

MODELOWANIE MATEMATYCZNE FIGUR AKROBACJI LOTNICZEJ JAKO PROGRAMOWEGO LOTU SAMOLOTU

WOJCIECH BLAJER

JAN PARCZEWSKI

Wyższa Szkoła Inżynierska, Radom

W pracy przedstawiono matematyczny model przestrzennego ruchu samolotu realizującego założony program lotu. Dwa niezależne warunki tego programu wyrażają pozostawanie środka masy samolotu na założonej trajektorii, trzeci warunek nakładany jest na zmiany orientacji katowej płatowca. Uwzględniono też możliwość nakładania dodatkowego warunku na zmiany prędkości lotu. Proponowany model umożliwi symulację figur akrobacji lotniczej oraz innych manewrów przestrzennych samolotu. Na wyjściu uzyskiwane są przebiegi czasowe parametrów stanu analizowanego ruchu programowego oraz przebiegi zmian parametrów sterowania samolotem wymaganych dla realizacji programu lotu.

1. Wstęp

Pod pojęciem programu ruchu (więzów programowych [5,8,14]) rozumie się sformułowane analitycznie wymagania nakładane na ruch układu sterowanego. Ruch zgodny z tym programem nazywany jest ruchem programowym, a sterowanie układem wymagane dla realizacji programu ruchu – sterowaniem programowym. W swej istocie, analiza ruchu programowego jest syntezą ruchu układu sterowanego. Wyznaczane są bowiem zarówno przebiegi czasowe zmian parametrów stanu układu, które z założenia spełniają warunki postulowanych więzów programowych, jak i przebiegi zmian parametrów sterowania wymagane dla realizacji tego ruchu.

W pracy [2] zaprezentowano pewną ogólną metodykę analizy programowego ruchu samolotu, a w szczególności wyznaczania sterowania programowego. Wyjściowe równania ruchu programowego sformułowano w formie równań różniczkowo – algebraicznych, na które składały się dynamiczne równania ruchu samolotu sterowanego, różniczkowe równania związków kinematycznych oraz algebraiczne równania więzów programowych, a wektor zmiennych stanu układu rozszerzono o parametry sterowania. Rozwiązanie zagadnienia oparto na znanym w teorii równań różniczkowo – algebraicznych podejściu polegającym na kolejnym różniczkowaniu

równań algebraicznych celem przekształcenia układu do postaci układu równań różniczkowych zwyczajnych [4,6]. Podejście takie, choć poprawne z punktu widzenia teoretycznego, w zastosowaniach praktycznych okazuje się często nieefektywne i prowadzi do dużego skomplikowania finalnych równań ruchu programowego. Jak pokazano w pracach [1,3], już dla prostego przypadku analizy programowego ruchu samolotu w pętli pionowej, opisany algorytm analizy okazał się praktycznie nie do przyjęcia. Zagadnienie rozwiązano przy użyciu metody zmodyfikowanej, uogólnienie której jest istotą modelu matematycznego prezentowanego w niniejszej pracy.

Celem pracy jest budowa modelu matematycznego umożliwiającego efektywną symulację numeryczną programowej realizacji figur akrobacji lotniczej i innych manewrów przestrzennych samolotu dających się zamodelować za pomocą założonej trajektorii lotu (dwa warunki więzów programowych), warunku nakładanego na zmiany orientacji katowej płatowca w przestrzeni oraz warunku nakładanego na przebieg zmian prędkości lotu. Samolot traktowano jako sztywny obiekt latający sterowany za pomocą zmian wychyleń powierzchni sterowych (lotki, ster wysokości i ster kierunku) i zmian wartości siły ciągu. Zakładano, że zmiany wychyleń powierzchni sterowych mają parametryczny wpływ tylko na wartości momentów aerodynamicznych, a sterowanie siłą ciągu "uruchamiane" jest tylko wówczas, gdy realizowany jest warunek więzów programowych nakładany na prędkość lotu.

Podstawową cechą zbudowanego modelu, różniącym go zasadniczo od modelu zawartego w [2], jest oddzielenie zagadnienia analizy ruchu programowego i zagadnienia wyznaczania sterowania programowego. Zastosowane podejście jest równoważne opisanej w [9] technice redukcji ilości równań ruchu dla układów z więzami (eliminuje się tym samym jawną zależność równań ruchu układu skrupowanego od reakcji więzów). W modelu prezentowanym w pracy, redukowane równania dynamiczne są zachowywane i służą do wyznaczania wymaganego sterowania programowego. W efekcie, problem wyznaczania sterowania programowego staje się zagadnieniem wtórnym, wynikającym z rozwiązań równań ruchu programowego. Wszystkie te elementy wpływają istotnie na uproszczenie sformułowania matematycznego modelu i ewentualnej analizy numerycznej zagadnienia.

Specyfika rozwiązywanego zagadnienia i zwięzłość zapisu matematycznego wymagały użycia notacji, która wykracza częściowo poza oznaczenia stosowane w mechanice lotu, używana jest natomiast powszechnie w dynamice ciał sztywnych. Tę część notacji przyjęto za pracą [15]. Niekonwencjonalnie sformułowano też wyjściowe dynamiczne równania ruchu samolotu. Równania translacyjne ruchu środka masy zapisano w układzie aerodynamicznym, natomiast równania ruchów obrotowych wokół środka masy – w układzie własnym. W mechanice lotu, najczęściej, oba typy równań formułuje się w jednym (własnym) układzie odniesienia [11,12].

2. Stosowane układy odniesienia

W pracy wykorzystuje się następujące układy odniesienia:

- (i) – inercjalny $0_1x_1y_1z_1$ związany z ziemią o osi 0_1z_1 skierowanej zgodnie z kierunkiem i zwrotem przyspieszenia ziemskiego,
- (g) – grawitacyjny $0x_gy_gz_g$ związany z poruszającym się samolotem i stale równoległy do układu inercjalnego,
- (s) – samolotowy (własny) $0xyz$ związany sztywno z samolotem,
- (a) – aerodynamiczny (prędkościowy) $0x_a y_a z_a$ związany z przepływem ośrodka omywającego samolot, oś $0x_a$ posiada kierunek prędkości opływu i zwrot do niej przeciwny.

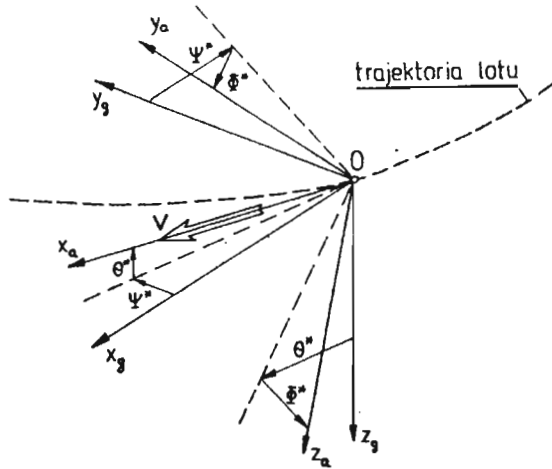
Wszystkie układy są układami prawoskrętnymi. Założono dodatkowo, że układy grawitacyjny, własny i aerodynamiczny są centralne, a $0xz$ jest płaszczyzną symetrii płatowca.

Osie układu aerodynamicznego są z założenia styczne (oś $0x_a$) i ortogonalne (osie $0y_a$ i $0z_a$) do postulowanej trajektorii lotu, a więc zorientowane w sposób szczególny, wynikający z warunków nakładanych przez więzy toru lotu. Jak zostanie pokazane w dalszej części pracy, sformułowanie dynamicznych równań ruchów translacyjnych samolotu wyrażonych w tym układzie pozwoliło na znaczne uproszczenie finalnego modelu matematycznego dla analizy ruchu programowego. Podejście takie wymagało jednak aparatu matematycznego umożliwiającego operowanie w różnych układach odniesienia. Dotyczy to też zdefiniowania macierzy transformacji i niezbędnych związków kinematycznych wzajemnie pomiędzy układami grawitacyjnymi, własnym i aerodynamicznym (w klasycznych zadaniach dynamiki lotu dotyczy to tylko układów grawitacyjnego i własnego [11,12]). Mając na celu przejrzystość i zwięzłość zapisu matematycznego, notację przekształceń pomiędzy układami odniesienia wzorowano na pracy [15], starając się w miarę możliwości zachować specyfikę oznaczeń stosowanych w mechanice lotu.

Do opisu położenia układu aerodynamicznego względem grawitacyjnego przyjęto trzy kąty quasi-Eulerowskie [10] (odwrotne kąty Bryanta lub Kardana [15]), które poprzez analogię z kątami samolotowymi [10,11,12] oznaczono Φ^* , Θ^* , Ψ^* (patrz rys.1). Macierz transformacji pomiędzy układami aerodynamicznym i grawitacyjnym ma więc postać:

$$A_{ag} = A_{ga}^T = A^{-1} =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \Theta^* \cos \Psi^* & \cos \Theta^* \sin \Psi^* & -\sin \Theta^* \\ -\cos \Phi^* \sin \Psi^* + \\ + \sin \Phi^* \sin \Theta^* \cos \Psi^* & \cos \Phi^* \cos \Psi^* + \\ + \sin \Phi^* \sin \Theta^* \sin \Psi^* & \sin \Phi^* \cos \Theta^* \\ \sin \Phi^* \sin \Psi^* + \\ + \cos \Phi^* \sin \Theta^* \cos \Psi^* & -\sin \Phi^* \cos \Psi^* + \\ + \cos \Phi^* \sin \Theta^* \sin \Psi^* & \cos \Phi^* \sin \Theta^* \end{bmatrix}, \quad (2.1)$$



Rys. 1. Orientacja kątowa układów aerodynamicznego i grawitacyjnego

gdzie indeksy górne oznaczają odpowiednio: "T" – transpozycję oraz "-1" – odwrotność macierzy, natomiast indeksy dolne odnoszą się do symboli odpowiednich układów odniesienia.

Składowe bezwzględnej prędkości kątowej układu aerodynamicznego (względem układu inercyjnego lub grawitacyjnego) wyrażone w osiach tego układu, $\Omega_a^{(a)} = \Omega_{a/g}^{(a)} = [P^*, Q^*, R^*]^T$, zapisać można jako:

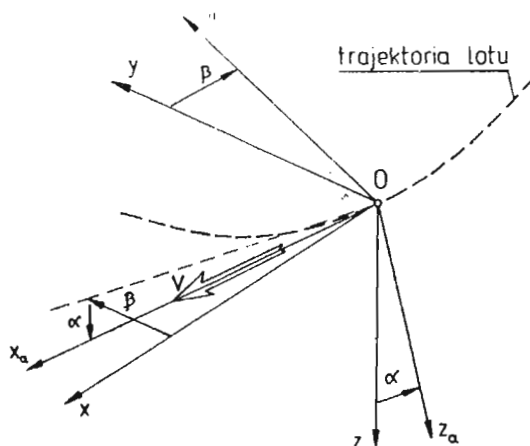
$$\Omega_a^{(a)} = \begin{bmatrix} P^* \\ Q^* \\ R^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin \theta^* \\ 0 & \cos \phi^* & \cos \theta^* \sin \phi^* \\ 0 & -\sin \phi^* & \cos \theta^* \cos \phi^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi}^* \\ \dot{\theta}^* \\ \dot{\psi}^* \end{bmatrix} = \mathbf{A}_{\Omega a} \begin{bmatrix} \dot{\phi}^* \\ \dot{\theta}^* \\ \dot{\psi}^* \end{bmatrix}. \quad (2.2)$$

Łatwo zauważyć, że wzory (2.1) i (2.2) odpowiadają, po pominięciu indeksu *, wzorom na macierz transformacji pomiędzy układami własnym i grawitacyjnym oraz zależności na składowe prędkości kątowej samolotu wyrażone w układzie własnym jako funkcje kątów samolotowych ϕ , θ i ψ oraz ich pochodnych [11,12], czyli:

$$\mathbf{A}_{a,g}(\phi, \theta, \psi) = \mathbf{A}_{a,g}(\phi^* = \phi, \theta^* = \theta, \psi^* = \psi), \quad (2.3)$$

$$\Omega_s^{(s)} = \begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix} = \mathbf{A}_{\Omega s}(\phi, \theta) \cdot \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \mathbf{A}_{\Omega a}(\phi^* = \phi, \theta^* = \theta) \cdot \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}. \quad (2.4)$$

Tradycyjnie, orientacja kątowa układów aerodynamicznego i własnego określana jest za pomocą kątów natarcia α i ślizgu β (rys.2). Odpowiednia macierz



Rys. 2. Orientacja katowa układów własnego i aerodynamicznego

transformacji pomiędzy układami ma postać:

$$\mathbf{A}_{as} = \mathbf{A}_{sa}^{-1} = \mathbf{A}_{sa}^T = \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \beta & \cos \alpha \sin \beta & \sin \alpha \\ -\sin \beta & \cos \beta & 0 \\ -\sin \alpha \cos \beta & -\sin \alpha \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix}, \quad (2.5)$$

natomiast prędkość katowa układu aerodynamicznego względem własnego, wyrażona w osiach układu aerodynamicznego, może być zapisana jako:

$$\boldsymbol{\Omega}_{a/s}^{(a)} = -\boldsymbol{\Omega}_{s/a}^{(a)} = \begin{bmatrix} 0 & \sin \alpha \\ -1 & 0 \\ 0 & \cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \end{bmatrix} = \mathbf{A}_{\Omega a/s} \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \end{bmatrix}. \quad (2.6)$$

Wzory (2.2), (2.4) i (2.6) pozwalają na sformułowanie zależności, która wykorzystana będzie w dalszej części pracy. Mianowicie:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Omega}_s^{(s)} = \begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix} &= \mathbf{A}_{sa}(\boldsymbol{\Omega}_a^{(a)} + \boldsymbol{\Omega}_{s/a}^{(a)}) = \\ &= \mathbf{A}_{sa}(\mathbf{A}_{\Omega a}(\Phi^*, \Theta^*) \begin{bmatrix} \dot{\Phi}^* \\ \dot{\Theta}^* \\ \dot{\Psi}^* \end{bmatrix} - \mathbf{A}_{\Omega a/s}(\alpha) \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \end{bmatrix}), \end{aligned} \quad (2.7)$$

co jest macierzową reprezentacją w osiach układu własnego wzoru wektorowego $\vec{\Omega}_s = \vec{\Omega}_a + \vec{\Omega}_{s/a}$. Podobnie, znając aktualne wartości kątów α , β , Φ^* , Θ^* i Ψ^* ,

możliwe jest określenie aktualnych wartości kątów samolotowych Φ , Θ i Ψ na podstawie zależności macierzowej:

$$\mathbf{A}_{sg}(\Phi, \Theta, \Psi) = \mathbf{A}_{sa}(\alpha, \beta) \mathbf{A}_{ag}(\Phi^*, \Theta^*, \Psi^*). \quad (2.8)$$

3. Wyjściowe równania ruchu samolotu sterowanego

Na dynamiczne równania ruchu sterowanego samolotu, traktowanego jako bryła sztywna, składają się 3 równania skalarne ruchu środka masy oraz 3 równania skalarne ruchów obrotowych względem tego punktu. Jak wspomniano we wstępie, ze względu na uproszczenia w zapisie matematycznym finalnego modelu proponowanego w pracy, równania ruchów translacyjnych sformulowano w układzie aerodynamicznym, natomiast równania ruchów obrotowych w układzie własnym. Jest to poprawne z formalnego punktu widzenia [13], a stosując symbolikę pracy [15] równania te będą miały następującą macierzową postać:

$$m\dot{\mathbf{V}}^{(a)} + m\tilde{\Omega}_a^{(a)}\mathbf{V}^{(a)} = \mathbf{F}^{(a)}, \quad (3.1)$$

$$\mathbf{J}\dot{\Omega}_s^{(s)} + \tilde{\Omega}_s^{(s)}\mathbf{J}\Omega_s^{(s)} = \mathbf{M}^{(s)}, \quad (3.2)$$

gdzie: m – masa samolotu, $\mathbf{V}^{(a)} = V[1, 0, 0]^T$ – reprezentacja macierzowa składowych prędkości liniowej wyrażonych w układzie aerodynamicznym, V – moduł prędkości liniowej, $\Omega_a^{(a)}$ i $\Omega_s^{(s)}$ zdefiniowane są poprzez (2.2) i (2.4), \mathbf{J} – macierz momentów bezwładności samolotu w układzie własnym, czyli:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} J_x & 0 & -J_{xz} \\ 0 & J_y & 0 \\ -J_{xz} & 0 & J_z \end{bmatrix}. \quad (3.3)$$

Symbol " - " występujący we wzorach (3.1) i (3.2) oznacza skośnieszymetryczną macierz (operator mnożenia wektorowego) [10,15]. Definicję operatora zawarto w dodatku 1. Przykładowo dla $\Omega_s^{(s)} = [P, Q, R]^T$, $\tilde{\Omega}_s^{(s)}$ wynosi (porównaj [12]):

$$\tilde{\Omega}_s^{(s)} = \begin{bmatrix} 0 & -R & Q \\ R & 0 & -P \\ -Q & P & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.4)$$

Składowe sił zewnętrznych $\mathbf{F}^{(a)}$ i momentów zewnętrznych $\mathbf{M}^{(s)}$, wyrażone odpowiednio w układach aerodynamicznym i własnym, zapisano jako:

$$\mathbf{F}^{(a)} = \frac{1}{2}\rho SV^2 \begin{bmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{bmatrix} + T \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \beta \\ -\sin \beta \\ -\sin \alpha \cos \beta \end{bmatrix} + mg \begin{bmatrix} -\sin \Theta^* \\ \sin \Phi^* \cos \Theta^* \\ \cos \Phi^* \cos \Theta^* \end{bmatrix}, \quad (3.5)$$

$$\mathbf{M}^{(s)} = \frac{1}{2} \rho S V^2 A_{sa} \begin{bmatrix} b & c_l \\ c_a & c_m \\ b & c_n \end{bmatrix}, \quad (3.6)$$

gdzie: $\mathbf{c}_F^{(a)} = [c_x, c_y, c_z]^T$ oraz $\mathbf{c}_M^{(a)} = [c_l, c_m, c_n]^T$ – współczynniki sił i momentów aerodynamicznych mierzone w układzie aerodynamicznym, ρ – gęstość powietrza, S – powierzchnia nośna, t – siła ciągu silnika (zakłada się, że działa wzdłuż osi Ox układu własnego), g – przyspieszenie ziemskie, c_a – średnia cięciwa aerodynamiczna płata, b – rozpiętość płata.

W pracy postulowano, że sterowanie zamodelowanym samolotem realizowane będzie poprzez zmiany wychyleń powierzchni sterowych $\delta = [\delta_L, \delta_H, \delta_V]^T$ (odpowiednio lotek, steru wysokości i steru kierunku) oraz zmiany wartości siły ciągu T . Przyjęty model aerodynamiczny zakładał przy tym, że wychylenia sterów wpływają tylko na zmiany momentów aerodynamicznych. Dla celów poniższego modelu przyjęto:

$$\begin{aligned} a) \quad c_l &= c_{l0}(\alpha, \beta, P, R) + c_{l1}(\alpha, \beta, P, R) \delta_L, \\ b) \quad c_m &= c_{m0}(\alpha, \beta, Q) + c_{m1}(\alpha, \beta, Q) \delta_H, \\ c) \quad c_n &= c_{n0}(\alpha, \beta, P, R) + c_{n1}(\alpha, \beta, P, R) \delta_V, \end{aligned} \quad (3.7)$$

co pozwala na przekształcenie wzoru (3.6) do następującej ogólnej postaci:

$$\mathbf{M}^{(s)} = \mathbf{M}_0^{(s)}(\alpha, \beta, \Omega_s^{(s)}) + \mathbf{M}_1^{(s)}(\alpha, \beta, \Omega_s^{(s)}) \delta. \quad (3.8)$$

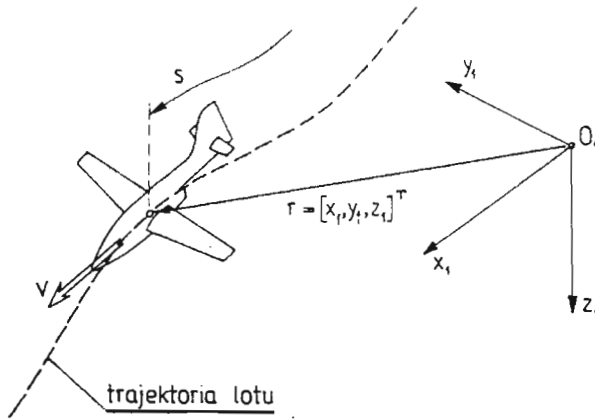
W prezentowanym ujęciu, równanie (3.8), odpowiadające trzem równaniom skalarnym, służyć będzie do wyznaczania aktualnych parametrów sterowania samolotem $\delta = [\delta_L, \delta_H, \delta_V]^T$ zapewniających realizację postulowanego programu lotu. Łatwo pokazać, że zaproponowany liniowy model sterowania wychyleniami sterów (patrz równania (3.7)) daje w konsekwencji, że macierz $\mathbf{M}_1^{(s)}$ jest odwracalna. Uprości to tę część modelu matematycznego, która dotyczy wyznaczania sterowania programowego.

4. Równania więzów programowych

4.1. Więzy położenia środka masy samolotu

Równanie postulowanej przestrzennej trajektorii lotu sformulowano w układzie inercjalnym za pomocą układu równań parametrycznych o postaci (patrz rys.3) [10]:

$$\mathbf{r}(s) = [x_1(s), y_1(s), z_1(s)]^T, \quad (4.1)$$



Rys. 3. Programowy lot samolotu wzdłuż założonej trajektorii przestrzennej

gdzie: r – promień wodzący środka masy samolotu w układzie inercyjnym, s – parametr naturalny krzywej (współrzędna łukowa).

Parametryczne przedstawienie krzywej (4.1) jest równoważne [10] zdefiniowaniu krzywej za pomocą układu dwóch równań: $f_1(x_1, y_1, z_1) = 0$ i $f_2(x_1, y_1, z_1) = 0$. Tym samym, ponieważ krzywa ta opisuje równanie postulowanej trajektorii lotu, równanie (4.1) równoważne jest dwóm warunkom geometrycznych więzów programowych. Warunki te nakładają ograniczenia na położenia, a ich różniczkowe formy również na prędkości i przyspieszenia środka masy samolotu. Mianowicie:

$$\dot{r} = \mathbf{V}^{(i)} = r' \dot{s} = \begin{bmatrix} x'_1 \\ y'_1 \\ z'_1 \end{bmatrix} V, \quad (4.2)$$

gdzie indeks " ' " oznacza różniczkowanie po s .

Z drugiej strony, macierzową reprezentację wektora prędkości liniowej w układzie inercyjnym można zapisać jako:

$$\mathbf{V}^{(i)} = \mathbf{V}^{(g)} = \mathbf{A}_{ga} \mathbf{V}^{(a)} = \mathbf{A}_{ga} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} V. \quad (4.3)$$

Z porównania (4.2) i (4.3) wynika, że wektor r' równoważny jest pierwszej kolumnie macierzy transformacji \mathbf{A}_{ga} , co po uwzględnieniu (2.1) daje:

$$\begin{bmatrix} \cos \Theta^* \cos \Psi^* \\ \cos \Theta^* \sin \Psi^* \\ -\sin \Theta^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x'_1 \\ y'_1 \\ z'_1 \end{bmatrix}. \quad (4.4)$$

Równanie powyższe wyraża sobą geometryczny warunek styczności wektora prędkości liniowej do postulowanej trajektorii lotu. Stanowić ono będzie podstawę do wyznaczania wymaganych wartości kątów Θ^* i Ψ^* , określających jednoznacznie orientację wektora \vec{V} w układzie inercjalnym (patrz rys.1). W finalnych równaniach ruchu programowego, zależność (4.4) zastąpi drugie i trzecie równanie skalarne z (3.1), które to dwa równania są (czytelnik może to łatwo sprawdzić) liniowymi równaniami różniczkowymi pierwszego rzędu ze względu na Θ^* i Ψ^* .

Wykorzystajmy teraz warunki nakładane przez więzy (4.1) na przyspieszenia środka masy samolotu. Kolejne zróżniczkowanie więzów w postaci (4.2) i porównanie wyniku ze zróżniczkowaną postacią zależności (4.3) doprowadzi do wyniku:

$$(\mathbf{A}_{ga})^* \mathbf{V}^{(a)} = r'' V^2 = \begin{bmatrix} x_1'' \\ y_1'' \\ z_1'' \end{bmatrix} V^2. \tag{4.5}$$

Wykorzystując, że pochodna macierzy transformacji \mathbf{A}_{ga} [10,15] (patrz również dodatek 2) może być przedstawiona jako $(\mathbf{A}_{ga})^* = \mathbf{A}_{ga} \tilde{\Omega}_a^{(a)}$, równanie (4.5), po przemnożeniu przez $\mathbf{A}_{ag} = \mathbf{A}_{ga}^{-1}$, sprowadza się do postaci:

$$\tilde{\Omega}_a^{(a)} \mathbf{V}^{(a)} = \mathbf{A}_{ag} r'' V^2. \tag{4.6}$$

Łatwo sprawdzić, że z racji $\mathbf{V}^{(a)} = [1, 0, 0]^T V$, lewe strony drugiego i trzeciego równania z (4.6) odpowiadają lewym stronom drugiego i trzeciego równania z (3.1). Uwzględniając to otrzymuje się dwa równania algebraiczne wyrażające warunek równowagi sił czynnych i bezwładności na kierunkach drugiej i trzeciej osi układu aerodynamicznego, a więc kierunkach prostopadłych do postulowanej trajektorii lotu. Analitycznie zapisać to można jako:

$$\mathbf{A}_{ag}^* r'' V^2 = \frac{1}{m} (\mathbf{F}^{(a)})^*, \tag{4.7}$$

gdzie indeks " * " oznacza odrzucenie pierwszego elementu wektora lub pierwszego wiersza macierzy. W postaci rozwiniętej równanie (4.7) jest równoważne:

$$a) \quad \frac{1}{2} \rho S V^2 c_y + T \sin \beta - mg \sin \Phi^* \cos \Theta^* + \\ + m V^2 \left[x_1'' (\sin \Phi^* \sin \Theta^* \cos \Psi^* - \cos \Phi^* \sin \Psi^*) + \right. \\ \left. + y_1'' (\sin \Phi^* \sin \Theta^* \sin \Psi^* + \cos \Phi^* \cos \Psi^*) + z_1'' \sin \Phi^* \cos \Theta^* \right] = 0, \tag{4.8}$$

$$b) \quad \frac{1}{2} \rho S V^2 c_z + T \sin \alpha \cos \beta - mg \cos \Phi^* \cos \Theta^* + \\ + m V^2 \left[x_1'' (\cos \Phi^* \sin \Theta^* \cos \Psi^* + \sin \Phi^* \sin \Psi^*) + \right. \\ \left. + y_1'' (\cos \Phi^* \sin \Theta^* \sin \Psi^* - \sin \Phi^* \cos \Psi^*) + z_1'' \cos \Phi^* \cos \Theta^* \right] = 0.$$

Przyjmując, że współczynniki aerodynamiczne c_y i c_z są funkcjami kątów α i β , równania (4.8) reprezentują sobą dwa równania algebraiczne względem zmiennych: V , Φ^* , Θ^* , Ψ^* , α , β oraz s .

Należy zauważyć, że wyprowadzenie zależności analogicznych do (4.8) przy dynamicznych równaniach ruchów translacyjnych samolotu określonych w układzie własnym (jak to się zazwyczaj czyni [11,12]), wiązałoby się ze znacznym skomplikowaniem zapisu matematycznego. Wynika to między innymi z faktu, że kierunki normalne do postulowanej trajektorii lotu, równowagę sił, na których to kierunkach wyrażają równania (4.8), są określone w układzie aerodynamicznym niejako naturalnie (są to po prostu osie $0y_a$ i $0z_a$ tego układu). Układ własny tej cechy nie posiada.

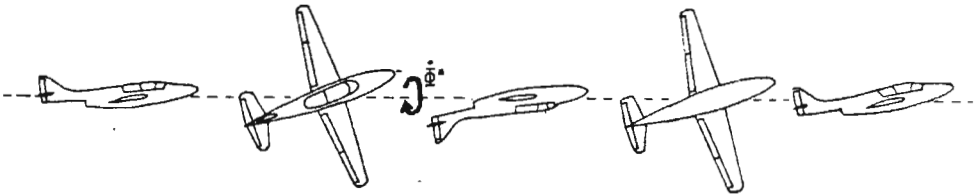
4.2. Więzy nakładane na orientację kątową samolotu

Postać warunku więzów programowych nakładanego na orientację kątową samolotu zależeć będzie od specyfiki modelowanego manewru czy figury akrobacji. Poniżej podane zostaną jedynie przykłady takich więzów.

Pierwszym przykładem omawianego typu mogą być więzy wynikające z postulowania prawidłowości zakrętów, czyli:

$$\beta = 0. \quad (4.9)$$

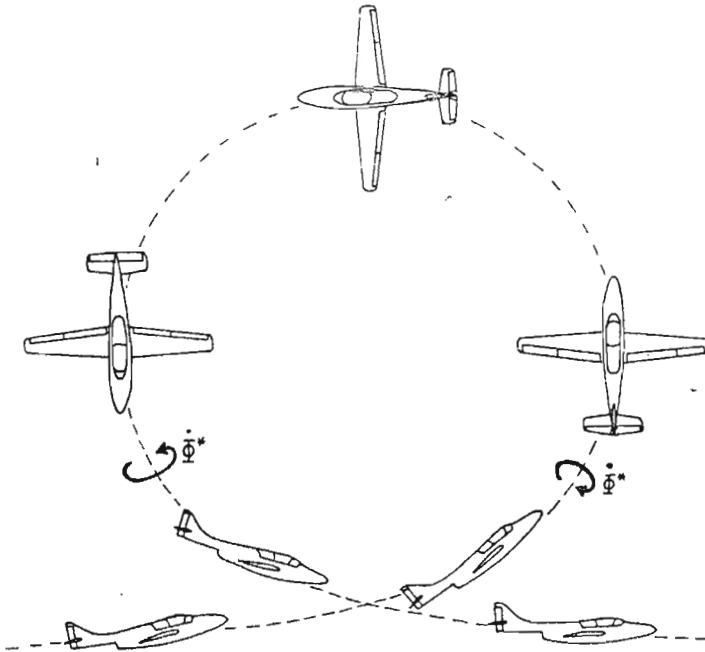
Warunek powyższy stosowany będzie przy modelowaniu zakrętów prawidłowych, zmiany toru lotu, zwrotu bojowego, spirali itd.



Rys. 4. Ideowy model beczki sterowanej

Szereg figur akrobacji lotniczej z założenia zakłada jednak niesymetryczny wpływ płotowca. Warunek (4.9) zastąpiony musi być wówczas innym, odpowiadającym cechom modelowanego manewru. Typowym przykładem może być modelowanie beczki sterowanej (prostoliniowy lot poziomy lub na wznoszeniu z obrotem wokół kierunku lotu). Odpowiedni warunek nakładany na położenia kątowe samolotu sformułowany może być jako funkcja zmian kąta Φ^* . Przykładowo:

$$\Phi^* = f_1(s) \quad \text{lub} \quad \Phi^* = f_2(t). \quad (4.10)$$



Rys. 5. Ideowy model pętli nożowej

Innym przykładem więzów omawianego typu, nakładanego również na zmiany kąta Φ^* , może być warunek służący zamodelowaniu pętli nożowej. Istota tego manewru zilustrowana została na rys.5.

Przykłady możnaby mnożyć, nie jest to jednak zasadniczym celem pracy. Podkreślić należy, że postać więzów nakładanych na położenia katowe samolotu formułowana będzie indywidualnie dla każdego przypadku modelowanego manewru.

4.3. Więzy nakładane na zmiany prędkości lotu

Więzy te odzwierciedlają postulowane przebiegi zmian wartości prędkości liniowej samolotu. Rozważyć można co najmniej dwie formy tych więzów:

$$V = \varphi_1(s) \quad \text{lub} \quad V = \varphi_2(t). \quad (4.11)$$

Zróżniczkowanie po czasie wyrażeń (4.11) i uwzględnienie pierwszego równania

skalarne z (3.1) prowadzi do następujących równań algebraicznych:

$$\frac{1}{m} \left(-\frac{1}{2} \rho S V^2 c_x + T \cos \alpha \cos \beta - mg \sin \Theta^* \right) = \begin{cases} \varphi_1' V \\ \dot{\varphi}_2 \end{cases}, \quad (4.12)$$

gdzie V w powyższym równaniu jest brane zgodnie z (4.11).

Równanie (4.12) reprezentuje sobą narzucony przez więzy (4.11) warunek na zmiany przyspieszenia liniowego samolotu na kierunku stycznym do toru. Z równania tego wyznaczana będzie aktualna wartość siły ciągu niezbędna dla realizacji tych więzów.

5. Równania ruchu programowego

Równania programowego ruchu samolotu wzdłuż założonej trajektorii (4.1) z dodatkowym warunkiem nakładanym na zmiany orientacji kątowej płatowca zaproponowano w formie:

- a) $\dot{V} = \frac{1}{m} \left(-\frac{1}{2} \rho S V^2 c_x + T \cos \alpha \cos \beta - mg \sin \Theta^* \right),$
- b) $\left(\begin{array}{l} \text{Dwa równania algebraiczne wynikające z warunku styczności} \\ \text{wektora prędkości liniowej do postulowanej trajektorii} \\ \text{lotu - równanie (4.4). Zmienne: } \Theta^*, \Psi^* \text{ oraz } s. \end{array} \right)$
- c) $\left(\begin{array}{l} \text{Dwa równania algebraiczne (4.8) wyrażające warunek} \\ \text{równowagi sił czynnych i bezwładności na kierunkach} \\ \text{prostopadłych do toru (wzdłuż osi } 0y_a \text{ i } 0z_a \text{).} \\ \text{Zmienne: } V, \Phi^*, \Theta^*, \Psi^*, \alpha, \beta \text{ oraz } s. \end{array} \right) \quad (5.1)$
- d) $\left(\begin{array}{l} \text{Równanie algebraiczne wynikające z warunku nakładanego} \\ \text{na zmiany kątowej orientacji płatowca.} \\ \text{Dopuszczalne zmienne: } V, \Phi^*, \Theta^*, \Psi^*, \alpha, \beta, s. \end{array} \right)$
- e) $\dot{s} = V.$

W powyższym układzie równań różniczkowo - algebraicznych (RRA), równania różniczkowe to (5.1a), będące pierwszym równaniem skalarne z (3.1), oraz (5.1e) będące równaniem pomocniczym, wynikającym z przyjęcia s jako parametru w równaniach toru lotu (4.1). Równania różniczkowe uzupełnione są pięcioma równaniami algebraicznymi zgromadzonymi w (5.1b-d), istota których wyjaśniona była w rozdziale 4. Zmiennymi stanu układu RRA (5.1) są: $V, \Phi^*, \Theta^*, \Psi^*, \alpha, \beta, s$.

Łatwo pokazać, że macierz Jacobiego równań algebraicznych spośród (5.1) względem zmiennych algebraicznych $\Phi^*, \Theta^*, \Psi^*, \alpha, \beta$ jest nieosobliwa. Zgodnie z nomenklaturą teorii RRA [4,6,7], indeks układu (5.1) jest więc równy jedności.

Oznacza to, że jednokrotne zróżniczkowanie po czasie równań algebraicznych przekształci układ (5.1) do odpowiedniego układu równań różniczkowych zwyczajnych rzędu pierwszego. Operacja taka, wiążąca się ze znacznym skomplikowaniem zapisu wynikowych równań ruchu programowego, nie jest jednak konieczna. Zgodnie z [6,7], układ RRA o indeksie jeden całkowany może być przy użyciu standardowych metod numerycznych typowych dla rozwiązywania równań różniczkowych zwyczajnych. W swej istocie polega to na eliminowaniu zmiennych algebraicznych z równań różniczkowych na każdym kroku całkowania. Eliminacja ta jest natomiast rozwiązywaniem równań algebraicznych przy aktualnych wartościach zmiennych różniczkowych.

Jeśli na ruch samolotu nakładane są dodatkowe więzy na zmiany wartości prędkości lotu, równanie różniczkowe (5.1a) eliminowane jest z równań ruchu programowego (w postaci (4.12) służyć będzie do wyznaczania wymaganego sterowania ciągiem silnika), a zmienne stanu odpowiedniego układu równań ruchu programowego zawięzają się do: Φ^* , Θ^* , Ψ^* , α , β , s .

6. Wyznaczanie sterowania programowego

Zgodnie z przyjętymi założeniami, samolot w modelowanym ruchu programowym sterowany jest poprzez wychylenia powierzchni sterowych $\delta = [\delta_L, \delta_H, \delta_V]^T$ oraz zmiany siły ciągu T . Ten ostatni parametr sterowania "uruchamiany" jest tylko wówczas gdy nakładane są więzy na zmiany wartości prędkości liniowej. Sterowanie siłą ciągu wyznaczane jest wówczas z (4.12). W przypadku gdy więzy (4.11) nie są nakładane, T może być wzięte jako dowolna odpowiednio gładka funkcja zmiennych stanu układu (5.1) i czasu.

Niezależnie od tego czy więzy (4.11) są postulowane programem lotu, wymagane sterowanie wychyleniami powierzchni sterowych wyznaczane może być z dynamicznych równań ruchów obrotowych samolotu (3.2). Po uwzględnieniu (3.8), odpowiedni związek analityczny zapisać można macierzowo jako:

$$\begin{aligned} \delta &= (M_1^{(s)})^{-1} (J\dot{\Omega}_s^{(s)} + \tilde{\Omega}_s^{(s)} J\Omega_s^{(s)} - M_0^{(s)}) = \\ &= \delta(V, \alpha, \beta, \dot{P}, \dot{Q}, \dot{R}, P, Q, R). \end{aligned} \tag{6.1}$$

Zgodnie ze wzorem (2.7), składowe P, Q i R wyznaczyć można w zależności od aktualnych wartości zmiennych algebraicznych układu (5.1), tzn. Φ^* , Θ^* , Ψ^* , α , β , oraz ich pochodnych. Wykorzystując ten fakt równanie (6.1) można przepisać symbolicznie jako:

$$\delta = \delta(V, \Phi^*, \Theta^*, \alpha, \beta, \dot{\Phi}^*, \dot{\Theta}^*, \dot{\Psi}^*, \dot{\alpha}, \dot{\beta}, \ddot{\Phi}^*, \ddot{\Theta}^*, \ddot{\Psi}^*, \ddot{\alpha}, \ddot{\beta}). \tag{6.2}$$

Teoretycznie, związek typu (6.2) możliwy jest do otrzymania w sposób analityczny. Wymagałoby to jednak dwukrotnego analitycznego zróżniczkowania po czasie algebraicznych równań ruchu programowego (5.1b-d) celem otrzymania analitycznych zależności na pierwsze i drugie pochodne zmiennych algebraicznych. Łatwo przewidzieć, że zapis takich zależności byłby bardzo skomplikowany. Modyfikacji (skomplikowaniu) ulec musiałyby też same równania ruchu programowego w porównaniu do (5.1). Z tych względów analityczny sposób wyznaczania sterowania programowego poprzez zmiany δ odrzucono jako nieefektywny w przypadku ogólnym (sposób taki był jednak do przyjęcia dla prostego przypadku analizy ruchu programowego samolotu w pętli pionowej [1,3]).

Dla wyznaczania sterowania programowego zgodnie z (6.1) zaproponowano podejście polegające na numerycznym określaniu aktualnych wartości P, Q, R i ich pochodnych. Proponuje się mianowicie, by $\Phi^*, \Theta^*, \Psi^*, \alpha$ i β , niezbędne dla wyznaczenia aktualnych wartości P, Q i R zgodnie z (2.7), wyznaczone były numerycznie na podstawie przebiegów czasowych $\Phi^*, \Theta^*, \Psi^*, \alpha$ i β otrzymywanych z analizy równań ruchu programowego (5.1). W sposób przybliżony (z błędem obliczeń numerycznych) otrzymywane mogą być tą drogą przebiegi czasowe P, Q i R , a na ich podstawie, również numerycznie, określane mogą być \dot{P}, \dot{Q} oraz \dot{R} . Tym samym, tylko na podstawie otrzymywanych wyników analizy równań ruchu programowego (5.1), sterowanie programowe wyznaczane może być bezpośrednio ze wzoru (6.1). Należy przy tym zauważyć, że błędy obliczeń numerycznych przy wyznaczaniu sterowania programowego nie mają żadnego wpływu na analizę równań (5.1) ani też nie kumulują się.

7. Wnioski

Zaproponowany model matematyczny umożliwi cyfrową symulację figur akrobacji lotniczej i innych manewrów przestrzennych samolotu, które dają się zamodelować przy pomocy postulowanej trajektorii lotu, więzów nakładanych na zmiany położenia kąтового płatowca w przestrzeni, oraz ewentualnie, więzów nakładanych na zmiany wartości prędkości lotu. Na wyjściu uzyskiwane są przebiegi czasowe parametrów ruchu, który z założenia zgodny jest z założonymi więzami programowymi, oraz przebiegi czasowe parametrów sterowania wymagane dla realizacji analizowanego ruchu programowego. Pozwolić to może na pełniejsze poznanie charakteru analizowanych manewrów oraz na ocenę akceptowalności wymaganego sterowania.

Gładkość otrzymywanych przebiegów czasowych parametrów stanu układu równań ruchu programowego (5.1) oraz przebiegów czasowych parametrów sterowania wymaga, by postulowane więzy programowe reprezentowane były w modelu funkcjami odpowiedniej klasy. Najostrzejsze wymagania co do gładkości tych

funkcji stawiane będą wówczas, gdy sterowanie programowe poprzez zmiany wychyleń sterów określone będzie w sposób analityczny. Więzy toru lotu (4.1) winny być wówczas klasy co najmniej C^5 , więzy na prędkość lotu (4.11) odpowiednio C^4 , a więzy nakładane na zmiany położenia kąтового płatowca w przestrzeni – klasy C^3 . Wymagania te można obniżyć o dwie jednostki, gdy sterowanie poprzez zmiany δ wyznaczane będzie przy pomocy wzoru (6.1), na podstawie numerycznie określonych wartości P, Q, R i ich pochodnych.

Dodatek 1. W bazie dowolnego układu odniesienia stosowanego w pracy, mnożenie wektorowe $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ reprezentowane jest w zapisie macierzowym jako [10,15]:

$$\mathbf{c} = \bar{\mathbf{a}}\mathbf{b} = \bar{\mathbf{b}}^T\mathbf{a} = -\bar{\mathbf{b}}\mathbf{a}, \quad (D1)$$

gdzie: $\mathbf{a} = [a_x, a_y, a_z]^T$, $\mathbf{b} = [b_x, b_y, b_z]^T$, $\mathbf{c} = [c_x, c_y, c_z]^T$, natomiast symbol "–" oznacza skośnieszymetryczną macierz (operator mnożenia wektorowego) o następującej budowie:

$$\bar{\mathbf{a}} = \begin{bmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_x & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{bmatrix}. \quad (D2)$$

Dodatek 2. Pochodną macierzy transformacji przez obrót \mathbf{A}_{pq} pomiędzy układami p oraz q zapisać można następująco [10,15]:

$$(\mathbf{A}_{pq})^* = -\tilde{\Omega}_{p/q}^{(p)}\mathbf{A}_{pq} = \mathbf{A}_{pq}\tilde{\Omega}_{q/p}^{(q)}, \quad (D3)$$

gdzie $\tilde{\Omega}_{p/q}^{(p)}$ oznacza ($\tilde{\Omega}_{q/p}^{(q)}$ analogicznie) reprezentację macierzową prędkości kątowej układu p względem układu q wyrażoną w osiach układu p , natomiast symbol "–" wyjaśniony jest w dodatku 1.

Literatura

1. BLAJER W., *Modelling of aircraft program motion with application to circular loop simulation*, The Aeronautical Journal, Vol.92, pp.289-296, 1988
2. BLAJER W., *Wyznaczanie modelu sterowania samolotem zapewniającego ścisłą realizację ruchu programowego*, Mechanika Teoretyczna i Stosowana, T.25, Z.3, str. 437-445, 1987
3. BLAJER W., PARCZEWSKI J., *Model matematyczny wyznaczania funkcji sterowania samolotem w pętli*, Mechanika Teoretyczna i Stosowana, T.25, Z.1-2, str. 257-264, 1987

4. CAMPBELL S.L., *The numerical solution of higher index linear time varying singular systems of differential equations*, SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing, Vol.6, pp.334-348, 1985
5. DO SANH, *On the equations of motion of a controlled mechanical system*, Zagadnienia Drgań Nieliniowych, t.21, str. 71-86, 1983
6. GEAR C.W., LEIMKUHNER B., GUPTA G.K., *Automatic integration of Euler-Lagrange equations with constraints*, Journal of Computational and Applied Mathematics, 12/13, pp.77-90, 1985
7. GEAR C.W., PETZOLD L.R., *ODE methods for the solution of differential/algebraic systems*, SIAM Journal on Numerical Analysis, Vol.21, pp.716-728, 1984
8. GUTOWSKI R., *Mechanika analityczna*, PWN, Warszawa 1971
9. KAMMAN J.W., HUSTON R.L., *Dynamics of constrained multibody systems*, ASME Journal of Applied Mechanics, Vol.51, pp.899-903, 1984
10. KORN G.A., KORN T.M., *Matematyka dla pracowników naukowych i inżynierów*, PWN, Warszawa 1983
11. MARYNIAK J., *Dynamiczna teoria obiektów ruchomych*, Prace Naukowe PW, Mechanika Nr 32, Warszawa 1975
12. MARYNIAK J., *System symulacji trenażera lotu, naprowadzania i walki powietrznej samolotu*, Mechanika Teoretyczna i Stosowana, T.25, Z.1-2, str. 189-214, 1987
13. SUSŁOW G.K., *Mechanika teoretyczna*, PWN, Warszawa 1960
14. WALKER R.A., GUPTA N.K., DUKE E.L., PATTERSON B., *Developments in flight test trajectory control*, AIAA Paper 84-0240, 1984
15. WITTENBURG J., *Dynamics of systems of rigid bodies*, Teubner, Stuttgart 1977 (przekład rosyjski, Mir, Moskwa 1980)

Summary

A mathematical model of the aircraft spatial motion during realization of an assumed program flight has been presented in the paper. Two independent conditions of this program settle the center of the aircraft fixed on the assumed trajectory, while the third condition constrains the aircraft angular orientation changes. The possibility of application of an additional condition controlling the flight velocity changes has been also introduced. The model being proposed makes it possible to simulate some aerobatics manoeuvres and some spatial manoeuvres of the aircraft. As a results the governing parameters changes versus time describing the program motion under analysis together with the control parameters of the aircraft changes required for the program flight realization have been obtained.

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 12 października 1988 roku