

PRZEGLĄD MODELI OBLICZENIOWYCH OPON PNEUMATYCZNYCH

JÓZEF PELC

Akademia Rolniczo-Techniczna, Olsztyn

Dokonano przeglądu modeli obliczeniowych opon pneumatycznych. Wskazano na trudności związane z analizą opon. Przedstawiono też sposoby obliczania stałych mechanicznych kompozytu kordowo-gumowego. Model skończenie-elementowy uznano za najwłaściwszy do planowanych obliczeń.

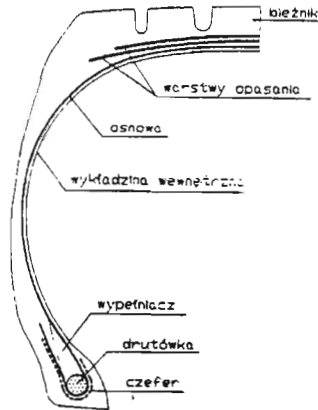
1. Wstęp

Opona pneumatyczna uważana jest za jedną z najbardziej złożonych konstrukcji inżynierskich. Ze względu na ograniczone możliwości technik analitycznych, w ciągu wielu lat jej udoskonalanie opierało się głównie na wynikach badań laboratoryjnych i eksploatacyjnych oraz w dużym stopniu na doświadczeniu konstruktorów. Jednakże metoda prób i błędów okazuje się być metodą czasochłonną i kosztowną. Racjonalne konstruowanie opon o wysokich parametrach eksploatacyjnych wymaga dziś przewidywania charakterystyk opony jeszcze przed jej wyprodukowaniem. W tym celu należy dysponować odpowiednim modelem obliczeniowym opony. Stając przed zadaniem określenia w fazie konstruowania, niektórych wielkości geometrycznych i mechanicznych gotowej opony dokonaliśmy wpierw szerokiego przeglądu istniejących modeli obliczeniowych opon pneumatycznych.

2. Źródła trudności w obliczeniach konstrukcyjnych opon pneumatycznych

W czasie eksploatacji opona pneumatyczna jest poddana działaniu złożonych obciążeń, które wywołują w niej odkształcenia, naprężenia oraz powodują jej nagrzewanie się i zmianę kształtu. Analiza matematyczna tych efektów jest utrudniona ze względu na to, że (rys.1):

- opona jest konstrukcją o złożonym kształcie (powłoka o zmiennej grubości)
- zbudowana jest z kompozytu kordowo-gumowego, wykazującego własności anizotropii, lepkosprężystości i niejednorodności
- duże odkształcenia, duże przemieszczenia i nieliniowości materiałów składowych (kordu i gumy) wymagają analizy nieliniowej (Yoshimura [1]).



Rys. 1. Przekrój poprzeczny opony pneumatycznej

Pewne utrudnienia w analizie wiążą się również z nieściśliwością gumy (liczba Poissona $\nu=0.5$)

Na oponę działają następujące obciążenia: ciśnienie wewnętrzne, siły zewnętrzne i obciążenie termiczne. Do sił zewnętrznych zaliczamy rozłożone zazwyczaj w sposób ciągły naprężenia wynikające z kontaktu opony z obręczą koła i jezdnią oraz objętościowe siły bezwładności (odśrodkowe). Należy podkreślić, że wyznaczenie rozkładów sił kontaktowych stanowi jeden z trudniejszych problemów mechaniki – a w szczególności w analizie opon. Ponadto obciążenia ciśnieniem i siłami bezwładności zależą od przemieszczeń punktów opony. Na obciążenie termiczne ma wpływ: nierównomierna wydłużalność i ściśliwość gumy i kordu, skurcz kordu po wulkanizacji, wewnętrzne wydzielanie ciepła ze względu na zjawisko histerezy, i tarcie bieżnika o jezdnię (poślizg częściowy).

Obciążenie opony może mieć charakter statyczny lub dynamiczny, a w tym cykliczny, powodujący zmęczenie materiału. Obciążenie może być osiowo-symetryczne (np. ciśnienie wewnętrzne) lub osiowo-niesymetryczne (np. naprężenia kontaktowe).

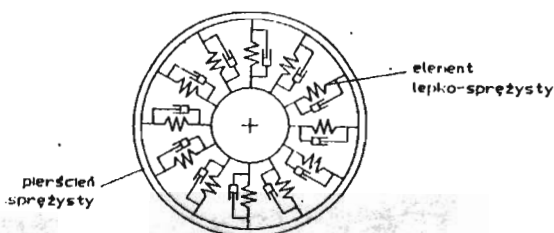
Powyższe rozważania związane są z mechaniką opony, która (jak zauważa Biderman [2]) rozwijała się w dwóch kierunkach – mechaniki wewnętrznej i

zewewnętrznej. Mechanika wewnętrzna dotyczy stanu naprężenia, odkształcenia, pól termicznych i związanych z tym deformacji elementów opony pod wpływem różnych obciążeń. Mechanika zewnętrzna opony zajmuje się oponą jako całością i jej zachowaniem się w warunkach eksploatacji w układzie jezdnia–koło–zawieszenie pojazdu. Pierwsze modele opon (early models) [3] wchodziły w zakres mechaniki zewnętrznej. Te dwa podejścia do mechaniki opony powinny być ze sobą ściśle związane, jako że eksploatacyjne charakterystyki opony (zewnętrzne) takie jak np. sztywność radialna, boczna, obwodowa, własności trakcyjne, tłumiące, są zależne od procesów wewnętrznych zachodzących w obciążonej oponie. Prognozowanie charakterystyk opony jest zaś możliwe tylko na podstawie głębokiej analizy wspomnianych procesów.

3. Obliczeniowe modele opon

3.1. Pierwsze modele opon

Opona pneumatyczna przedstawiana była w postaci sprężystego pierścienia, napiętej taśmy lub belki na sprężystym podłożu. Mechaniczne własności modelu, równoważne własnościom opony, były określane na podstawie szerokich badań konkretnych opon. W modelach tych bieżnik był najczęściej przedstawiany jako wstępnie napięta taśma lub pierścień (gdy uwzględniano zginanie), ścianki boczne zaś jako elementy lepkko-sprężyste podtrzymujące konstrukcję bieżnika (rys.2).



Rys. 2. Jeden z pierwszych modeli opony

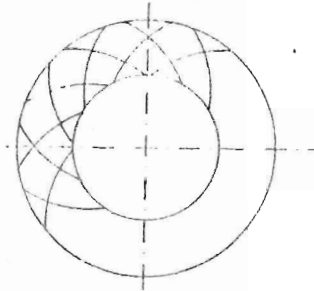
Modele takie były pomocne przy analizie drgań koła, badaniu zachowania się pojazdu w przypadku poślizgu, hamowania lub działania siły napędowej. Stosowanie tych modeli jest ograniczone tym, że:

- wymagają szerokich badań w celu określenia równoważnych parametrów
- ich ważność jest ograniczona do pewnych zakresów wartości wyznaczanych parametrów

- ich dokładność nie może być z góry określona
- nie pozwalają określać stanu naprężenia i deformacji w elementach opony.

3.2. Model ciągnowy (network model)

Zakłada się, że wszystkie siły wewnętrzne w oponie, wywołane ciśnieniem wewnętrznym, przenoszone są tylko przez nici kordu. Analizuje się dwuwymiarową powierzchnię krzyżujących się cięgien, która geometrycznie jest powierzchnią środkową warstwy osnowy opony, do której myślowo sprowadza się wszystkie warstwy kordu (rys.3). Tak otrzymana powłoka, deformując się, przyjmuje określony kształt, który odpowiada jej stanowi równowagi statycznej. Kształt ten, który krótko nazywamy kształtem równowagi, zależy od ułożenia i własności sprężystych nici kordu i od ciśnienia wewnętrznego w oponie. Niekiedy zaniedbuje się wydłużenia nici kordu – wtedy kształt równowagi nie zależy od ciśnienia. Część wspólna tej powłoki w stanie równowagi z płaszczyzną zawierającą oś obrotu opony, nazywamy zarysem osnowy opony.



Rys. 3. Model ciągnowy

Model ciągnowy umożliwia określanie zarysu napompowanej opony (w zależności od długości nici kordu, kąta między niemi i rozmiaru obręczy), jak również wyznaczenie sił w niciach kordu i w drutówce.

Opis matematyczny modelu przedstawili Biderman [4] i Hofferberth [5] (patrz również Biderman [6], Frank, Hofferberth [7]). Zakładano, że przebieg nici kordu na powierzchni środkowej jest określony tzw. prawem pantografu: $r/\cos\alpha = r_c/\cos\alpha_c$, gdzie C – punkt na równiku powierzchni, α – kąt nachylenia nici kordu do równoleżnika w dowolnym punkcie powierzchni, r – odległość tego punktu od osi obrotu opony.

Zależności matematyczne dotyczące modelu przy dowolnym przebiegu nici kordu wyprowadzili Day i Gehman [8].

W wielu pracach naukowych zajmowano się analizą modelu ciągnowego opony [9,10,11], w szczególności problemem wyznaczania zarysu opony – w wielu też [12,13,14,15] nawiązywano do tego modelu. Do wspomagania prac projektowych budowano odpowiednie nomogramy [16,17], algorytmy obliczeń [18] lub przedstawiano programy komputerowe, pozwalające określać zarys opony w stanie równowagi [19,20].

Interesujące podejście do problemu obliczania zarysu opony i sił w niciach kordu, oparte na zasadach wariacyjnych mechaniki, podał F.Koutny [21,22]. Krzywa przedstawiająca zarys jest otrzymywana jako rozwiązanie zagadnienia izoperymetrycznego (ekstremala funkcjonału przy założeniu stałej długości nici kordu), w którym funkcjonał podstawowy określa energię zamkniętego w oponie powietrza.

Przez długi okres czasu model ciągnowy stanowił podstawę obliczeń w procesie konstruowania opon. Również i dziś może być pomocny przy określaniu zarysu opony w pierwszym przybliżeniu. Z praktyki inżynierskiej wynika, że model ciągnowy daje wyniki obarczone błędami, których wielkość zależy m.in. od rodzaju modelowanej opony. Dzieje się tak dlatego, że model ten nie uwzględnia wpływu gumy na stan naprężenia w niciach kordu i na ich deformacje, jak również pomija zginanie powłoki opony. Obydwa te efekty mają duże znaczenie szczególnie w strefie drutówki. W niektórych rodzajach opon (mocno obciążonych – heavy service tires) wpływ tych dwóch efektów na stan odkształcenia jest znaczny w całej oponie. Również trudności w ścisłym określeniu położenia tzw. umownego punktu obřęczy, obniża dokładność rozwiązania otrzymanego na podstawie tego modelu.

W przypadku obliczania opon radialnych na podstawie tego modelu wyniki nie są ważne w strefie opasania, jako że nie można określić, jaki jest udział poszczególnych warstw w przenoszeniu obciążeń (por. Ridha [3], str.861).

Klasyczny model ciągnowy, ze względu na przyjęte założenia upraszczające, może być stosowany tylko do analizy opon obciążonych osiowo-symetrycznie (ciśnienie wewnętrzne, siły odśrodkowe). Późniejsze, bardziej wyrafinowane, modele ciągnowe oparte na teorii powłok siatkowych [23,24] umożliwiały również uwzględnianie innych obciążeń (np. radialnych, obwodowych). Rozwiązanie było otrzymywane metodą krokową – przez konstruowanie kolejnych konfiguracji równowagi powłoki. Jednak jego ważność jest ograniczona do przypadków, gdy zmiana sił w niciach wywołana deformacją powłoki jest mała w porównaniu z siłami spowodowanymi działaniem ciśnienia wewnętrznego. Stąd też przydatność tego modelu do analizy opon poddawanych obciążeniom eksploatacyjnym jest poważnie ograniczona.

3.3. Model membranowy

Pomijając efekt zginania w oponie i przyjmując, że obciążenia powodują naciąganie membrany zbudowanej z warstw kordowo-gumowych (cienkich), dochodzimy do modelu membranowego opony. Okazuje się, że w przypadku analizy liniowej i przy założeniu eliptycznego kształtu profilu opony, model membranowy jest równoważny modelowi cięgnowemu. Jednakże analiza w zakresie nieliniowym (duże przemieszczenia) umożliwia badanie zjawiska kontaktu membrany z płaską powierzchnią. Problemem tym zajmował się Tielking i współpracownicy [25,26].

Propozycję tzw. modelu warstwowego przedstawił Robecchi [27]. Opona jest uważana za cienką powłokę ortotropową, będącą w stanie bezmomentowym. Wprowadzone stałe materiałowe, charakteryzujące gumowany kord, umożliwiają uchwycenie efektu złożenia (kontaktu) osnowy i opasania. Model stosowano do analizy opony obciążonej ciśnieniem wewnętrznym.

3.4. Model powłokowy

Potraktowanie opony jako powłoki z uwzględnieniem stanu zgięciowego umożliwia uchwycenie przez model efektów lokalnych w strefie kontaktu z drogą, w obrębie drutówki i w miejscach znacznej zmiany krzywizny powłoki. Klasyczne zadanie teorii powłok polega na obliczeniu przemieszczeń, odkształceń i naprężeń w powłoce w zależności od obciążenia, geometrii i własności materiału. Podejście to wymaga korzystania z istniejących lub budowy nowych równań różniczkowych opisujących problem, które należy następnie rozwiązać. W prostych przypadkach można znaleźć rozwiązanie ściśle, w większości jednak poszukuje się rozwiązań przybliżonych (np. w postaci szeregów potęgowych). Złożony kształt opony (część torusa) zmienna grubość, niejednorodny materiał i duże przemieszczenia nie pozwalają zastosować wprost najprostszej teorii powłok – klasycznej teorii powłok cienkich. Teoria ta bazuje na następujących założeniach:

- powłoka jest cienka w porównaniu z najmniejszym promieniem krzywizny jej powierzchni środkowej ($h/R_{\min} \leq 1/20$)
- przemieszczenia są małe w porównaniu z grubością powłoki (duże przemieszczenia wymagają zastosowania metody przyrostowej ze względu na obciążenie, z aktualizowaniem jej geometrii w każdym kroku)
- pomija się naprężenia prostopadle do środkowej powierzchni powłoki
- proste prostopadle do środkowej powierzchni powłoki przed odkształceniem pozostają prostopadle do powierzchni odkształconej.

Brewer [28] wykorzystał model cienkiej powłoki do analizy opony samolotu w zakresie obciążenia ciśnieniem wewnętrznym. Zakładał, że powłoka jest cienkim laminatem złożonym z warstw kordowo-gumowych oraz pominał sprzężenie między stanem tarczowym i stanem zgięciowym powłoki. Określony tym sposobem profil opony prawie odpowiadał rzeczywistości, wartości obliczonych zaś sił wewnętrznych mocno odbiegały od zmierzonych (por. Ridha [3], str. 865–870). Szybszą metodę otrzymania wyników w tym samym zadaniu przedstawili Clark, Budd i Tielking [29]. Polega ona na zastosowaniu metody Ritza do minimalizacji funkcjonału energii potencjalnej powłoki.

Jak nietrudno dostrzec, szczególnie pierwsze i ostatnie z podanych wcześniej założeń czynią model powłokowy (cienka powłoka) nieadekwatnym do rzeczywistej opony. Prosty test szpilkowy [30] pozwala stwierdzić, że w płaszczyznach równoległych do środkowej powierzchni powłoki występują naprężenia ścinające, które powodują paczanie się przekrojów poprzecznych powłoki. Dlatego też podjęto próby modelowania opony za pomocą powłoki grubej. Jednakże opis matematyczny takiego modelu, uwzględniającego anizotropię, staje się obszerny i złożony [31]. Spore osiągnięcia w tym zakresie mają naukowcy radzieccy. Biderman i Levkovskaja [32] potraktowali strefę bieżną opon radialnych i diagonalnych z opasaniem jako powłokę trójwarstwową (opasanie-gumowa przekładka-osnowa). Warstwy zewnętrzne uważano za cienkie powłoki anizotropowe, przekładka podlegała tylko odkształceniom postaciowym. Otrzymane wyniki (obciążenie ciśnieniem wewnętrznym) w porównaniu z doświadczalnymi były zadowalające (5 ÷ 10 % błąd w obliczeniu sił w opasaniu, 10 ÷ 15 % odchylenie w obliczeniu przemieszczeń radialnych).

Bardziej zaawansowane podejście, polegające na modelowaniu opony powłoką warstwową o zmiennej grubości, przedstawiono w [33]. Uwzględniono nieliniowości natury geometrycznej i fizycznej. W pracy rozważa się przypadek obciążenia osiowo-symetrycznego.

Metoda analityczna analizy modelu powłokowego jest bardzo trudna i żmudna (zwłaszcza w przypadku powłok nie-cienkich, warstwowych). Chcąc otrzymać rozwiązanie w postaci zamkniętej, zazwyczaj trzeba przyjmować wiele założeń upraszczających (małe przemieszczenia, osiowa symetria itp.). Często, mimo że udaje się zbudować równania różniczkowe opisujące model, są kłopoty ze znalezieniem rozwiązania. Wtedy korzysta się z metod przybliżonych. Szerokie możliwości obliczeń opon z wykorzystaniem modeli powłokowych daje np. Metoda Elementów Skończonych (MES).

3.5. Modele dyskretne – Metoda Elementów Skończonych

W anglojęzycznej literaturze naukowej, zwłaszcza amerykańskiej, na temat

modelowania opon spotyka się często określenie "model skończenie-elementowy opony" (ang. Finite Element Tire Model) [34]. My jednak w dalszej części pracy będziemy utożsamiać z tym pojęciem określenie "Metoda Elementów Skończonych" (MES), (mając na myśli jej zastosowanie do analizy opon), które jest powszechnie używane w polskiej literaturze dotyczącej analizy różnych konstrukcji za pomocą tej metody.

W analizie dowolnej konstrukcji Metodą Elementów Skończonych można wyróżnić cztery fazy [35]:

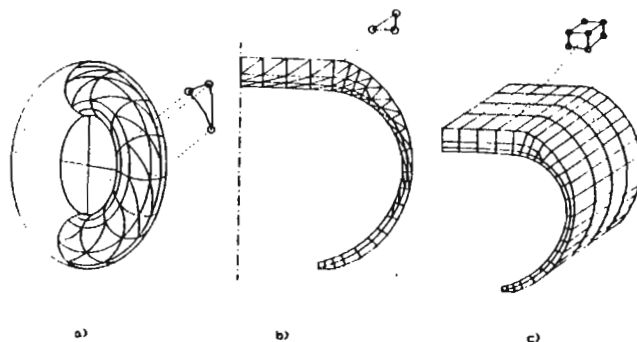
- idealizacja konstrukcji (dyskretyzacja); rzeczywisty układ mechaniczny jest myślowo dzielony na podukłady zwane elementami skończonymi, z których sąsiednie połączone są ze sobą w skończonej liczbie punktów zwanych węzłami
- analiza elementów; określa się związki między siłami działającymi na węzły ze strony elementów a przemieszczeniami tych węzłów
- analiza konstrukcji (agregacja); wykorzystując warunki zgodności przemieszczeń i warunki równowagi węzłów "zsywa się" poszczególne elementy w całość, z której zostały wydzielone
- rozwiązanie układu równań; obliczenie przemieszczeń węzłów; i dalej odkształceń i naprężeń w poszczególnych elementach i punktach konstrukcji.

Jeżeli elementy skończone spełniają określone warunki ([36], str. 44), to zmniejszając ich wymiary (zwiększając ich liczbę) dochodzimy do stanu, w którym model i rzeczywista konstrukcja są identyczne (tzn. wielkości obliczone są takie jak rzeczywiste). Jednak z obliczeniowego punktu widzenia (czas obliczeń) taki stan jest niemożliwy, a nawet zbędny.

Ze względu na to, że elementy skończone mogą mieć różnorodne kształty: elementy jednowymiarowe – odcinki; elementy dwuwymiarowe – płaskie lub zakrzywione trójkąty, prostokąty; elementy przestrzenne – czworościany, graniastosłupy, w tym o krawędziach krzywoliniowych, cylindry itp., małe rozmiary oraz, że w każdym elemencie mogą być określane inne własności fizyko-mechaniczne materiału, MES dobrze nadaje się do analizy konstrukcji o złożonych kształtach, niejednorodnych i obciążonych w sposób złożony. Taką konstrukcją jest opona pneumatyczna. W zależności od sposobu przeprowadzenia dyskretyzacji obszaru opony otrzymujemy różne modele dyskretne. Również modele wcześniej omówione (membranowy, powłokowy) mogą podlegać dyskretyzacji i dalszej analizie za pomocą MES. Możemy więc wymienić przykładowo następujące modele:

- dwuwymiarowy model powłokowy; gdy dyskretyzowany będzie model powłokowy opony (powierzchnia środkowa powłoki). Wyróżniony na rys.4a dwuwymiarowy element skończony może być płaski lub zakrzywiony

- dwuwymiarowy model osiowo-symetryczny; ze względu na założenie osiowej symetrii dyskretyzuje się tylko przekrój poprzeczny opony, ściślej jego połowę (rys.4b)
- model trójwymiarowy; opona jako ciało trójwymiarowe dzielona jest na trójwymiarowe elementy skończone (rys.4c).



Rys. 4. Modele dyskretne – a) dwuwymiarowy (powłokowy), b) dwuwymiarowy osiowo-symetryczny, c) trójwymiarowy

Metoda elementów skończonych dotyczy modelu dyskretnego, co oznacza, że zachowanie się konstrukcji pod wpływem obciążeń określa się tylko w poszczególnych jej punktach. Wcześniej omawiane modele były zaś modelami kontynualnymi (ciągłymi). Ich analiza polegała na znalezieniu rozwiązania w postaci analitycznej (funkcja). W większości przypadków konieczne było przyjmowanie mocnych założeń upraszczających – co często stanowiło warunek znalezienia rozwiązania w ogóle. W MES taka konieczność nie istnieje, dzięki czemu model może lepiej opisywać rzeczywistą konstrukcję i może uwzględniać wpływ większej liczby parametrów na jej zachowanie się.

Z powodzeniem wykorzystywano MES do analizy opon pneumatycznych. Jedną z pierwszych prac na temat zastosowania MES w analizie opon opublikowali Dunn i Zorowski [37]. Badano deformacje opony, jako osiowo-symetrycznej powłoki ortotropowej, wywołane ciśnieniem wewnętrznym i siłami odśrodkowymi. Deformacje opony wywołane siłami skurczu nici kordu badał Ridha [38]. Zagadnienie obciążenia opony siłą promieniową rozważali Kaga, Okamoto i Tozawa [39].

Lata osiemdziesiąte przyniosły szereg nowych prac związanych z zastosowaniem MES w obliczaniu opon pneumatycznych [1,3,31,34,40,41,42,43,44,45]. W zależności od rodzaju analizowanego problemu i zadanej dokładności stosowane były modele: od dwuwymiarowego osiowo-symetrycznego (2D) (D ang.

Dimension-wymiar) po trójwymiarowe (3D) do badania zjawiska kontaktu opony z drogą.

Tak jak w przypadku wcześniej przedstawionych modeli, tak i w przypadku modelu dyskretnego analizowanego metodą ES, istnieją pewne ograniczenia w jego stosowaniu. Model ten wymaga bowiem szybkich komputerów, pojemnych pamięci, programów komputerowych, jak również efektywnych algorytmów obliczeniowych. Kłopoty te są jednak sukcesywnie pokonywane – pojawiają się komputery coraz to nowszych generacji, również w zakresie metod numerycznych odnotowuje się nowe osiągnięcia.

Należy podkreślić, że w wielu przypadkach wykorzystywane były do analizy opon już istniejące, wielkie systemy obliczeniowe jak [46] ADINA, ADINAT, MARC, NASTRAN i TITUS. Wymagało to jednak dostosowania ich programów do obliczania konstrukcji szczególnej, jaką jest opona [47].

3.6. Inne modele opon

W literaturze związanej z tematem spotkać można również takie modele opon, które trudno zaliczyć do którejs z przedstawionych pięciu grup. Istnieją modele "wyspecjalizowane" nastawione na jak najlepsze odtworzenie tylko niektórych cech fizycznych obiektu rzeczywistego. Np. Muhin [48] zbudował model opony radialnej umożliwiającą określenie charakterystyk eksploatacyjnych opony, nie dającą jednak informacji o stanie naprężenia w jej elementach. Model z opasaniem (ang. belt model) przedstawiony przez Koutnego [49,50] złożony jest z dwóch układów: sprężystej warstwy bieżnika i reszty, tj. osnowy, ścianek bocznych i opasania, był wykorzystany do badania sztywności radialnej, obwodowej i bocznej opony.

Modelowano też tylko pewne strefy opony. Obliczeniowy model ścianki bocznej opony diagonalnej określony przez Clark'a i McIvor'a [51] pozwolił wyjaśnić niesymetryczny, względem środka powierzchni kontaktu opony z drogą, rozkład siły rozciągającej kord w rozważanej strefie. Levinson, Demiray i Sheung [52] analizowali siły rozwarstwiające w strefie bieżnika opony za pomocą warstwowego, ortotropowego modelu powłokowego tej części opony.

Należy też wskazać w tym miejscu na kilka opracowań monograficznych związanych z mechaniką opon [53,54,55,56,57].

Kończąc przegląd modeli obliczeniowych opon trzeba podkreślić, że każdy z nich spełnił mniejszą lub większą rolę w długotrwałym procesie doskonalenia konstrukcji opony. Trudności w dokładnej ocenie ich roli wynikają z faktu, że informacje na ten temat w większości przypadków nie były publikowane, stanowiły ścisłą własność firm oponiarskich.

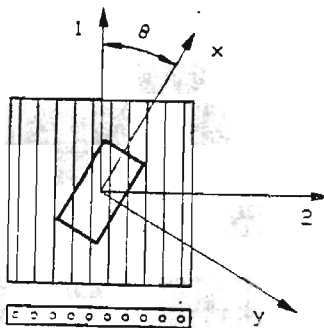
4. Własności mechaniczne materiału opony

Zbudowanie obliczeniowego modelu opony wraz z przyjęciem odpowiednich metod jego analizy jest ważnym krokiem w kierunku racjonalnego konstruowania opon. Jednakże, aby można było otrzymać jakiegokolwiek wyniki, niezbędna jest znajomość własności mechanicznych materiałów, z których ma być (lub jest) wykonana opona. Materiał ten jest zaliczany do kompozytów, ale jest to szczególny kompozyt, do opisu którego raczej nie nadają się rozwinięte już teorie dla tzw. sztywnych kompozytów, ewentualnie wymagają pewnych modyfikacji. Szczegółowość owa tkwi w:

- ogromnej różnicy między modułami kordu i gumy ($10^3 \div 10^4$, $10 \div 20$ dla typowych materiałów włóknistych)
- układzie i budowie kordu (kord jest zbiorem cienkich, skręconych włókien, ułożony jest w określonym kierunku).

Ze względu na to, powszechnie stosowane w kompozytach włóknistych (o losowym rozkładzie włókien) metody wygładzania i uśredniania mogą tu być przydatne tylko w ograniczonym zakresie.

Stosowanie coraz dokładniejszych modeli obliczeniowych opon, a w szczególności modeli dyskretnych, analizowanych metodą elementów skończonych, wymaga dobrej znajomości własności mechanicznych kompozytu kordowo-gumowego. Duże osiągnięcia w badaniu tych własności i określaniu odpowiednich zależności matematycznych ma Walter i współpracownicy [58]. Cel i poszczególne etapy analizy kompozytu kordowo-gumowego przedstawiono (wg. Waltera [59]) na rys.5.



Rys. 5. Warstwa gumy zbrojona kordem

Samą gumę można uważać za materiał jednorodny, izotropowy i fizycznie nieliniowy, sam kord zaś – poprzecznie izotropowy określony pięcioma niezależnymi stałymi sprężystości, z których dwie można pominąć (por. [59], str.

529). Kompozyt powstały w wyniku połączenia tych dwóch materiałów jest materiałem niejednorodnym, anizotropowym i fizycznie nieliniowym. Jednak najczęściej przyjmuje się, że kalandrowana warstwa kordu i gumy jest materiałem liniowo-sprężystym, ortotropowym i jednorodnym. Usprawiedliwienie takiego postępowania przedstawiono w pracy [60]. Proste, wystarczająco dokładne dla praktyki inżynierskiej wyrażenia na stałe sprężystości pojedynczej warstwy i laminatu kordowo-gumowego podali Walter i Patel [61]. Na przykład według równań Halpin-Tsai mamy (rys.6):

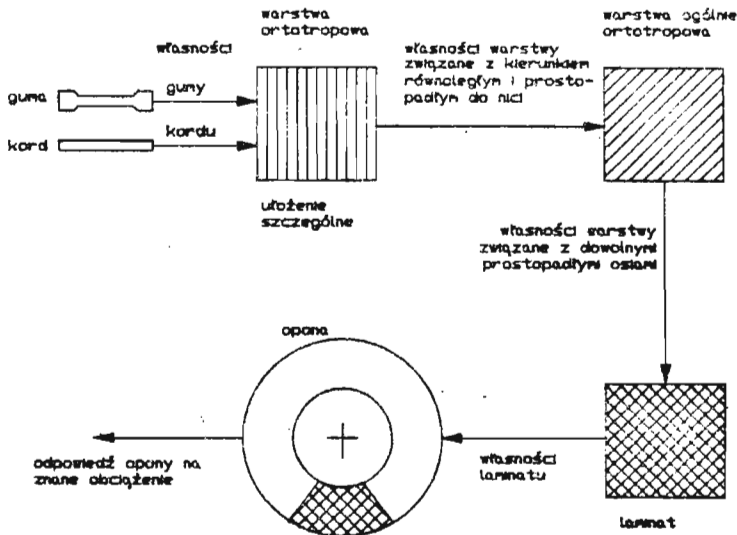
$$\begin{aligned}
 E_1 &= E_c v_c + E_r (1 - v_c), \\
 E_2 &= \frac{E_r (1 + 2v_c)}{1 - v_c}, \\
 G_{12} &= \frac{G_r [G_c + G_r + (G_c - G_r) v_c]}{[G_c + G_r - (G_c - G_r) v_c]}, \\
 \nu_{12} &= \nu_c v_c + \nu_r (1 - v_c), \\
 \nu_{21} &= \frac{\nu_{12} E_2}{E_1},
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

gdzie:

- E_x, E_r - moduły Younga, odpowiednio kordu i gumy,
- G_c, G_r - moduły ścinania, odpowiednio kordu i gumy,
- ν_c, ν_r - liczba Poissona, odpowiednio kordu i gumy,
- v_c - objętościowy współczynnik nasycenia kalandrowanej warstwy kordem.

W przypadku, gdy element warstwy obciążony jest naprężeniami w płaszczyznach równoległych do osi x, y , odpowiednie stałe sprężyste zależą od kąta θ . Ponadto występuje wtedy sprzężenie między naprężeniami normalnymi i odkształceniami postaciowymi (czego nie obserwuje się dla materiału izotropowego np. stali). Zakładając, że w laminacie warstwy występują parami $(+\theta, -\theta)$, można w pierwszym przybliżeniu podać określające go trzy niezależne stałe: moduł Younga E , moduł ścinania G i liczbę Poissona ν .

Coraz szerszy zakres obliczeń w dziedzinie opon wpływał na poszukiwanie coraz dokładniejszych modeli materiału i określanie dokładniejszych jego charakterystyk. Stąd nowe teorie [62], rozważania na temat współzależności między materiałem opony a jej konstrukcją [63], pogłębione analizy własności mechanicznych i kinematyki kompozytu w ujęciu nieliniowym [46] oraz próby uściślenia modelu materiału i doświadczalna weryfikacja wyników [64]. Do zaskakującego wszakże wniosku, i szczególnie ważnego dla praktyki, doszli Rothert, Nguyen i Gall [65]. Analizując deformacje opony metodą elementów skończonych i wykorzystując różne teorie opisu stałych materiałowych wykazali, że nie ma istotnego znaczenia jaka teoria była brana pod uwagę - wyniki były równoważne.



Rys. 6. Etapy analizy kompozytu

5. Podsumowanie

Za podstawowe mierniki jakości modeli obliczeniowych wszelkich konstrukcji możemy uznać (por. [66]):

- zgodność z rzeczywistością
- liczbę założeń upraszczających
- liczbę ujmowanych przypadków
- efektywność obliczeniową.

Dwa pierwsze mierniki są oczywiste – trzeci związany jest z zadaniem, aby ten sam model, np. opony, umożliwiając obliczanie sztywności promieniowej opony diagonalnej, umożliwiał również podobną analizę opony radialnej i pozwalał jeszcze np. na obliczanie sztywności bocznej. Czwarty miernik dotyczy kosztów i szybkości otrzymania wyników.

Mając na uwadze powyższe mierniki jakości modeli, oraz na podstawie dokonanego w poprzednim rozdziale przeglądu modeli obliczeniowych opon dochodzimy do wniosku, że skończone-elementowy model opony jest tym, który stwarza największe możliwości szerokiej analizy – zarówno wielkości wewnętrznych (np. pola odkształceń, temperatur itp.), jak i zewnętrznych (np. sztywności radialnej,

oporów toczenia itp.) – opony poddanej działaniu obciążeń eksploatacyjnych. W zależności od sposobu dyskretyzacji i rodzaju przyjętych elementów skończonych, umożliwi on obliczanie interesujących wielkości na różnych poziomach idealizacji obiektu rzeczywistego. Efektywność obliczeniowa modelu jest ciągle podwyższana przez zwiększanie mocy obliczeniowej komputerów oraz doskonalenie algorytmów numerycznych.

Model dyskretny jest aktualnie dynamicznie rozwijany i stosowany do wszechstronnej analizy opon pneumatycznych (por. A.Noor, J.Tanner [31]). Dzięki metodzie elementów skończonych można otrzymać wiele jakościowych i ilościowych informacji o procesach zachodzących w poszczególnych elementach opony. Ich właściwe wykorzystanie przez konstruktorów opon i przygotowujących materiały do ich budowy może przynieść konkretne korzyści.

Literatura

1. YOSHIMURA N., *The application of Finite Element Method to tire design*, Rubb. World, 192, 3, 1985, 14
2. BIDERMAN W.L., *Problemy mechaniki pneumatycznych szin, Mechanika pneumatycznych szin jak osnowa racjonalnego konstruowania i prognozowania eksploatacyjnych swjstw*, Sbornik Trudow, NIIXP, Moskwa 1974, 3–6
3. RIDHA R.A., *Computation of stresses, strains, and deformations of tires*, Rubb. Chem. Technol. 53, 4, 1980, 849–902
4. BIDERMAN W.L., *Rasczet formy profilja i naprjaženij w elementach pneumatycznej sziny nagružennoj wnutrennym dawleniem*, Sbornik Trudow NIIXP, 3, Goschimizdat, Moskwa, 1957, 16–51
5. HOFFERBERTH W., *Zur Festigkeit des Luftreifens*, Kautschuk u. Gummi, 9, 9, 1956, 225–231
6. BIDERMAN W.L. I DR., *Awtomobilnyje sziny*, Goschimizdat, Moskwa 1963
7. FRANK F., HOFFERBERTH W., *Mechanics of the pneumatic tire*, Rubb. Chem. Technol. 40, 3, 1967, 271–322
8. DAY R.B., GEHMAN S.D., *Theory for the meridian section of inflated cord tires*, Rubb. Chem. Technol. 36, 1, 1963, 11–27
9. LEIBEE J.B., SCHAFFERS W.J., *A new tire expansion rule and its use in tire design computations*, Rubb. Chem. Technol. 42, 4, 1969, 1079–1086
10. MAVRIGIAN G., GEHMAN S.D., *General method for approximating the tire contour integral for arbitrary cord path*, Rubb. Chem. Technol. 42, 4, 1969, 1034–1039
11. MAVRIGIAN G., *Mathematical notes concerning the tire contour integral*, Rubb. Chem. Technol. 44, 1, 1971, 122–126
12. PURDY J.F., *Mathematics underlying the design of pneumatic tires*, Edwards Brothers Inc. Ann Arbor, Michigan 1963
13. *Pneumatyczne sziny*, Chimija, Moskwa 1973

14. JURKOWSKI B., *Wybrane zagadnienia projektowania opon samochodowych*, Zeszyty Naukowe PGd. Mechanika – zeszyt 14, Wyd. Uczelniane PGd., Gdansk 1971
15. JURKOWSKA B., JURKOWSKI B., *Produkcja opon i dętek*, WYD. 2, WNT, WARSZAWA 1975
16. BIDERMAN W.L. I DR., *Atlas nomogramm równowesnych konfiguracji pneumatycznych szin*, Chimija, Moskwa 1967
17. JANDÍK M., KOUTNÝ F., *Nomogramy rovnovážných profilu radiálních pneumatik*, Plasty a Kaučuk, 11, 3, 1974, 77–82
18. FRANK F., SEGSELKE P., *Die Querschnittsform von Kreuzlagenund Gürtelreifen*, Kunststofftechnik, 10, 1, 1971, 9–31, T.1, 10, 2, 1971, 42–47, T.2, 11, 1/2, 1972, 23–31, T.3, 11, 5, 1972, 133–138, T.4
19. KONDEJ S., *Udoskonalone metody określenia zarysów równowaznych opon*, Polimery, 27, 3, 1982, 104–108
20. PELC J., PETZ E., *Komputerowe wspomaganie konstrukcji zarysu wewnętrznego opony*, Polimery, 33, 10, 1988, 381–383
21. KOUTNÝ F., *Meridian des aufgepumpten Reifens I,II*, Plaste u. Kautschuk, 18, 4, 1971, 282–288, 18, 9, 1971, 680–685
22. KOUTNÝ F., *Statické výpočty radiální pneumatiky*, Plast. Hmoty Kaucuk, 10, 12, 1973, 360–366
23. BUHIN B.L., GILDMAN I.M., KAPLINSKIJ E.M., *Simmetricznaja deformacija bezmomentnoj setczatoj oboloczki wraszczienija*, Kauczuk i Rezina, 11, 1969, 36–39
24. BUHIN B.L., *Primenenie teorii setczatych oboloczek k rasczetu pneumaticzeskich szin*, *Mechanika ... kak w 2.*, 59–74
25. TIELKING J.T., FENG W.W., *The application of the maximum potential energy principle to nonlinear axisymmetric membrane problems*, J. Appl. Mech. 73, 1974, 491–496
26. FENG W.W., TIELKING J.T., HUANG P., *The inflation and contact constraint of a rectangular Mooney membrane*, J. Appl. Mech. 73, 1974, 979–983
27. ROBECCHI E., *Tire calculation by means of a lamina model*, Kautschuk u. Gummi, Kunststoffe, 26, 3, 1973, 106
28. BREWER H.K., *Stresses and deformations in multi-ply aircraft tires subjected to inflation pressure loadings*, Tech. Rep. AFFDL-TR-70-62, Wright-Patterson Air Force Base, Ohio, 1970
29. CLARK S.K., BUDD CH.B., TIELKING J.T., *Tire shape calculation by the energy method*, Kautschuk u. Gummi, Kunststoffe, 25, 12, 1972, 587
30. DEESKINAZI J., CEMBROLA R.J., *A parametric study on interlaminar shear strains in cord-rubber composites*, Rubb. Chem. Technol. 57, 1, 1984, 168–183
31. NOOR A.K., TANNER J.A., *Tire modeling and contact problems: Advances and trends in the development of computational models for tires*, Comput. Struct. 20, 1–3, 1985, 517–533
32. BIDERMAN W.L., LEWKOWSKAJA E.JA., *K rasczetu radialnych i opojasannyh diagonalnych szin*, *Mechanika...sm.2.*, 7–11
33. NOWICZKOW JU.H., KUZMIN A.S., *Issledowanie naprjazhenno-deformirovannogo sostojanija slojstych oboloczek wraszczienija s priloženiem k rasczetu szin*, *Mechanika Kompozit. Materialow*, 6, 1984, 1023–1029

34. TIELKING J.T., *A finite element tire model*, Tire Sci. Technol. 11, 1-4, 1984, 50-63
35. RAKOWSKI G., *Komputerowa mechanika konstrukcji*, Wyd. PW, Warszawa 1977
36. ZIENKIEWICZ O.C., *Metoda elementów skończonych*, Arkady, Warszawa 1972
37. DUNN S.E., ZOROWSKI C.F., *A study of internal stresses in statically deformed pneumatic tires*, Office of Vehicle Systems Research Contract CST-376, U.S.National Bureau of Standards, Washington, D.C. 1970
38. RIDHA R.A., *Analysis of tire mold design*, Tire Sci. Technol. 2, 1974, 195-210
39. KAGA H., OKAMOTO K., TOZAWA Y., *Stress analysis of a tire under vertical load by a Finite Element Method*, Tire Sci. Technol. 5, 2, 1977, 102-118
40. YOSHIMURA N. ET AL. *Study of carcass profile for increased tire performance*, Kautschuk+Gummi Kunst. 38, 12, 1985, 1096-1099
41. DEESKINAZI J., RIDHA R.A., *Finite element analysis of giant earthmover tires*, Rubb. Chem. Technol. 55, 4, 1982, 1044-1054
42. PATEL H.P., KENNEDY R.H., *Nonlinear finite element analysis for composite structures of axisymmetric geometry and loading*, Comput. Struct. 15, 1, 1982, 79-84
43. WATANABE Y., KALDJIAN M.J., *Modeling and analysis of bias-ply motorcycle tires*, Comput. Struct. 17, 5ja6, 1983, 653-658
44. SHOEMAKER P.S., *Tire Engineering by finite element modeling*, SAE Techn. Pap. Ser. 840065, Society of Automotive Engineers New York 1984
45. BOLLING I., *Erste Erfahrungen mit Finite-Elemente-Modellen für Ackerschlepperreifen*, Grundl. Landtechnik, 34, 6, 1984, 229-236
46. TABADDOR F., STAFFORD J.R., *Some aspects of rubber composite finite element analysis*, Comput. Struct. 21, 1/2, 1985, 327-339
47. DURAND M., JANKOVICH E., *Nonapplicability of linear finite element programs to the stress analysis of tires*, 2nd NASTRAN Useres Colloquium, NASA Langley Research Center, NASA TMX-2637, 1972
48. MUHIN O.N., *Rasczet progiba radialnoj sziny s ucetom meridionalnoj kriwizny begowej dorozki*, Mechanika...sm 2, 12-25
49. KOUTNÝ F., *Load deflection curves for radial tyres*, Appl. Math. Modelling 5, 6, 1981, 422-427
50. KOUTNÝ F., *Cornering radial tyres*, Appl. Math. Modelling 7, 2, 1983, 139-142
51. CLARK S.K., McIVOR I.K., *A mathematical model for a tire sidewall*, Rubb. Chem. Technol. 43, 5, 1970, 1055-1066
52. LEVINSON M., DEMIRAY H., SHEUNG S.C., *Pure flexure of a layer orthotropic shell-elasticity study of a tire-related problem*, Rubb. Chem. Technol. 46, 1, 1973, 294-304
53. *Mechanika pneumaticzeskich szin*, NII Szinnoj Promyszlennosti, Moskwa 1976 (B.L.Buhin, W.F.Ewstratow, I.P.Krakownaja)
54. *Rabota awtomobilnoj sziny*, Transport, Moskwa 1976
55. BUHIN B.L., *Wychodnye charakteristiki pneumaticzeskich szin*, CNIIT Eneftchim, Moskwa 1978

56. JACENKO N.N., *Pogloszczajuszczaja i sglaziwajuszczaja sposobnost szin*, Maszyno-stroenie, Moskwa 1978
57. BUHIN B.L., *Wwedenie w mekhaniku pneumaticzeskich szin*, Chimija, Moskwa 1988
58. WALTER J.D. ET AL., *Advances in tire composite theory*, Tire Sci. Technol., 1, 1973, 210-250
59. WALTER J.D., *Cord-rubber tire composites: theory and applications*, Rubb. Chem. Technol. 51, 3, 1978, 524-576
60. PATEL H.P., TURNER J.L., WALTER J.D., *Radial tire cord-rubber composites*, Rubb. Chem. Technol. 49, 4, 1976, 1095-1110
61. WALTER J.D., PATEL H.P., *Approximate expressions for the elastic constants of cord-rubber laminates*, Rubb. Chem. Technol. 52, 4, 1979, 710-724
62. CLARK S.K., *Theory of the elastic net applied to cord-rubber composites*, Rubb. Chem. Technol. 56, 2, 1983, 372-389
63. CLARK S.K., DODGE R.N., *Interaction of tire material and design*, RUBB. CHEM. TECHNOL. 58, 2, 1985, 314-325
64. CEMBROLA R.J., DUDEK T.J., *Cord-rubber material properties*, Rubb. Chem. Technol. 58, 4, 1985, 830-856
65. ROTHERT H., NGUYEN B., GALL R., *Comparative study on the incorporation of composite material for tyre computation*, Compos. Struct. 2: Proc. 2nd Int. Conf. Paisley, 14-16 Sept. 1983, London, New York 1983, 549-567
66. RAKOWSKI G., WASZCZYSZYN Z., *Komputerowa analiza konstrukcji*, XXXI Konf. Nauk. KILiW PAN i KN PZITB, Referat problemowy z Teorii Konstrukcji, Kraków 1985 Krynica, Materiały pokonferencyjne, ZG PKr., Kraków 1986, 287-307

Summary

Pneumatic tire computational models are surveyed. Difficulties concerned with the tires analysis have been pointed out. The methods of the cord-rubber composite elastic constants estimating are also described. Finite element tire model was found to be the most appropriate for the next calculations.

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 6 września 1990 roku