

ALGORYTM NUMERYCZNEGO GENEROWANIA RÓWNAŃ
DYNAMIKI DLA PEWNEJ KLASY UKŁADÓW
MECHANICZNYCH

JERZY MARYNIAK

Politechnika Warszawska

JERZY MAŁECKI

*Przemysłowy Instytut Automatyki
i Pomiarów MERA - PIAP*

Wykaz ważniejszych oznaczeń

- a_i – stały parametr Denavita–Hartenberga,
- α_i – stały parametr Denavita–Hartenberga,
- B_i – macierz bezwładności i -tego ogniwa łańcucha głównego,
- \tilde{B}_i – macierz bezwładności i -tego elementu towarzyszącego,
- E_K^G – energia kinetyczna elementów głównego łańcucha kinematycznego,
- E_{Kt}^T – energia kinetyczna t -tego elementu towarzyszącego,
- f_i – parametr informujący o rodzaju pary kinematycznej,
- g – wektor przyspieszenia ziemskiego,
- L^G – funkcja Lagrange'a elementów głównego łańcucha kinematycznego,
- L_t^T – funkcja Lagrange'a t -tego elementu towarzyszącego,
- m_i – masa i -tego elementu głównego łańcucha kinematycznego,
- \tilde{m}_i – masa i -tego elementu towarzyszącego,
- μ_l – l -ty moment uogólniony,
- M_{S_i} – moment napędowy i -tego silnika,
- N – liczba stopni swobody układu mechanicznego,

- p^t – wektor współrzędnych doprowadzających t -tego elementu towarzyszącego,
 q – wektor współrzędnych uogólnionych,
 r_t – rozmiar t -tego wektora współrzędnych doprowadzających,
 r_{oj}^i – wektor wodzący j -tego punktu i -tego ogniwa w układzie inercyjnym,
 r_j^i – wektor wodzący j -tego punktu i -tego ogniwa w układzie własnym tego ogniwa,
 r_{sc}^i – wektor wodzący środka ciężkości i -tego ogniwa w układzie własnym tego ogniwa,
 \bar{r}_{sc}^t – wektor wodzący środka ciężkości t -tego elementu towarzyszącego w układzie własnym tego ogniwa,
 s_i – liniowe przemieszczenie członu i względem członu $i-1$ wzdłuż osi z_{i-1} układu współrzędnych przyjętego wg Denavita-Hartenberga,
 θ_i – kątowne przemieszczenie członu i względem członu $i-1$ wokół osi z_{i-1} układu współrzędnych przyjętego wg Denavita-Hartenberga,
 T_C – liczba elementów towarzyszących równa sumie T_N i T_S ,
 T_N – liczba elementów towarzyszących nie licząc wirników silników elektrycznych,
 T_S – liczba wirników silników elektrycznych,
 T_i – i -ta macierz transformacji dla elementów łańcucha głównego kinematycznego,
 \bar{T}_i^t – i -ta macierz transformacji w łańcuchu doprowadzającym t -tego elementu towarzyszącego,
 V^G – energia potencjalna elementów łańcucha głównego,
 V_t^T – energia potencjalna t -tego elementu towarzyszącego.

1. Wstęp

W pracy przedstawiona została propozycja algorytmu generującego równania ruchu układów mechanicznych o strukturze otwartych łańcuchów kinematycznych złożonych z ogniw sztywnych, rozbudowanych o pewne elementy towarzyszące.

Klasę dopuszczalnych elementów towarzyszących określa żądanie nienakładania

przez nie ograniczeń na stopnie swobody łańcucha głównego, czyli aby elementy te nie wprowadzały więzów na układ główny. W przypadku takim należy te dodatkowe związki odpowiednio uwzględnić i nie wchodzi on w zakres poniższej analizy.

Uwzględnianie istnienia elementów towarzyszących w procesie modelowania dynamiki określonych wyżej układów jest konieczne z uwagi na ich istotny wpływ na zachowanie się całości konstrukcji.

Jako przykład układu rzeczywistego, należącego do omawianej klasy posłużyć może łańcuch kinematyczny główny manipulatora, uzupełniony mechanizmami napędowymi poszczególnych stopni swobody, przy czym dla szeregu przypadków elementy tych mechanizmów czynią zadość warunkowi niewprowadzania więzów. Innym przykładem jest układ mechaniczny działka przeciwlotniczego. W jego sekwencyjnej budowie, jako kolejne elementy głównego łańcucha kinematycznego mogą być zinterpretowane: wieża, osada lufy, lufa i wreszcie pocisk. Zaś jako elementy towarzyszące odpowiednio wirujące części mechanizmów napędowych ruchu obrotowego wieży i kąta pochylecia lufy.

2. Cel budowy algorytmu

W procesie analizy własności dynamicznych obiektu istotne miejsce zajmuje budowa możliwie dokładnego jego modelu fizycznego i matematycznego. W większości przypadków na tym etapie pracy podstawowym utrudnieniem staje się ogromna złożoność otrzymywanych zależności. Efektem tego jest z reguły upraszczanie modelu, przy czym nie zawsze jest łatwo orzec, które uproszczenia okażą się korzystne z punktu widzenia wierności symulacji.

Szczególnie w przypadku stosowania energetycznego formalizmu równań Lagrange'a do budowy modeli układów mechanicznych o wielu stopniach swobody, otrzymuje się z reguły bardzo złożone wyrażenia opisujące funkcję Lagrange'a. Z kolei konieczność wykonania na niej szeregu operacji różniczkowania i wreszcie sprowadzenia układu do dogodnej do całkowania postaci normalnej, jest czynnością żmudną, czasochłonną i narażającą na popełnienie trudnych do lokalizacji pomyłek. Całkowanie równań ruchu dostarcza rozwiązania zadania prostego dynamiki, przy czym generowane związki pozwalają oczywiście rozwiązywać zagadnienia odwrotne. Z uwagi na praktyczną użyteczność równań dynamiki, obecnie szeroko podejmowane są prace nad budową algorytmów, które pozwoliłyby uniknąć wspomnianych powyżej trudności i generować równania dla dokładnych modeli przy użyciu maszyn cyfrowych.

W pracy wykorzystano zalety stosowanych w robotyce współrzędnych jednorodnych i notacji Denavita-Hartenberga [2,3,4,8,9,16,20].

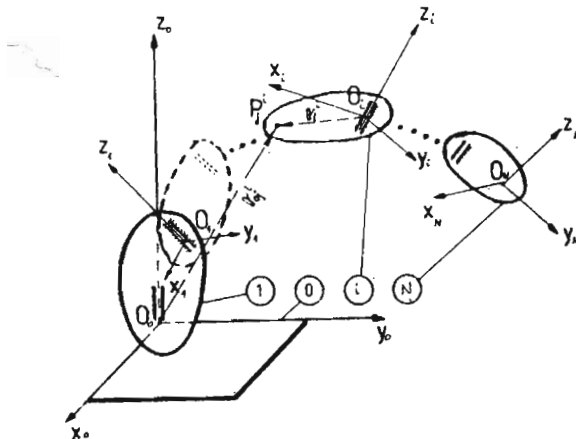
Spośród stosowanych do budowy równań dynamiki zasad Gaussa [8,18], d'Alemberta [22,23] i Lagrange'a [3,6,8,9,12,14,16,21] zdecydowano się dalej na ten

ostatni formalizm. Przemawia za tym duża łatwość opisu wszelkich oddziaływań o charakterze bezwładnościowym, tak istotnych w pracy układów o interesującej nas budowie, poprzez dokładny opis funkcji Lagrange'a układu.

Ponieważ wymienione wyżej monografie i prace przedstawiają praktycznie gotowe algorytmy dla ogniw głównych łańcuchów kinematycznych, część pracy poświęcona temu zagadnieniu została skrócona do niezbędnego minimum. Szerzej omówiono metodę uwzględniania energii kinetycznej i potencjalnej sił ciężkości elementów towarzyszących głównemu łańcuchowi kinematycznemu, przy użyciu współrzędnych doprowadzających [12]. Podobnie przy omawianiu metodyki wyznaczania sił uogólnionych główną uwagę zwrócono na układy napędowe z silnikami elektrycznymi, gdyż napędy hydrauliczne i pneumatyczne zostały szczegółowo omówione w pracy [21].

3. Algorytm generowania równań dynamiki

3.1. Zasady doboru układów współrzędnych



Rys. 1. Dobór układów współrzędnych dla elementów łańcucha kinematycznego

Efektywnym sposobem przyjmowania układów współrzędnych do badania dynamiki układów mechanicznych w postaci otwartych łańcuchów kinematycznych jest notacja Denavita-Hartenberga [2,7,8,11,16,21]. Różni autorzy proponują metody alternatywne [8,22], jednak wydaje się, że znajdują one sobie mniejszą popularność.

Dzięki odpowiednio opracowanemu sposobowi przyjmowania układów współrzędnych dla kolejnych, sąsiadujących ze sobą, ogniw łańcucha, uzyskuje się macierze transformacji T_i o stałej, sformalizowanej budowie. Istota pomysłu [4] jest przedstawiona poniżej.

Z nieruchomym środowiskiem obiektu wiązuje się układ inercjalny $0_0x_0y_0z_0$. Czyni się to w taki sposób, aby jego oś z_0 pokrywała się z osią kinematyczną pierwszej pary kinematycznej. Parę kinematyczną będziemy nazywali przesuwną, gdy stopniem swobody łączącym dwa sąsiednie ogniwa w tej parze jest przesunięcie, natomiast obrotową – gdy obrót. Oś obrotu lub translacji nazywana będzie dalej osią pary kinematycznej. Od razu trzeba nadmienić, że pary kinematyczne mogą mieć więcej niż jeden stopień swobody, wtedy jednak zastosowanie poniższego algorytmu wymaga zastępowania tych par parami o jednym stopniu swobody i odpowiedniego przenumerowania ogniw w łańcuchu. Dalsze rozważania będą dotyczyły bezpośrednio par o jednym stopniu swobody, czyli piątej klasy. Zasadą doboru dwóch sąsiednich układów współrzędnych jest to, aby oś kinematyczna łącząca $i-1$ oraz i -te ogniwo była osią z_{i-1} układu $0_{i-1}x_{i-1}y_{i-1}z_{i-1}$ związanego sztywno z ogniwem $i-1$. Oś x_i musi zostać skierowana wzdłuż wspólnej prostopadłej do osi z_{i-1} oraz z_i , przy czym z_i jest osią następnej pary. Oś y_i skierowana musi być tak, aby uzupełniała prawoskrętny układ $0_i x_i y_i z_i$.

3.2. Budowa macierzy transformacji

Przejścia z układu i do układu $i-1$ dokonuje się za pomocą następujących kolejnych transformacji [8]:

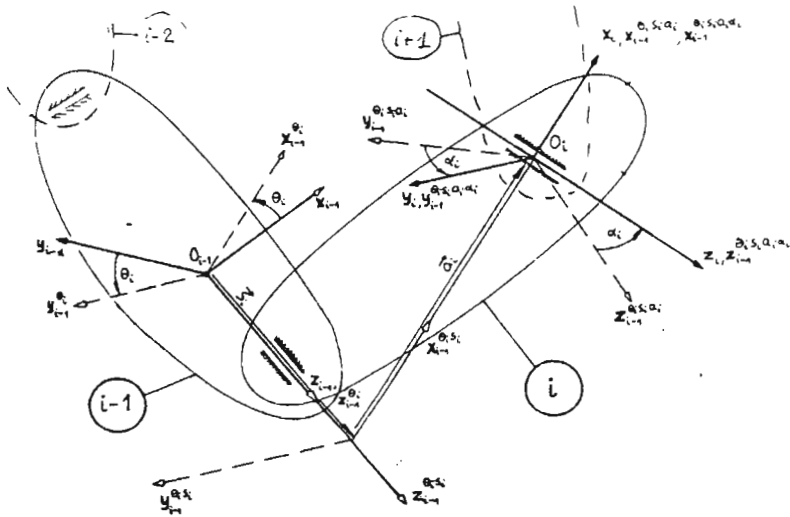
- obrotu Θ_i wokół osi z_{i-1} dopóki osie x_{i-1} i x_i nie staną się równoległe,
- przesunięcia o wektor s_i wzdłuż osi z_{i-1} do momentu, aż osie x_{i-1} i x_i będą leżały na jednej prostej,
- przesunięcia o wektor a_i wzdłuż osi x_i do pokrycia się punktów 0_{i-1} i 0_i ,
- obrotu o kąt α_i wokół osi x_i do momentu pokrycia się wszystkich osi współrzędnych obu nakładów.

Złożenie tych transformacji daje poniższą macierz transformacji układów:

$$T_{i,i-1} = \begin{bmatrix} \cos \Theta_i & -\sin \Theta_i \cos \alpha_i & \sin \Theta_i \sin \alpha_i & a_i \cos \Theta_i \\ \sin \Theta_i & \cos \Theta_i \cos \alpha_i & -\cos \Theta_i \sin \alpha_i & a_i \sin \Theta_i \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & s_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.1)$$

Dalej stosowane będzie oznaczenie $T_i = T_{i,i-1}$. W parze kinematycznej o jednym stopniu swobody współrzędną uogólnioną może być:

- a) Θ_i ; gdy para jest obrotowa, jednocześnie jest $s_i = \text{const.}$,
- b) s_i ; gdy para jest przesuwna, wtedy $\Theta_i = \text{const.}$



Rys. 2. Ilustracja notacji Denavita-Hartenberga

Wygodnie jest wprowadzić oznaczenie:

$$q_i = \theta_i f_i + s_i(1 - f_i), \quad (3.2)$$

dzięki czemu $q_i = \theta_i$ dla $f_i = 1$, oraz $q_i = s_i$ dla $f_i = 0$.

3.3. Własności macierzy transformacji T_i

Charakterystyczna budowa macierzy transformacji pozwala na wykorzystanie dwóch niżej wymienionych własności istotnych z punktu widzenia budowy algorytmów komputerowych.

A. Łatwość opisu przejść pomiędzy kolejnymi układami współrzędnych

Dzięki temu, że macierz (3.1) ma budowę postaci:

$$T_i = \begin{bmatrix} O_i & t_i \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.3)$$

gdzie macierz O_i określa obroty, a wektor t_i translacje konieczne przy przechodzeniu pomiędzy sąsiadującymi układami, przejścia te mogą być zapisywane w postaci odpowiednich iloczynów macierzy T_i , co pozwala w sposób łatwy i bardzo przejrzysty zapisać algorytm komputerowy w wybranym języku programowania.

Chcąc obliczyć położenie j -tego punktu i -tego ogniwa P_j^i wystarczy obliczyć iloczyn:

$$\mathbf{r}_{0j}^i = \mathbf{T}_1 \mathbf{T}_2 \dots \mathbf{T}_i \mathbf{r}_j^i \quad (3.4)$$

gdzie:

\mathbf{r}_{0j}^i wektor wodzący punktu P_j^i w układzie inercjalnym,

\mathbf{r}_j^i wektor wodzący punktu P_j^i w układzie własnym ogniwa i ,

(przykład liczbowy dla robota o sześciu stopniach swobody, patrz np. [11]).

B. Udogodnienie procesu różniczkowania macierzy transformacji

Jak łatwo sprawdzić, proces różniczkowania macierzy transformacji \mathbf{T}_i można sprowadzić do mnożenia jej przez odpowiednią macierz o stałych współczynnikach θ_i , w przypadku różniczkowania po czasie, przez pochodną odpowiedniej współrzędnej uogólnionej. W zależności od tego, który z parametrów Hartenberga jest współrzędną uogólnioną, jest odpowiednio:

$$\dot{\mathbf{T}}_i = \Theta_s \mathbf{T}_i \dot{s}_i, \quad (3.5)$$

$$\dot{\mathbf{T}}_i = \Theta_0 \mathbf{T}_i \dot{\theta}_i,$$

przy czym

$$\Theta_\theta = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Theta_s = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.6)$$

Poniżej zilustrowano praktyczne znaczenie tej zalety, obliczając pochodną po czasie wektora \mathbf{r}_{0j}^i :

$$\dot{\mathbf{r}}_{0j}^i = \mathbf{T}_1 \mathbf{T}_2 \dots \mathbf{T}_i \dot{\mathbf{r}}_j^i = \mathbf{W}_i \dot{\mathbf{r}}_j^i, \quad (3.7)$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r}_{0j}^i) = \dot{\mathbf{W}} \mathbf{r}_j^i = \sum_{k=1}^i \frac{\partial \mathbf{W}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k \mathbf{r}_j^i, \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial \mathbf{W}_i}{\partial q_k} = \mathbf{T}_1 \mathbf{T}_2 \dots \mathbf{T}_{k-1} \frac{\partial \mathbf{T}_k}{\partial q_k} \dots \mathbf{T}_i. \quad (3.9)$$

Teraz korzystając z (3.5) można napisać:

$$\frac{\partial \mathbf{W}_i}{\partial q_k} = \mathbf{T}_1 \mathbf{T}_2 \dots \mathbf{T}_{k-1} \Theta \mathbf{T}_k \dots \mathbf{T}_i, \quad (3.10)$$

przy czym:

$$\Theta = \begin{cases} \Theta_\theta & \text{gdy } q_j = \theta_j \\ \Theta_s & \text{gdy } q_j = s_j \end{cases}. \quad (3.11)$$

W ten sposób kłopotliwe rachunkowo różniczkowanie zostaje zastąpione przez wygodne do programowania na maszynie cyfrowej operacje mnożenia odpowiednich macierzy. Warto nadmienić, że działania ΘT_i można zaprogramować poprzez odpowiednie operacje podstawienia (zerowanie lub przestawianie wierszy z odpowiednim znakiem), co pozwala znacznie skrócić czas obliczeń wobec wielokrotnego wykonywania tych działań w toku generowania równań.

3.4. Składowe równań Lagrange'a dla ogniw głównego łańcucha kinematycznego

Energię kinematyczną N ogniw łańcucha głównego można wyrazić jako [8]:

$$E_K^G = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^i \text{Tr} [U_{ij} B_i U_{ik}^T] \dot{q}_j \dot{q}_k, \quad (3.12)$$

gdzie:

$$U_{ij} = \frac{\partial W_i}{\partial q_j}, \quad (3.13)$$

$$B_i = \int_{m_i} r^i (r^i)^T dm_i = \begin{bmatrix} \int_{m_i} x^2 dm_i & \int_{m_i} xy dm_i & \int_{m_i} xz dm_i & \int_{m_i} x dm_i \\ \int_{m_i} xy dm_i & \int_{m_i} y^2 dm_i & \int_{m_i} yz dm_i & \int_{m_i} y dm_i \\ \int_{m_i} xz dm_i & \int_{m_i} yz dm_i & \int_{m_i} z^2 dm_i & \int_{m_i} z dm_i \\ \int_{m_i} x dm_i & \int_{m_i} y dm_i & \int_{m_i} z dm_i & \int_{m_i} dm_i \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

Warto zaznaczyć odnośnie macierzy B_i , że na skutek użycia, wygodnej z punktu widzenia opisu zależności kinematycznych, notacji Hartenberga, osie współrzędnych układów własnych poszczególnych elementów z reguły nie są ani głównymi, ani centralnymi osiami bezwładności, co z reguły powoduje konieczność wyznaczenia dziesięciu różnych jej elementów [12].

Podobnie [8] można wyznaczyć energię potencjalną sił ciężkości N elementów łańcucha głównego jako:

$$V^G = - \sum_{i=1}^N m_i g^T W_i r_{sc}^i \quad (3.15)$$

gdzie:

- m_i - masa i -tego ogniwa,
 g - wektor przyspieszenia ziemskiego,
 $g = [g_x, g_y, g_z, 0]^T$,
 r_{sc}^i - wektor wodzący środka ciężkości elementu i we własnym układzie współrzędnych.

Funkcja Lagrange'a dla łańcucha głównego jest więc równa:

$$L^G = E_K^G - V^G = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^i \text{Tr} [\mathbf{U}_{ij} \mathbf{B}_i \mathbf{U}_{ik}^T] \dot{q}_j \dot{q}_k + \sum_{i=1}^N m_i g^T \mathbf{W}_i r_{sc}^i, \quad (3.16)$$

natomiast wykonanie na niej działań różniczkowania prowadzi do otrzymania wyrażenia:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L^G}{\partial \dot{q}_l} \right) - \frac{\partial L^G}{\partial q_l} = & \sum_{i=l}^N \sum_{j=1}^i \text{Tr} [\mathbf{U}_{ij} \mathbf{B}_i \mathbf{U}_{il}^T] \ddot{q}_j + \\ & + \sum_{i=l}^N \sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^i \text{Tr} [\mathbf{U}_{ijl} \mathbf{B}_i \mathbf{U}_{ik}^T] \dot{q}_j \dot{q}_k - \sum_{i=1}^N m_i g^T \mathbf{U}_{il} r_{sc}^i, \end{aligned} \quad (3.17)$$

gdzie:

$$\mathbf{U}_{ijl} = \frac{\partial \mathbf{W}_i}{\partial q_j \partial q_l} = \mathbf{T}_1 \mathbf{T}_2 \dots \mathbf{T}_{j-1} \boldsymbol{\Theta} \mathbf{T}_j \dots \mathbf{T}_{l-1} \boldsymbol{\Theta} \mathbf{T}_l \dots \mathbf{T}_{i-1} \mathbf{T}_i. \quad (3.18)$$

Po przegrupowaniu (3.17) otrzymuje się składowe równania Lagrange'a pochodzące od łańcucha głównego jako:

$$\sum_{j=1}^N A_{lj}^G \ddot{q}_j + C_l^G = M_l, \quad l = 1, \dots, N, \quad (3.19)$$

$$A_{lj}^G = \sum_{i=\max(l,j)}^N \text{Tr} [\mathbf{U}_{ij} \mathbf{B}_i \mathbf{U}_{il}^T], \quad (3.20)$$

$$C_l^G = \sum_{j=1}^N \sum_{i=j}^N b_l^{ji} \dot{q}_j \dot{q}_i - \sum_{i=l}^N m_i g^T \mathbf{U}_{il} r_{sc}^i, \quad (3.21)$$

$$b_l^{ji} = \delta_{ij} \sum_{k=\max(i,j,l)}^N \text{Tr} [\mathbf{U}_{kij} \mathbf{B}_k \mathbf{U}_{kl}^T], \quad (3.22)$$

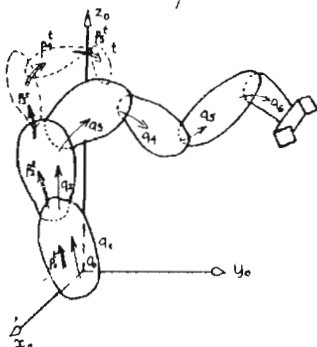
$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 2 & i \neq j \end{cases}. \quad (3.23)$$

Współczynnik δ_{ij} uwzględnia fakt, że $\mathbf{U}_{ijl} = \mathbf{U}_{ilj}$, sumowanie we wzorach (3.20) i (3.22) uwzględnia, że $\mathbf{U}_{nm}, \mathbf{U}_{nmp} = 0$ dla $m > n, p > n$. Te same macierze

U_{ijl} i U_{ij} są potrzebne w czasie generowania powyższych elementów wielokrotnie, dlatego można oszczędzić czas obliczeń poprzez najpierw obliczenie kompletu macierzy U_{ijl} i U_{ij} , następnie zapamiętanie ich w odpowiednich macierzach pięcio- i czterowymiarowych, by następnie określać je, w miarę potrzeby, przez odpowiednio zorganizowane instrukcje podstawienia. Pozwala to znacznie oszczędzić czas potrzebny na wykonywanie obliczeń przewidzianych wzorami (3.10) i (3.18).

3.5. Składowe równań Lagrange'a dla elementów towarzyszących głównemu łańcuchowi kinematycznemu

Aby móc precyzyjnie określić funkcję Lagrange'a elementu towarzyszącego należy określić w sposób ścisły jego energię kinetyczną i potencjalną. W tym celu wygodnie jest posłużyć się współzrzednymi doprowadzającymi.



Rys. 3. Łańcuch doprowadzający do t -tej części towarzyszącej

Współzrzednymi doprowadzającymi nazwano składowe wektorów:

$$p^t = [p_1^t, p_2^t, \dots, p_{r_t}^t]^T, \quad t = 1, \dots, T_c, \quad (3.24)$$

opisujących położenie części towarzyszącej o numerze t w sposób analogiczny, jak położenie i -tej części łańcucha głównego jest opisane przez ciąg współzrzednych uogólnionych q_1, q_2, \dots, q_i . Nazwa "współzrzedne doprowadzające" ma niejako ilustrować fakt, że współzrzedne wektora p^t określają położenie elementów towarzyszących t za pomocą budowania pomocniczych "łańcuchów doprowadzających" do poszczególnych elementów t . Analogiczne zastosowanie notacji Hartenberga pozwoli budować, w sposób opisany powyżej, macierze transformacji \tilde{T}_i ; i w związku z tym wykorzystywać opisane powyżej możliwości przeprowadzania większości operacji generowania równań przez komputer.

Współrzędne doprowadzające \mathbf{p}^t , zgodnie z założeniem, nie nakładają na współrzędne uogólnione \mathbf{q} żadnych dodatkowych więzów, są jedynie ich funkcjami, co można ogólnie zapisać jako:

$$(3.25) \mathbf{p}^t = \mathbf{F}_t(\mathbf{q}), \quad t = 1, \dots, T_c. \quad (3.25)$$

Wobec faktu, że pomocnicze łańcuchy doprowadzające mogą być różnej długości oraz z uwagi na to, że fragmentami pokrywają się one z łańcuchem głównym, zapisany ogólnie układ (3.25) ma w praktyce dość prostą budowę.

3.5.1. Sformułowanie funkcji Lagrange'a dla elementu towarzyszącego

Stosując analogiczną symbolikę, jak dla ogniów łańcucha głównego (dla różniczenia użyto wężykowania i indeksu t), energię kinetyczną t -tego elementu towarzyszącego można zapisać jako:

$$E_{Kt}^T = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{r_t} \sum_{k=1}^{r_t} \text{Tr} [\bar{\mathbf{U}}_{tj} \bar{\mathbf{B}}_t \bar{\mathbf{U}}_{tk}^T] \dot{p}_j^t \dot{p}_k^t, \quad (3.26)$$

gdzie r_t oznacza rozmiar r -tego łańcucha doprowadzającego, natomiast przykładowo:

$$\bar{\mathbf{U}}_{tj} = \bar{\mathbf{T}}_1^t \bar{\mathbf{T}}_2^t \dots \bar{\mathbf{T}}_{j-1}^t \boldsymbol{\Theta} \bar{\mathbf{T}}_j^t \dots \bar{\mathbf{T}}_{r_t-1}^t \bar{\mathbf{T}}_{r_t}^t. \quad (3.27)$$

Podobnie energię potencjalną t -tego elementu towarzyszącego można zapisać jako:

$$V_t^T = -\bar{m}_t \mathbf{g}^T \bar{\mathbf{W}}_t \bar{\mathbf{r}}_{sc}^t. \quad (3.28)$$

W związku z powyższym, funkcja Lagrange'a dla t -tego elementu towarzyszącego wyrazi się wzorem:

$$L_t^T = E_{Kt}^T - V_t^T = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{r_t} \sum_{k=1}^{r_t} \text{Tr} [\bar{\mathbf{U}}_{tj} \bar{\mathbf{B}}_t \bar{\mathbf{U}}_{tk}^T] \dot{p}_j^t \dot{p}_k^t + \bar{m}_t \mathbf{g}^T \bar{\mathbf{W}}_t \bar{\mathbf{r}}_{sc}^t. \quad (3.29)$$

3.5.2. Różniczkowanie funkcji Lagrange'a elementu towarzyszącego

Pewnym utrudnieniem w stosunku do obliczeń przeprowadzonych dla funkcji Lagrange'a dla łańcucha głównego jest fakt, że istnienie zależności funkcyjnej (3.25) wymaga traktowania L_t^T jako funkcji złożonej, jak następuje:

$$L_t^m = L_t^T(\mathbf{p}^t, \dot{\mathbf{p}}^t) = L_t^T(\mathbf{p}^t(\mathbf{q}), \dot{\mathbf{p}}^t(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})). \quad (3.30)$$

A. Różniczkowanie energii kinetycznej t -tego elementu towarzyszącego

Traktując E_{Kt}^T jako funkcję złożoną:

$$E_{Kt}^T = E_{Kt}^T(\mathbf{p}^t(\mathbf{q}), \dot{\mathbf{p}}^t(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})), \quad (3.31)$$

otrzymuje się:

$$\frac{\partial E_{Kt}^T}{\partial \dot{q}_l} = \sum_{i=1}^{r_t} \frac{\partial E_{Kt}^T}{\partial p_i^t} \frac{\partial p_i^t}{\partial \dot{q}_l} + \sum_{i=1}^{r_t} \frac{\partial E_{Kt}^T}{\partial \dot{p}_i^t} \frac{\partial \dot{p}_i^t}{\partial \dot{q}_l}. \quad (3.32)$$

Na podstawie (3.25) jest:

$$\frac{\partial p_i^t}{\partial \dot{q}_l} = 0. \quad (3.33)$$

Można także napisać, że:

$$\dot{p}_i^t = \sum_{j=1}^N \frac{\partial p_i^t}{\partial q_j} \dot{q}_j, \quad (3.34)$$

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_l} (\dot{p}_i^t) = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_l} \left(\sum_{j=1}^N \frac{\partial p_i^t}{\partial q_j} \dot{q}_j \right) = \frac{\partial p_i^t}{\partial q_l}. \quad (3.35)$$

Korzystając z powyższych zależności jest dalej:

$$\frac{\partial E_{Kt}^T}{\partial \dot{q}_l} = \sum_{i=1}^{r_t} \frac{\partial E_{Kt}^T}{\partial \dot{p}_i^t} \dot{p}_{i,l}^t, \quad \dot{p}_{i,l}^t = \frac{\partial p_i^t}{\partial q_l}. \quad (3.36)$$

Następnie jest:

$$\frac{\partial E_{Kt}^T}{\partial \dot{p}_i^t} = \sum_{j=1}^{r_t} \text{Tr} [\tilde{U}_{tj} \tilde{B}_t \tilde{U}_{ti}^T] \dot{p}_j^t, \quad (3.37)$$

a więc:

$$\frac{\partial E_{Kt}^T}{\partial \dot{q}_l} = \sum_{i=1}^{r_t} \sum_{j=1}^{r_t} \text{Tr} [\tilde{U}_{tj} \tilde{B}_t \tilde{U}_{ti}^T] \dot{p}_j^t \dot{p}_{i,l}^t. \quad (3.38)$$

Oznaczając:

$$R_{ij}^t = \text{Tr} [\tilde{U}_{tj} \tilde{B}_t \tilde{U}_{ti}^T], \quad (3.39)$$

można napisać:

$$\frac{\partial E_{Kt}^T}{\partial \dot{q}_l} = \sum_{i=1}^{r_t} \sum_{j=1}^{r_t} R_{ij}^t \dot{p}_j^t \dot{p}_{i,l}^t. \quad (3.40)$$

Można obliczyć teraz:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial E_{Kt}^T}{\partial \dot{q}_l} = \sum_{i=1}^{r_t} \sum_{j=1}^{r_t} \left(\dot{R}_{ij}^t \dot{p}_j^t \dot{p}_{i,l}^t + R_{ij}^t (\dot{p}_j^t \dot{p}_{i,l}^t) \right). \quad (3.41)$$

W wyrażeniu powyższym:

$$\dot{R}_{ij}^t = \sum_{k=1}^{r_t} \text{Tr} [\dot{U}_{tjk} \tilde{B}_t \tilde{U}_{ik}^T + \tilde{U}_{tj} \tilde{B}_t \dot{U}_{ik}^T], \quad (3.42)$$

$$\frac{d}{dt}(\dot{p}_j^t p_{i,l}^t) = \ddot{p}_j^t p_{i,l}^t + \dot{p}_j^t (\dot{p}_{i,l}^t), \quad (3.43)$$

$$\bar{U}_{tjk} = \frac{\partial \bar{U}_{tj}}{\partial p_k^t}. \quad (3.44)$$

Ostatecznie więc:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_{Kt}^T}{\partial \dot{q}_l} \right) &= \sum_{i=1}^{r_t} \sum_{j=1}^{r_t} \sum_{k=1}^{r_t} \text{Tr} [\bar{U}_{tjk} \bar{B}_t \bar{U}_{ti}^T] \dot{p}_j^t \dot{p}_k^t p_{i,l}^t + \\ &+ \sum_{i=1}^{r_t} \sum_{j=1}^{r_t} \text{Tr} [\bar{U}_{tj} \bar{B}_t \bar{U}_{ti}^T] \ddot{p}_j^t p_{i,l}^t + \sum_{i=1}^{r_t} \sum_{j=1}^{r_t} \sum_{k=1}^{r_t} \text{Tr} [\bar{U}_{tj} \bar{B}_t \bar{U}_{tik}^T] \dot{p}_j^t \dot{p}_k^t \dot{p}_{i,l}^t + \\ &+ \sum_{i=1}^{r_t} \sum_{j=1}^{r_t} \text{Tr} [\bar{U}_{tj} \bar{B}_t \bar{U}_{ti}^T] \dot{p}_j^t (\dot{p}_{i,l}^t). \end{aligned} \quad (3.45)$$

Teraz obliczyć można:

$$\frac{\partial E_{Kt}^T}{\partial q_l} = \sum_{i=1}^{r_t} \frac{\partial E_{Kt}^T}{\partial p_i^t} \frac{\partial p_i^t}{\partial q_l} + \sum_{i=1}^{r_t} \frac{\partial E_{Kt}^T}{\partial \dot{p}_i^t} \frac{\partial \dot{p}_i^t}{\partial q_l}. \quad (3.46)$$

Kolejno otrzymuje się:

$$\frac{\partial E_{Kt}^T}{\partial p_i^t} = \sum_{j=1}^{r_t} \sum_{k=1}^{r_t} \text{Tr} [\bar{U}_{tji} \bar{B}_t \bar{U}_{tk}^T] \dot{p}_j^t \dot{p}_k^t, \quad (3.47)$$

$$\frac{\partial E_{Kt}^T}{\partial \dot{p}_i^t} = \sum_{j=1}^{r_t} \text{Tr} [\bar{U}_{tj} \bar{B}_t \bar{U}_{ti}^T] \dot{p}_j^t. \quad (3.48)$$

A powracając do (3.46) otrzymuje się:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_{Kt}^T}{\partial q_l} &= \sum_{i=1}^{r_t} \sum_{j=1}^{r_t} \sum_{k=1}^{r_t} \text{Tr} [\bar{U}_{tji} \bar{B}_t \bar{U}_{tk}^T] \dot{p}_j^t \dot{p}_k^t p_{i,l}^t + \\ &+ \sum_{i=1}^{r_t} \sum_{j=1}^{r_t} \text{Tr} [\bar{U}_{tj} \bar{B}_t \bar{U}_{ti}^T] \dot{p}_j^t \dot{p}_{i,l}^t. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Ponieważ:

$$(p_{i,l}^t)' = \sum_{j=1}^N \frac{\partial^2 p_i^t}{\partial q_l \partial q_j} \dot{q}_j, \quad (3.50)$$

$$\frac{\partial \dot{p}_i^t}{\partial q_l} = \frac{\partial}{\partial q_l} \left(\sum_{j=1}^N \frac{\partial p_i^t}{\partial q_j} \dot{q}_j \right) = \sum_{j=1}^N \frac{\partial^2 p_i^t}{\partial q_l \partial q_j} \dot{q}_j, \quad (3.51)$$

więc:

$$\dot{p}_{i,l}^t = (p_{i,l}^t)'. \quad (3.52)$$

Spostrzegając równość dwóch ostatnich składników sumy we wzorach (3.45) i (3.49) otrzymuje się po analogicznej redukcji, jakiej dokonuje się w wyprowadzeniach dla łańcucha głównego [8]:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_{Kt}^T}{\partial \dot{q}_l} \right) - \frac{\partial E_{Kt}^T}{\partial q_l} = \sum_{i=1}^{r_t} \sum_{j=1}^{r_t} \sum_{k=1}^{r_t} R_{ijk}^t \dot{p}_k^t \dot{p}_j^t \dot{p}_{i,l}^t + \sum_{i=1}^{r_t} \sum_{j=1}^{r_t} R_{ij}^t \dot{p}_j^t \dot{p}_{i,l}^t, \quad (3.53)$$

gdzie:

$$R_{ijk}^t = \text{Tr} \left[\bar{U}_{tjk} \bar{B}_t \bar{U}_{ti}^T \right]. \quad (3.54)$$

B. Różniczkowanie energii potencjalnej t -tego elementu towarzyszącego

$$\frac{\partial}{\partial q_l} (V_t^T) = -\bar{m}_t g^T \sum_{j=1}^{r_t} \bar{U}_{tj} r_{sc}^t \dot{p}_{j,l}^t. \quad (3.55)$$

W związku z powyższym można zapisać wynik różniczkowania funkcji Lagrange'a dla t -tego elementu towarzyszącego jako:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_t^T}{\partial \dot{q}_l} \right) - \frac{\partial}{\partial q_l} (L_t^T) &= \sum_{i=1}^{r_t} \sum_{j=1}^{r_t} \sum_{k=1}^{r_t} R_{ijk}^t \dot{p}_k^t \dot{p}_j^t \dot{p}_{i,l}^t + \\ &+ \sum_{i=1}^{r_t} \sum_{j=1}^{r_t} R_{ij}^t \dot{p}_j^t \dot{p}_{i,l}^t - \bar{m}_t g^T \sum_{j=1}^{r_t} \bar{U}_{tj} r_{sc}^t \dot{p}_{j,l}^t. \end{aligned} \quad (3.56)$$

3.5.3. Sprowadzenie do postaci normalnej zróżniczkowanej funkcji Lagrange'a dla elementu towarzyszącego

Należy teraz przekształcić (3.56) do postaci:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_t^T}{\partial \dot{q}_l} \right) - \frac{\partial L_t^T}{\partial q_l} = \sum_{\alpha=1}^N \gamma_{l\alpha}^t(\mathbf{q}) \dot{q}_\alpha + \beta_l^t(\mathbf{p}, \dot{\mathbf{p}}). \quad (3.57)$$

Podstawiając do (3.56) zależności w postaci:

$$\dot{p}_j^t = \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\varphi=1}^N p_{j,\alpha\varphi}^t \dot{q}_\alpha \dot{q}_\varphi + \sum_{\alpha=1}^N p_{j,\alpha}^t \dot{q}_\alpha, \quad (3.58)$$

otrzymuje się po dokonaniu przekształceń:

$$\gamma_{l\alpha}^t = \sum_{i=1}^{r_t} \sum_{j=1}^{r_t} R_{ij}^t p_{j,\alpha}^t \dot{p}_{i,l}^t, \quad (3.59)$$

$$\beta_l^t = \beta_{1l}^t + \beta_{2l}^t, \quad (3.60)$$

$$\beta_{1l}^t = \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\varphi=1}^N \sum_{i=1}^{r_t} \sum_{j=1}^{r_t} R_{ij}^t p_{j,\alpha\varphi}^t \dot{q}_\alpha \dot{q}_\varphi, \quad (3.61)$$

$$\beta_{2l}^t = \sum_{i=1}^{r_t} \sum_{j=1}^{r_t} \sum_{k=1}^{r_t} R_{ijk}^t \dot{p}_k^t \dot{p}_j^t \dot{p}_{i,l}^t - \bar{m}_t g^T \sum_{j=1}^{r_t} \bar{U}_{tj} r_{sc}^t \dot{p}_{j,l}^t. \quad (3.62)$$

3.6. Metodyka uwzględnienia momentów uogólnionych od silników elektrycznych

Zgodnie z przyjętą umową, spośród T_c elementów towarzyszących pierwsze T_s to wirniki silników elektrycznych, pozostałe T_p to przykładowo nie zamocowane bezpośrednio na ogniwach głównych ich stojany, albo inne elementy. Przy takim oznaczeniu momenty napędowe silników działają na wariacjach r -ych współrzędnych doprowadzających $p_{r_i}^t$ poszczególnych wektorów p^t . Wobec tego praca uogólniona tych momentów może być określona jako:

$$\delta W = M_{s_1} \delta p_{r_1}^1 + M_{s_2} \delta p_{r_2}^2 + \dots + M_{s_{T_s}} \delta p_{r_{T_s}}^{T_s}, \quad (3.63)$$

przy czym:

$$\delta p_{r_i}^t = \sum_{j=1}^N \frac{\partial p_{r_i}^t}{\partial q_j} \delta q_j, \quad (3.64)$$

a więc:

$$\delta W = \sum_{i=1}^{T_s} M_{s_i} \sum_{j=1}^N \frac{\partial p_{r_i}^t}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_{j=1}^N \mu_j \delta q_j, \quad (3.65)$$

$$\mu_l = \sum_{i=1}^{T_s} M_{s_i} \frac{\partial p_{r_i}^t}{\partial q_l}. \quad (3.66)$$

i μ_l oznacza l -ty moment uogólniony.

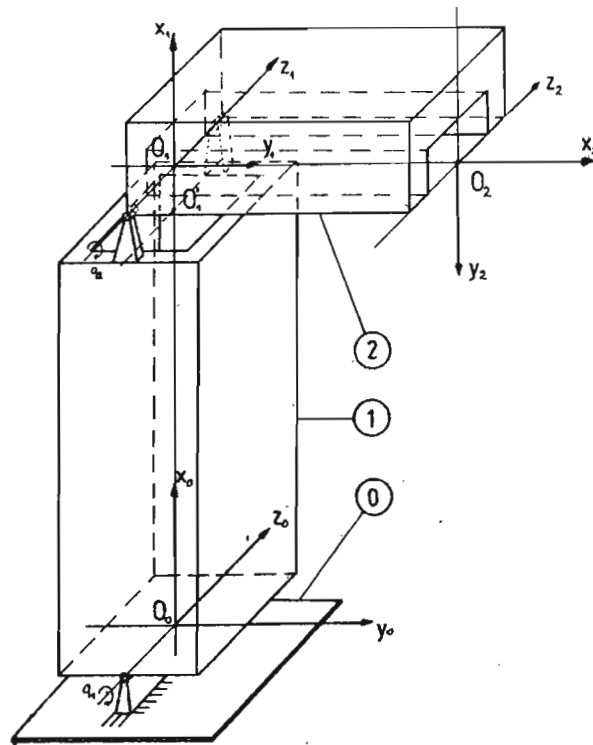
3.7. Równanie dynamiki układu mechanicznego

Macierzowe równanie dynamiki zapisać można w formie:

$$\mathbf{A}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{M}, \quad (3.67)$$

gdzie odpowiednie elementy macierzy i wektorów są równe:

$$\begin{aligned} A_{ij} &= A_{ij}^G + \sum_{t=1}^{T_c} \gamma_{ij}^t, \\ C_l &= C_l^G + \sum_{t=1}^{T_c} \beta_l^t, \quad l, j \in \{1 \dots N\}, \\ M_l &= \mu_l. \end{aligned} \quad (3.68)$$



Rys. 4. Schemat badanej konstrukcji

4. Przykład liczbowy

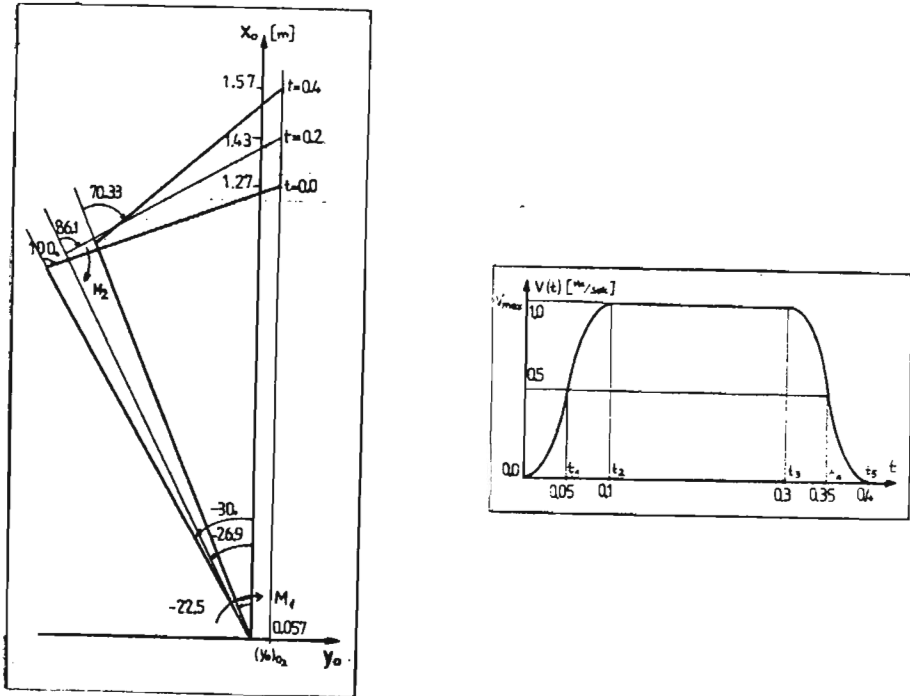
Jako ilustrację zastosowania numerycznego algorytmu generowania równań dynamiki rozwiązano następujące zadanie. Należy wyznaczyć przebieg wartości momentów napędzających M_1 i M_2 (rys.5a). Układ mechaniczny przyzrejestrowany na rys.4 tak, aby punkt O_2 realizował ruch programowy po torze $(y_0)_{O_2} = \text{const}$, z prędkością zadaną przez wykres na rys.5b.

Zadanie rozwiązano w ten sposób, że dla kolejnych chwil czasu t_i znajdowano komplety wartości q^i , \dot{q}^i , \ddot{q}^i przez całkowanie przekształconego, macierzowego układu równań programu mchu, a następnie korzystając z tych wartości obliczano M_1 i M_2 stosując generowaną numerycznie lewą stronę równania dynamiki (3.67) dla $N = 2$:

$$\begin{bmatrix} M_1^i \\ M_2^i \end{bmatrix} = A(q^i)\ddot{q}^i + C(q^i, \dot{q}^i). \quad (4.1)$$

A. Równanie dynamiki

Do generowania równania (3.67) niezbędne jest przygotowanie zestawu dwóch



Rys. 5. a - konfiguracja początkowa i końcowa konstrukcji, b - zadana zmiana prędkości punktu O_2

grup danych:

A.1. Parametry kinematyczne

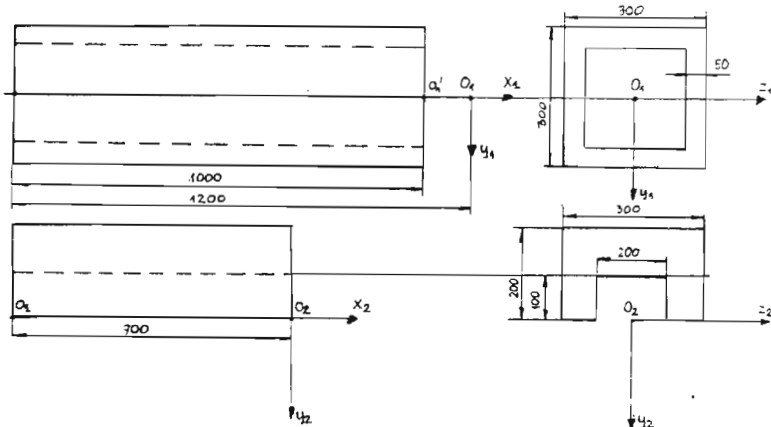
Na rys.4 przyjęto, że układy współrzędnych $O_i x_i y_i z_i$ są układami własnymi elementów o numerze i . Zgodnie z opisaną metodą ich dobierania otrzymano poniższe wartości parametrów Hartenberga:

- a) $(\Theta_1)_0 = 30^\circ$, $s_1 = 0.0$, $a_1 = O_0 O_1 = 1.2\text{m}$, $\alpha_1 = 0^\circ$, $(a_1 = l_1)$,
 b) $(\Theta_2)_0 = 30^\circ$, $s_2 = 0.0$, $a_2 = O_1 O_2 = 0.7\text{m}$, $\alpha_2 = 0^\circ$, $(a_2 = l_2)$.

A.2. Własności masowe

Dla elementów 1 i 2 zwymiarowanych jak na rys.6, przyjmując gęstość $7.86 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$, otrzymano:

$$B_1 = \begin{bmatrix} 225.32 & 0.0 & 0.0 & -275.1 \\ 0.0 & 4.2575 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 4.2575 & 0.0 \\ -275.1 & 0.0 & 0.0 & 393.0 \end{bmatrix},$$



Rys. 6. Schemat rozmieszczenia mas

$$B_2 = \begin{bmatrix} 35.9464 & 9.62850 & 0.0 & -77.028 \\ 9.6285 & 4.03480 & 0.0 & -27.51 \\ 0.0 & 0.0 & 2.1091 & 0.0 \\ -77.028 & -27.51 & 0.0 & 220.08 \end{bmatrix},$$

$$m_1 = B_1(4, 4) = 393.0[\text{kg}],$$

$$m_2 = B_2(4, 4) = 220.08[\text{kg}],$$

$$r_{sc}^1 = [-0.7, 0.0, 0.0, 1.0]^T [\text{m}],$$

$$r_{sc}^2 = [-0.35, -0.125, 0.0, 1.0]^T [\text{m}],$$

$$g = [-9.81, 0.0, 0.0, 0.0]^T [\text{m/s}^2].$$

B. Równania programu ruchu

Zgodnie z rysunkiem 5a można napisać następujące równania programu ruchu więzów nałożonych na ruch punktu O_2 :

B1) programowy więz geometryczny:

$$(y_0)_{O_2} - l_1 \sin(\theta_1) - l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) = 0, \quad (y_0)_{O_2} = \text{const},$$

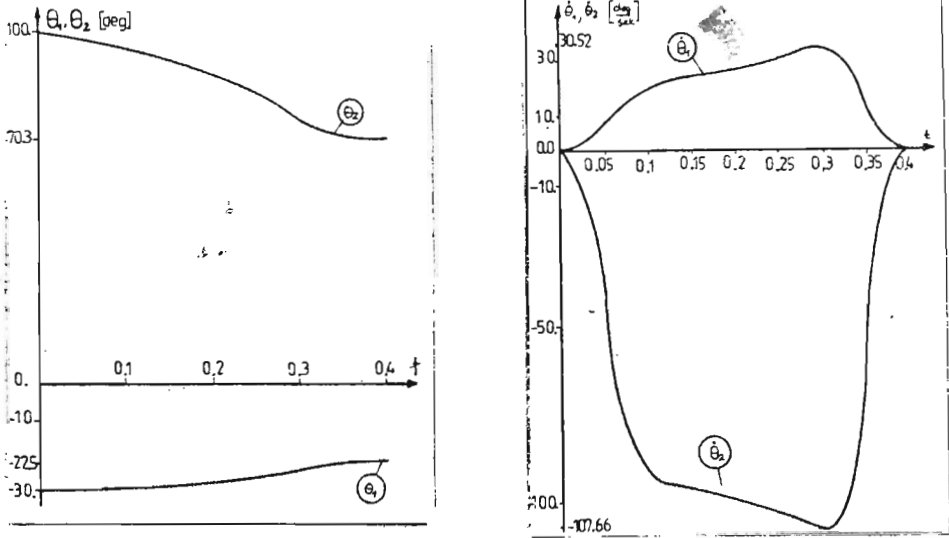
B2) programowy więz kinematyczny:

$$(\dot{x}_0)_{O_2} + l_1 \sin(\theta_1) \dot{\theta}_1 + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) = 0, \quad (\dot{x}_0)_{O_2} = v(t),$$

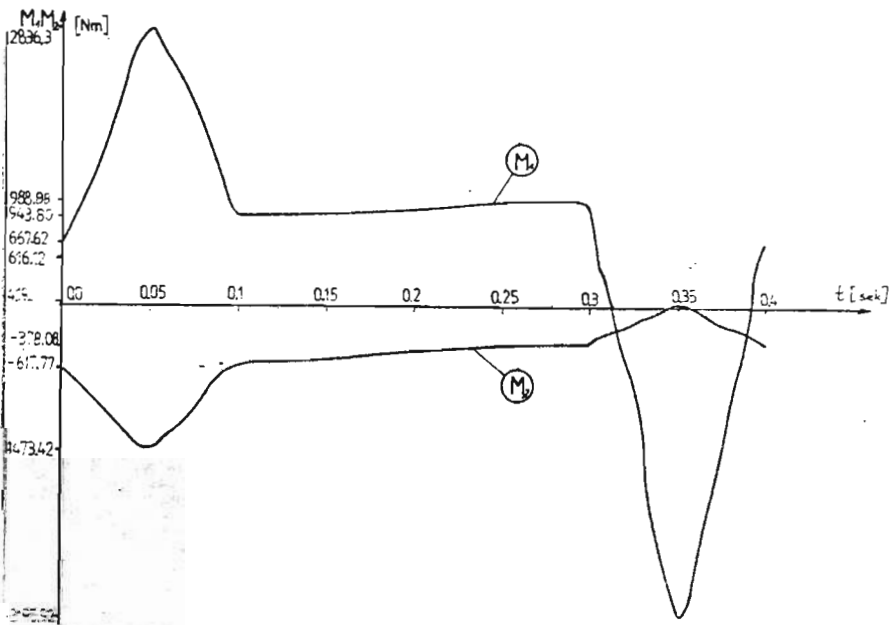
ponieważ $q = [\theta_1, \theta_2]^T$ jest dalej:

$$(a) \quad \dot{g}(q) = 0,$$

$$(b) \quad k(q, \dot{q}, t) = 0.$$



Rys. 7. Przebieg: a - θ_1, θ_2 , b - $\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2$



Rys. 8. Przebieg M_1 i M_2

Różniczkując równanie (a):

$$\begin{aligned}g_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= 0, \\k(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) &= 0.\end{aligned}$$

Układ ten można zapisać jako:

$$\mathbf{W}(\mathbf{q}) \cdot \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{R}(t), \quad (4.2)$$

gdzie:

$$\begin{aligned}\mathbf{W}(\mathbf{q}) &= \begin{bmatrix} -l_1 \sin(\theta_1) - l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) & -l_1 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ l_1 \cos(\theta_1) + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) & l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix}, \\ \mathbf{R}(t) &= \begin{bmatrix} V(t) \\ 0 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Ponieważ dalej potrzebne są $\ddot{\mathbf{q}}^i, \dot{\mathbf{q}}^i, \mathbf{q}^i$, różniczkując (4.2) otrzymuje się (dla $\det(\mathbf{W}) \neq 0.0$):

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{W}^{-1}(\mathbf{q}) \{ \dot{\mathbf{R}}(t) - \dot{\mathbf{W}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} \} \quad (4.3)$$

C. Wyniki obliczeń

Całkowano układ (4.3) z krokiem 0.0008 przy użyciu metody Rungego-Kutty 4 rzędu [19]. Wykorzystano kompilator *Turbo Pascal 4.0*.

Wyniki zilustrowano:

- 1) przebieg \mathbf{q} i $\dot{\mathbf{q}}$ na rys. 7a,b,
- 2) przebieg M_1 i M_2 na rys.8,
- 3) konfiguracja początkowa, końcowa i dla $t = 0.5t_{\text{całkow}}$ są przedstawione na rys.5a.

Opis do rysunku 5b – prędkość zadano następująco:

$$\begin{aligned}t_0, t_1 : & v(t) = at^2; \\ t_1, t_2 : & v(t) = -a(t - t_2)^2 + v_{\max}; \\ t_2, t_3 : & v(t) = v_{\max}; \\ t_3, t_4 : & v(t) = -a(t - t_3)^2 + v_{\max}; \\ t_4, t_5 : & v(t) = a(t - t_5)^2; \\ t > t_5 : & v(t) = 0, \quad a = 200.0.\end{aligned}$$

Literatura

1. ARISTOVA M.V., IGNATIEV M.B., PROKHOROV V.M., *Algorithmic system for robot's motion simulation*, RoManSy 1976, str. 124-133

2. BEJCZY A.K., SUKHAN LEE, *Robot arm model reduction for Control*, Proceedings of 22nd IEEE Conference on Decision and Control, San Antonio 1983, str. 19-29
3. BEJCZY A.K., TARN T.J., CHEN Y.L., *Robot arm dynamic control by computer*, 1985 IEEE International Conference on Robotics and Automation, St. Louis, str. 126-136
4. DENAVIT J., HARTENBERG R.S., *A kinematic notation for lower pair mechanism based on matrices*, Trans. of the ASME, J. Appl. Mech., 1955, str. 215-222
5. GORLA B., *Influence of the control on the structure of a manipulator from a kinematic point of view*, RoManSy 1981, str. 30-46
6. GOSEWSKI A., KURMAN K.J., MALINOWSKI K., *Budowa modelu matematycznego robotów IRb, wstępne zbadanie własności dynamicznych, założenia do projektu regulatora ruchu*, Etap I tematu PR-01.03.04, Problemu węzłowego 06.6: Roboty i Manipulatory przemysłowe, PW, Warszawa 1984
7. KNAPCZYK J., MORECKI A., HIPPI R., *Analiza dokładności pozycjonowania i orientacji manipulatorów z sześcioma parami obrotowymi*, I Krajowa konferencja robotyki, Wrocław, zbiór referatów, tom 2, str. 31-40, wyd. Pol. Wrocławskiej, Wrocław 1985
8. KOZLOV W.W., MAKARYCZEV W.P., TIMOFIEJEV A.W., JUREVICZ E.U., *Dynamika uprzedzenia robotami*, Nauka 1984
9. LIEGOIS A., *Performance and Computer-aided Design*, Robot Technology, v.7, Kogan Page, London
10. LIEGOIS A., KHALIL W., DUMAS J.M., RENAUD M., *Mathematical and computer models of interconnected mechanical systems*, RoManSy 1976, str. 5-17
11. MAŁECKI J., *Analiza algorytmu numerycznego dla prostego zagadnienia kinematyki robotów przemysłowych o twardych łańcuchach kinematycznych*, Biuletyn Przemysłowego Instytutu Automatyki i Pomiarów MERA-PIAP, 2/121 1987, str. 41-56
12. MAŁECKI J., *On some practical aspects of numerical generation of equations of the dynamics of the manufacturing robots*, Proceedings of the International Conference on Industrial Robots ROBCON 4, Sofia 1987, v.1, str. 227-235
13. MARYNIAK J., *Dynamiczna Teoria Obiektów Ruchomych*, Prace Naukowe PW, Mechanika Nr 32
14. MIEDWIEDIEW W.S., LESKOW A.G., JUSZCZENKO A.S., *Sistemy uprzedzenia manipulacyjnych robotów*, Nauka 1978
15. PARS L.A., *A Treatise on Analytical Dynamics*, Heinemann, London, tłum. ros. Nauka 1971
16. PAUL R.P., *Robot Manipulators: Mathematics, Programming and Control*, MIT Press, Cambridge 1981
17. PIETROW B.A., *Manipulatory*, Leningrad, Maszynostrojenie, 1984
18. POPOW E.P., WIERESZCZAGIN A.F., ZIENKIEWICZ C.L., *Manipulacyjne roboty, dynamika i algorytmy*, Nauka, 1978
19. PRESS W.H., FLANNERY B.P., TEUKOLSKY S.A., VETTERLING W.T., *Numerical Recipes, The Art of Scientific Computing*, Cambridge University Press 1986
20. RZYMKOWSKI C., *Automatyczne modelowanie pewnej klasy manipulatorów*, I Krajowa Konferencja Robotyki, Wrocław, zbiór referatów, tom 2, str. 95-102, 1985

21. RZYMKOWSKI C., *Wspomagane komputerowo modelowanie otwartych łańcuchów kinematycznych o sztywnych członach z napędami pneumatycznymi i hydraulicznymi*, Rozprawa Doktorska, PW 1987
22. TIMOFIEJEW A.W., *Uprawienie robotami*, Leningrad, Izdatielstwo Leningradskowo Uniwersiteta 1986
23. TIMOFIEJEW A.W., MALYSZEW W.A., *Dynamika manipulatorow i adaptiwoje uprawienie*, Awtomatika i Telemekhanika, 8, Nauka, Moskwa 1981, str. 90-98
24. OŁĘDZKI A., *Podstawy Teorii Maszyn i Mechanizmów*, WNT, Warszawa 1987
25. HOLLERBACH J.M., *Dynamic Scalling of Manipulator Trajectories*. Trans. ASME, J. of Dynamic Systems, Measurement and Control v. 106, 1984, pp.102-106

Summary

The paper outlines the way of numerical generation of equations of dynamics for a certain class of mechanical systems. The advantages of the Denavit-Hartenberg kinematic notation and homogenous coordinates worked out in robotics are utilized. The outlined algorithm deals with the mechanical systems in the form of simple kinematic chains of rigid links and allows us to consider different elements that don't form any constraints on the generalized coordinates of a principal kinematic chain. The algorithm is applicable to any system that can be presented in the form of such a kinematic chain, not only for robots and manipulators.

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 28 października 1987 roku