= m_2, \\ \psi_2^0 &= -q_1 m_1 - S_1 \operatorname{erf}\left(\frac{m_2}{\sqrt{2}\sigma}\right), \\ k_{12} &= 1, \\ k_{21} &= -q_1, \\ k_{22} &= -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{S_1}{\sigma} \exp\left(-\frac{m_2^2}{2\sigma^2}\right), \end{aligned} \tag{5.21}$$



$$\begin{aligned}
 \psi_3^0 &= m_4, \\
 \psi_4^0 &= -q_2 m_3 - S_2 \operatorname{erf}\left(\frac{m_4}{\sqrt{2}\sigma}\right), \\
 \underline{k}_{34} &= 1, \\
 \underline{k}_{43} &= -q_2, \\
 \underline{k}_{44} &= -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{S_2}{\sigma} \exp\left(-\frac{m_4^2}{2\sigma^2}\right).
 \end{aligned}
 \tag{5.22}$$

Rozwiązanie układu równań algebraicznych (5.4) – (5.5) przy współczynnikach danych wzorem (5.21) jest następujące (układ (5.6) – (5.7) przy współczynnikach danych wzorem (5.22) ma analogiczne rozwiązanie):

$$\begin{aligned}
 m_1 = m_2 = 0, \quad \theta_{12} = 0, \\
 \theta_{11} = \frac{8S_1^2 q_1^2}{\pi(1+q_1^2)}, \quad \theta_{22} = q_1 \theta_{11}.
 \end{aligned}
 \tag{5.23}$$

Otrzymujemy w ten sposób wartość (nieznanych dotąd) współczynników linearyzacji dla podukładów:

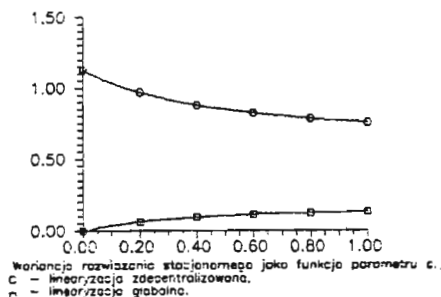
$$\underline{k}_{22} = -\frac{(2\pi(1+q_1^2))^{\frac{1}{2}}}{8S_1 q_1^2},
 \tag{5.24}$$

$$\underline{k}_{44} = -\frac{(2\pi(1+q_2^2))^{\frac{1}{2}}}{8S_2 q_2^2}.
 \tag{5.25}$$

Współczynniki linearyzacji pochodzące od sprzężeń wyrażają się następującymi zależnościami funkcyjnymi od momentów rozwiązania:

$$\begin{aligned}
 \rho_1^0 &= 0, \\
 \rho_2^0 &= -C m_1 + C m_3, \\
 \rho_3^0 &= 0, \\
 \rho_4^0 &= C m_1 - C m_3, \\
 \bar{k}_{21} &= \bar{k}_{43} = -C, \\
 \bar{k}_{23} &= \bar{k}_{41} = C.
 \end{aligned}
 \tag{5.26}$$

Rozwiązaniem układu (5.8) przy współczynnikach danych wzorem (5.26) jest  $m_i = 0$ ,  $i = 1, \dots, 4$ , bowiem, podobnie jak poprzednio, rozwiązania niezerowe są niezgodne z fizyczną interpretacją rozważanego systemu. Z równań (5.26) wynika, że w tym momencie zakończyliśmy zdecentralizowaną linearyzację układu mechanicznego o dwóch stopniach swobody. Również dla tego przypadku zdecentralizowaną linearyzację można przeprowadzić bez obliczeń numerycznych, natomiast linearyzacja globalna wymaga numerycznego rozwiązania układu nieliniowych równań



Rys. 4.

algebraicznych (5.2) – (5.3). Porównanie wariancji rozwiązania stacjonarnego  $x_1$  uzyskanych przy zastosowaniu obu metod przedstawione zostało na wykresie.

Przypadek 4. Sprężyny występujące w podukładach są liniowe, sprężyna łącząca jest nieliniowa, występuje suche tarcie:

$$q_i(x_{2i-1}) = q_i, \quad C(x_i - x_j) = \begin{cases} C_1 \cdot (x_i - x_j) & \text{dla } |x_i - x_j| \leq a \\ (C_1 + C_2) \cdot (x_i - x_j) - b & \text{dla } x_i - x_j > a \\ (C_1 + C_2) \cdot (x_i - x_j) + b & \text{dla } x_i - x_j < -a \end{cases},$$

$$b = C_2 a, \quad S_i(x_{2i}) = S_i \cdot \text{sgn}(x_{2i}), \quad l_i = 0.$$

W poniższych wzorach przyjęto oznaczenie:

$$\sigma = \sqrt{\theta_{11}^2 + \theta_{33}^2 - 2\theta_{13}}. \quad (5.27)$$

Współczynniki występujące w układzie równań (5.2) – (5.3) mają postać:

$$\varphi_1^0 = m_2,$$

$$\begin{aligned} \varphi_2^0 = & -q_1 m_1 - S_1 \operatorname{erf}\left(\frac{m_2}{\sqrt{2}\sigma}\right) + (C_1 + C_2)(m_3 - m_1) + b + \\ & + \frac{C_2(m_3 - m_1) - b}{2} \cdot \left[ \operatorname{erf}\left(\frac{a - m_3 + m_1}{\sqrt{2}\sigma}\right) + \operatorname{erf}\left(\frac{a - m_1 + m_3}{\sqrt{2}\sigma}\right) \right] + \\ & + \frac{C_2\sigma}{\sqrt{2\pi}} \cdot \left[ \exp\left(-\frac{(a - m_3 + m_1)^2}{2\sigma^2}\right) - \exp\left(-\frac{(a - m_1 + m_3)^2}{2\sigma^2}\right) \right], \end{aligned}$$

$$\varphi_3^0 = m_4,$$

$$\begin{aligned} \varphi_4^0 = & -q_2 m_3 - S_2 \operatorname{erf}\left(\frac{m_4}{\sqrt{2}\sigma}\right) + (C_1 + C_2)(m_1 - m_3) + b + \\ & + \frac{C_2(m_1 - m_3) - b}{2} \cdot \left[ \operatorname{erf}\left(\frac{a - m_3 + m_1}{\sqrt{2}\sigma}\right) + \operatorname{erf}\left(\frac{a - m_1 + m_3}{\sqrt{2}\sigma}\right) \right] + \\ & + \frac{C_2\sigma}{\sqrt{2\pi}} \cdot \left[ \exp\left(-\frac{(a - m_1 + m_3)^2}{2\sigma^2}\right) - \exp\left(-\frac{(a - m_3 + m_1)^2}{2\sigma^2}\right) \right]. \end{aligned}$$

Rozwiązaniem układu równań algebraicznych (5.2) przy powyższych wartościach współczynników jest  $m_i = 0$ ,  $i = 1, \dots, 4$ . Współczynniki  $k_{ij}$  zostały wyznaczone dla tego rozwiązania.

$$\begin{aligned}
 k_{12} &= 1, \\
 k_{21} &= -q_1 - (C_1 + C_2) + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{C_2 a}{\sigma} \exp\left(-\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) + C_2 \operatorname{erf}\left(\frac{a}{\sqrt{2}\sigma}\right), \\
 k_{22} &= -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{S_1}{\sigma} \exp\left(-\frac{m_2^2}{2\sigma^2}\right), \\
 k_{23} &= (C_1 + C_2) - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{C_2 a}{\sigma} \exp\left(-\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) - C_2 \operatorname{erf}\left(\frac{a}{\sqrt{2}\sigma}\right), \\
 k_{34} &= 1, \\
 k_{41} &= (C_1 + C_2) - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{C_2 a}{\sigma} \exp\left(-\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) - C_2 \operatorname{erf}\left(\frac{a}{\sqrt{2}\sigma}\right), \\
 k_{43} &= -q_2 - (C_1 + C_2) + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{C_2 a}{\sigma} \exp\left(-\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) + C_2 \operatorname{erf}\left(\frac{a}{\sqrt{2}\sigma}\right), \\
 k_{44} &= -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{S_2}{\sigma} \exp\left(-\frac{m_4^2}{2\sigma^2}\right).
 \end{aligned} \tag{5.28}$$

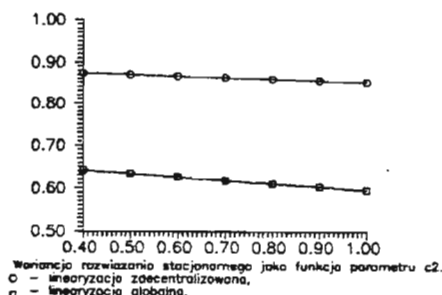
Teraz numerycznie wyznaczamy wariancje rozwiązań stacjonarnych oraz współczynniki globalnej linearyzacji.

Linearyzacja podukładów jest dokładnie taka sama jak w poprzednim przypadku (wzory (5.21) – (5.25)). Natomiast współczynniki linearyzacji pochodzące od sprzężeń wyrażają się następującymi zależnościami funkcyjnymi od momentów rozwiązań:

$$\begin{aligned}
 \rho_1^0 &= 0, \\
 \rho_2^0 &= (C_1 + C_2)(m_3 - m_1) + b + \\
 &\quad + \frac{C_2(m_3 - m_1) - b}{2} \cdot \left[ \operatorname{erf}\left(\frac{a - m_3 + m_1}{\sqrt{2}\sigma}\right) + \operatorname{erf}\left(\frac{a - m_1 + m_3}{\sqrt{2}\sigma}\right) \right] + \\
 &\quad + \frac{C_2\sigma}{\sqrt{2\pi}} \cdot \left[ \exp\left(-\frac{(a - m_3 + m_1)^2}{2\sigma^2}\right) - \exp\left(-\frac{(a - m_1 + m_3)^2}{2\sigma^2}\right) \right], \\
 \rho_3^0 &= 0, \\
 \rho_4^0 &= (C_1 + C_2)(m_1 - m_3) + b + \\
 &\quad + \frac{C_2(m_1 - m_3) - b}{2} \cdot \left[ \operatorname{erf}\left(\frac{a - m_3 + m_1}{\sqrt{2}\sigma}\right) + \operatorname{erf}\left(\frac{a - m_1 + m_3}{\sqrt{2}\sigma}\right) \right] + \\
 &\quad + \frac{C_2\sigma}{\sqrt{2\pi}} \cdot \left[ \exp\left(-\frac{(a - m_1 + m_3)^2}{2\sigma^2}\right) - \exp\left(-\frac{(a - m_3 + m_1)^2}{2\sigma^2}\right) \right], \\
 \bar{k}_{21} &= \bar{k}_{43} = -(C_1 + C_2) + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{C_2 a}{\sigma} \exp\left(-\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) + C_2 \operatorname{erf}\left(\frac{a}{\sqrt{2}\sigma}\right),
 \end{aligned} \tag{5.29}$$

$$\bar{k}_{23} = \bar{k}_{41} = (C_1 + C_2) - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{C_2 a}{\sigma} \exp\left(-\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) - C_2 \operatorname{erf}\left(\frac{a}{\sqrt{2}\sigma}\right).$$

Rozwiązaniem układu (5.8) przy współczynnikach danych wzorem (5.29) jest  $m_i = 0$ ,  $i = 1, \dots, 4$ , bowiem rozwiązania niezerowe są niezgodne z fizyczną interpretacją rozważanego systemu. Teraz wyznaczamy numerycznie drugie momenty rozwiązań z układu nieliniowych równań algebraicznych (5.8) – (5.9) przy współczynnikach zadanych wzorem (5.29), a następnie wyliczamy współczynniki linearyzacji. Porównanie wariancji rozwiązania stacjonarnego  $x_1$  przedstawione zostało na wykresie.



Rys. 5.

## 6. Uwagi końcowe

Z przedstawionych wykresów wynika, że dla układów, w których nie występuje suche tarcie proponowana metoda zdecentralizowanej linearyzacji daje wyniki zbliżone do metody globalnej linearyzacji, jednak czas obliczeń w przypadku metody zdecentralizowanej był krótszy w przypadku układu z liniowymi powiązaniem wielokrotnie, a dla układu z nieliniowymi powiązaniem o 20%. Natomiast rozważane metody dały różne rezultaty w przypadku układu z suchym tarcie, natomiast podobnie jak dla układu bez suchego tarcia czas obliczeń w przypadku stosowania metody zdecentralizowanej linearyzacji był krótszy.

## Literatura

1. ATALIK T.S., UTKU S., *Stochastic Linearization of Multi-Degree-of-Freedom Non-Linear Systems*, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, vol.4, str. 411-420, 1976

2. CAUGHEY T.K., *Nonlinear Theory of Random Vibrations*, Advances in Applied Mechanics, vol.11, Academic Press, New York, 1976
3. CRANDALL S.T., *Perturbation Techniques for Random Vibrations of Nonlinear Systems*, J. of the Acoustical Society of America, vol.35, No.11, str.1700-1705, 1963
4. FRIEDRICH H., *Herungsverfahren zur Berechnung von schwachnichtlinearen, stochastisch zwangserregten Schwingungssystemen mit einem Freiheitsgrad*, Beitrage zur Schwingungstheorie, ed. Schimdt G., Akademie-Verlag Berlin, 1974
5. IWAN W.D., YANG I-MIN, *Application of Statistical Linearization to Nonlinear Multidegree-of-Freedom Systems*, J. of Applied Mechanics, str.545-550, 1972
6. KAZAKOV I.E., *Methods of Analyzing of Non-linear Automatic Systems based on Statistical Linearization*, Modern Methods of Control Systems Design, Mashinostroenie, 1967, str 447-487, 1967
7. KAZAKOV I.E., *Statisticheskiye metody w projektirowanii sistem uprawlenija*, Mashinostroenie, 1969
8. TUNG C.C., *The Effects of Runway Roughness on the Dynamic Response of Airplanes*, J. of Sound and Vibration, vol.5, No.1, str. 164-172, 1967
9. ZAJDENBERG E.D., *On third Method of Statistical Linearization of a Class of Non-linear Differential Equations*, Automatic and Telemechanics, vol.25, No 2, 1964

Praca ta powstała w ramach CPBP 02.19.

#### Summary

The applications of stochastic linearization to multi-degree-of-freedom systems is considered in this paper. The systems have an interconnected structure i.e. they consist of many interconnected subsystems. The method of two step linearization is proposed. In the first step the subsystems will be linearized, in the second step the interconnections will be linearized. The comparison of computation time and accuracy of the proposed method with standard stochastic linearization is illustrated for a mechanical system with two degrees of freedom.

*Praca wpłynęła do Redakcji dnia 22 maja 1989 roku*